# 构造非线性发展方程无穷序列类孤子精确解的一种方法*

套格图桑[1)2)†] 白玉梅[1)]

1) ( 内蒙古民族大学数学学院, 通辽 028043 )

2) ( 内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022 )

( 2011 年 10 月 14 日收到; 2011 年 12 月 8 日收到修改稿 )

辅助方程法已构造了非线性发展方程的有限多个新精确解. 本文为了构造非线性发展方程的无穷序列类孤子精确解, 分析总结了辅助方程法的构造性和机械化性特点. 在此基础上, 给出了一种辅助方程的新解与 Riccati 方程之间的拟 Bäcklund 变换. 选择了非线性发展方程的两种形式解, 借助符号计算系统 Mathematica, 用改进的 (2+1) 维色散水波系统为应用实例, 构造了该方程的无穷序列类孤子新精确解. 这些解包括无穷序列光滑类孤子解, 紧孤立子解和尖峰类孤立子解.

**关键词**: 辅助方程, 非线性发展方程, Bäcklund 变换, 类孤子新精确解

**PACS:** 02.30.Ik,02.30.Jr

## 1 引 言

孤立子理论主要研究以下两个方面内容：(1) 构造系统的求解方法: 即构造和发展求解非线性方程的一种系统的方法. 这里指的非线性方程包括非线性常微分方程, 非线性偏微分方程, 非线性积分微分方程和非线性差分微分方程. (2) 解释解的性质: 研究解释可积方程的代数和几何的一系列美妙的性质. 这里所说的可积方程是指能够转化成线性方程的非线性方程. 对于研究解的性质方面一般有如下三个情况. 第一种情况: 当难以获得显示精确解时, 分析研究非线性发展方程的适定性问题; 第二种情况: 利用计算数学的理论知识和计算机, 对解进行模拟分析研究; 第三种情况: 利用试探法和构造变换法等数学技巧, 获得非线性发展方程的精确解.

辅助方程法, 在构造非线性发展方程的精确解领域发挥了非常重要的作用, 已取得了许多新成果. 比如: 文献 [1—17] 利用 Riccati 方程, 构造了常系数 (变系数) 非线性发展方程的新精确解. 文献 [18—22] 利用投影 Riccati 方程, 构造了连续 (离散) 非线性发展方程的新精确解. 文献 [17],[21],[23—26] 用不同的方法, 获得了 (2+1) 维色散水波系统的光滑孤立子解, 并分析研究了解的一些性质以及相关问题.

理论上说: “非线性发展存在无穷多个解”. 但是, 文献 [1—26] 只获得了非线性发展方程的有限多个光滑孤立子精确解, 未能获得无穷序列精确解. 本文为了构造非线性发展方程的无穷序列类孤子新精确解, 研究总结了辅助方程法的构造性和机械化性特点. 在此基础上, 给出了一种辅助方程与 Riccati 方程之间的拟 Bäcklund 变换. 选择了非线性发展方程的两种形式解, 借助符号计算系统 Mathematica, 用改进的 (2+1) 维色散水波系统 [17,21,23−26] 为应用实例, 构造了该方程的无穷序列类孤子新精确解. 这些解包括无穷序列光滑类孤子解、无穷序列紧孤立子解和无穷序列尖峰类孤

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号: 10862003)、内蒙古自治区高等学校科学研究基金 (批准号: NJZY12031) 和内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2010MS0111) 资助的课题.

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn

 

立子解.

$$u_{yt}+u_{xxy}-2v_{xx}-(u^2)_{xy}=0, \tag{1}$$

$$v_t-v_{xx}-2(uv)_x=0. \tag{2}$$

## 2 一种辅助方程的 Bäcklund 变换与新解

### 2.1 一种辅助方程与 Riccati 方程的拟 Bäcklund 变换

下面给出的一种辅助方程 (3) 通过变换 (4), 转化为 Riccati 方程 (5).

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\mathrm{d}\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big)^2 =&\big(\psi'(\xi)\big)^2\\ =&a\psi^2(\xi)+b\psi^3(\xi)+c\psi^4(\xi),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\psi(\xi)=\frac{\rho^2(\xi)-a}{b-2\sqrt{c}\rho(\xi)},\quad \rho(\xi)=2z(\xi), \tag{4}$$

$$z'(\xi)=z^2(\xi)-\frac{1}{4}a. \tag{5}$$

### 2.2 Riccati 方程的解与 Bäcklund 变换

#### 2.2.1 Riccati 方程的解

文献 [1—17] 利用 Riccati 方程 (6) 的下列五个解, 构造了多种非线性发展方程的新精确解.

$$z'(\xi)=z^2(\xi)+R, \tag{6}$$

$$z_0(\xi)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi),\quad (R<0), \tag{7}$$

$$z_0(\xi)=-\sqrt{-R}\coth(\sqrt{-R}\xi),\quad (R<0), \tag{8}$$

$$z_0(\xi)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi),\quad (R>0), \tag{9}$$

$$z_0(\xi)=-\sqrt{R}\cot(\sqrt{R}\xi),\quad (R>0), \tag{10}$$

$$z_0(\xi)=-\frac{1}{\xi},\quad (R=0). \tag{11}$$

### 2.3 Riccati 方程 (6) 的 Bäcklund 变换

**情况 1** 若 $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (6) 的解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (6) 的解

$$\bar{z}(\xi)=\frac{p+qz(\xi)+mz^2(\xi)+rz'(\xi)+nz^3(\xi)+l\big[z'(\xi)\big]^2}{A_2+B_2z(\xi)+Dz^2(\xi)+Cz'(\xi)+Fz^3(\xi)+K\big[z'(\xi)\big]^2}, \tag{12}$$

**情况 2** 若 $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (6) 的解, 则下列 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (6) 的解

$$\bar{z}(\xi)=\frac{-BR+Az(\xi)}{A+Bz(\xi)}. \tag{13}$$

其中

$$p=R(-B_2+m+FR),\quad q=\frac{B_2l^2-(l^2+K^2R)[m+r+(F+l)R]}{Kl},$$

$$A_2=\frac{B_2l-l^2R-l(m+r+FR)-KR(C+KR)}{K},\quad n=\frac{1}{K}(Fl-l^2-K^2R),$$

$D=-C+\dfrac{1}{K}(Fl-l^2)+\dfrac{1}{l}(m+r+FR)K-KR$; $B_2, C, F, K, m, l, r$ 是不全为零的任意常数.

#### 2.3.1 Riccati 方程解的非线性叠加公式

**情况 1** 若 $z_1(\xi), z_2(\xi)$ 是 Riccati 方程 (6) 的解, 则下列 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (6) 的解

$$\bar{z}(\xi)=\frac{\mathrm{i}R\big[\mathrm{i}m\sqrt{R}+\big(m+\mathrm{i}D\sqrt{R}+CR\big)z_2(\xi)+\big(-CR+Dz_2(\xi)\big)z_1(\xi)\big]}{-\sqrt{R^3}\big(D+Cz_2(\xi)\big)+\big(m\sqrt{R}+\mathrm{i}DR+C\sqrt{R^3}-\mathrm{i}mz_2(\xi)\big)z_1(\xi)},\quad (mD<0), \tag{14}$$

$$\bar{z}(\xi)=\frac{m+Dz_2(\xi)+\dfrac{1}{\sqrt{R}}\big[-\mathrm{i}CRz_1(\xi)+\mathrm{i}\big(m+CR+Dz_1(\xi)\big)z_2(\xi)\big]}{D+Cz_2(\xi)-\dfrac{1}{\sqrt{R^3}}\big(m\sqrt{R}-\mathrm{i}DR+C\sqrt{R^3}+\mathrm{i}mz_2(\xi)\big)z_1(\xi)},\quad (mD<0), \tag{15}$$

情况 2 若 $z_1(\xi), z_2(\xi), z_3(\xi)$ 是 Riccati 方程 (6) 的三个解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (6) 的解.

$$\bar{z}(\xi)=\frac{R\big[-rz_1(\xi)+(p+r)z_2(\xi)-pz_3(\xi)\big]}{-rz_2(\xi)z_3(\xi)+z_1(\xi)\big[-pz_2(\xi)+(p+r)z_3(\xi)\big]}, \tag{16}$$

$$\bar{z}(\xi)=\frac{rz_2(\xi)z_3(\xi)-z_1(\xi)\big[Bz_2(\xi)+(-B+r)z_3(\xi)\big]}{-rz_1(\xi)+(-B+r)z_2(\xi)+Bz_3(\xi)}, \tag{17}$$

$$\bar{z}(\xi)=-\frac{R\big[-Nz_3(\xi)+[-L+mz_3(\xi)]z_2(\xi)+[L+N+nz_2(\xi)-(m+n)z_3(\xi)]z_1(\xi)\big]}{nRz_3(\xi)+[mR+Nz_2(\xi)+Lz_3(\xi)]z_1(\xi)-\big[(m+n)R+(L+N)z_3(\xi)\big]z_2(\xi)}. \tag{18}$$

这里 $B,p,r,m,n,M,N,L$ 是不全为零的任意常数.

### 2.4 一种辅助方程 (特殊情况) 的新解

情况 1 当 $b=0$ 时, 获得了辅助方程 (3) 的如下解.

$$\psi(\xi)=\begin{cases}\Big[\frac{-a}{c}\sec^2[(-a)^{\frac12}\xi]\Big]^{\frac12}, & \Big(|\xi|\le\frac{2k\pi}{\sqrt{-a}},\ k\in Z,\ a<0,\ c>0\Big),\\ \sqrt{\frac{-a}{c}}, & \Big(|\xi|>\frac{2k\pi}{\sqrt{-a}},\ k\in Z,\ a<0,\ c>0\Big).\end{cases} \tag{19}$$

$$\psi(\xi)=\begin{cases}\Big[\frac{-a}{c}\sec^2[(-a)^{\frac12}\xi]\Big]^{\frac12}, & \Big(|\xi|\le\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{-a}},\ k\in Z,\ a<0,\ c>0\Big),\\ \sqrt{\frac{-a}{c}}, & \Big(|\xi|>\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{-a}},k\in Z,\ a<0,\ c>0\Big).\end{cases} \tag{20}$$

$$\psi(\xi)=\begin{cases}\Big[\frac{-a}{c}\csc^2[(-a)^{\frac12}\xi]\Big]^{\frac12}, & \left(|\xi|\le\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{-a}},\ k\in Z,\ a<0,\ c>0\right),\\ \sqrt{\frac{-a}{c}}, & \left(|\xi|>\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{-a}},\ k\in Z,\ a<0,\ c>0\right).\end{cases} \tag{21}$$

$$\psi(\xi)=\begin{cases}\Big[\frac{-a}{c}\csc^2[(-a)^{\frac12}\xi]\Big]^{\frac12}, & \left(|\xi|\le\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{\sqrt{-a}},\ k\in Z,\ a<0,\ c>0\right),\\ \sqrt{\frac{-a}{c}}, & \left(|\xi|>\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{\sqrt{-a}},\ k\in Z,\ a<0,\ c>0\right).\end{cases} \tag{22}$$

$$\psi(\xi)=\begin{cases}\Big[\frac{-a}{c}\,\mathrm{sech}^2[\sqrt{a}\xi]\Big]^{\frac12}, & \Big(|\xi|\le\frac{|\mathrm{arcsech}(0)|}{\sqrt{a}},\ a>0,\ c<0\Big),\\ 0, & \Big(|\xi|>\frac{|\mathrm{arcsech}(0)|}{\sqrt{a}},\ a>0,\ c<0\Big),\end{cases} \tag{23}$$

$$\psi(\xi)=\Big[\frac{a}{c}\,\mathrm{csch}^2[\sqrt{a}\xi]\Big]^{\frac12},\quad (\xi\neq0,\ a>0,\ c>0). \tag{24}$$

**情况 2** 当 $c=0$ 时, 获得了辅助方程 (3) 的如下解.

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big)^2=\big(\psi'(\xi)\big)^2=a\psi^2(\xi)+b\psi^3(\xi), \tag{25}$$

经计算获得方程 (25) 的如下解.

$$\psi(\xi)=-\frac{a}{b}+\frac{a\big[1+\exp(\sqrt{a}|\xi|)\big]^2}{b\big[1-\exp(\sqrt{a}|\xi|)\big]^2},(a>0), \tag{26}$$

$$\psi(\xi)=-\frac{a}{b}-\frac{a\tan^2\Big(\frac{\sqrt{-a}}{2}|\xi|\Big)}{b},\ (a<0), \tag{27}$$

### 2.5 一种辅助方程 (特殊情况) 的 Bäcklund 变换

**情况 1** 若 $\psi_{n-1}(\xi)$ 是辅助方程 (3)($b=0$) 的解, 则下列 $\psi_n(\xi)$ 也是方程 (3)($b=0$) 的解

$$\psi_n^2(\xi)=\frac{-2\sqrt{3A_1}c\psi_{n-1}^2(\xi)\pm6a[\psi'_{n-1}(\xi)]^2}{c\big[\sqrt{3A_1}\mp9[\psi'_{n-1}(\xi)]^2\big]},$$
$$\Bigg(b=0,\ a>0,\ A_1=4\sqrt{\frac{a^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots\Bigg) \tag{28}$$

$$\psi_n^2(\xi) = \frac{-8a\sqrt{3A_1} - 2\sqrt{3A_1}c\psi_{n-1}^2(\xi)}{4c\left[\sqrt{3A_1} \mp 9[\psi'_{n-1}(\xi)]^2\right]},$$
$$\left(b=0,\ a<0,\ A_1 = 4\sqrt{\frac{a^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots\right) \quad (29)$$

**情况 2** 若 $\psi(\xi)$ 是辅助方程 (3)($c=0$) 的解, 则下列 $\bar{\psi}(\xi)$ 也是辅助方程 (3)($c=0$) 的解.

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(\xi) =& \big\{(-4aP^2 + b^2F^2) \\ &\times [(4aP^2 + b^2F^2)\psi(\xi) \\ &+ 4bP^2\psi^2(\xi) + 4bPF\psi'(\xi)]\big\} \\ &\times \left(4aP^2 - b^2F^2 + 4bP^2\psi(\xi)\right)^{-2}, \quad (30)\end{aligned}$$

这里 $F, P$ 是不全为零的任意常数.

## 3 方法的介绍

假设给定的非线性发展方程为如下 (以 $(2+1)$ 维非线性发展方程为例)

$$H(u, u_x, u_t, u_y, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xy}, u_{yt}, \cdots) = 0, \quad (31)$$

我们把方程 (31) 的解取为下列形式

$$u(x,y,t) = u(\xi) = F\big(g_i(y,t), \psi'(\xi), \psi(\xi)\big), \quad (\xi = p(y)x + q(y,t)) \quad (32)$$

这里 (32) 式是 $g_i(y,t)(i=0,1,2,\cdots,m)$ 为系数的 $\psi'(\xi), \psi(\xi)$ 的多项式或有理分式. $\psi'(\xi), \psi(\xi)$ 是辅助方程 (3) 来确定. $p(y), q(y,t), g_i(y,t), (i=0,1,2,\cdots,m)$ 是 $y,t$ 的待定函数.

将 (3), (32) 式一起代入 (31) 式, 令 $\psi^j(\xi)[\psi'(\xi)]^r$ ($r=0,\ 1;\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 的系数为零后可得到 $p(y), q(y,t),\ g_i(y,t), (i=0,1,2,\cdots,m)$ 为未知量的超定微分方程组, 用符号计算系统 Mathematica 求出该超定微分方程组的解, 再把求出的每一组解分别同辅助方程 (3) 的解与 Bäcklund 变换来确定的无穷序列解一起代入 (32) 式, 即可得到非线性发展方程 (31) 的无穷序列类孤子新精确解. 这些解包括无穷序列光滑类孤子解、紧孤立子解和尖峰类孤子解.

## 4 改进的 (2+1) 维色散水波系统的无穷序列新精确解

我们利用下列变换 (33), 可以把改进的 (2+1) 维色散水波系统 (1), (2) 转化为非线性发展方程 (34)

$$v(x,y,t) = u_y(x,y,t), \quad (33)$$

$$u_{yt}(x,y,t) - u_{xy}^2(x,y,t) - u_{xxy}(x,y,t) = 0. \quad (34)$$

方程 (34) 经对 $y$ 积分一次后变成为下列方程.

$$\begin{aligned}&u_t(x,y,t) - u_{xx}(x,y,t) \\ &- 2u(x,y,t)u_x(x,y,t) = R(x,t), \quad (35)\end{aligned}$$

这里 $R(x,t)$ 是 $x,t$ 的任意函数.

我们选择方程 (35) 的如下两种形式解

$$\begin{aligned}&u(x,y,t) = u(\xi) \\ =& g_0(t) + g_1(y) + g_2(y)\psi(\xi) + \frac{g_3(y)\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}, \\ &(\xi = p(y)x + q(y,t)), \quad (36)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u(x,y,t) = u(\xi) \\ =& g_0(y,t) + g_1(y)\psi(\xi) + \frac{g_2(y)\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}, \\ &(\xi = p(y)x + q(y,t)). \quad (37)\end{aligned}$$

将 (3), (36) 式一起代入 (35) 式, 令 $\psi^q(\xi)[\psi'(\xi)]^r (r=0,1; q=0,1,2,3)$ 的系数为零后得到一个超定微分方程组 (限于篇幅未列出), 用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解

$$\begin{aligned}g_0(t) &= \int R(x,t)\mathrm{d}t + F(x,y), \\ g_1(y) &= -g_0(t) + \frac{q_t(y,t)}{2p(y)}, \\ g_2(y) &= 0,\ g_3(y) = -p(y),\ b=0; \quad (38)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_0(t) &= \int R(x,t)\mathrm{d}t + F(x,y), \\ g_1(y) &= -g_0(t) + \frac{q_t(y,t)}{2p(y)}, \\ g_2(y) &= 0,\ g_3(y) = -\frac{1}{2}p(y),\ c=0; \quad (39)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_0(t) &= \int R(x,t)\mathrm{d}t + F(x,y), \\ g_1(y) &= -g_0(t) + \frac{q_t(y,t)}{2p(y)}, \\ g_2(y) &= \mp\frac{1}{2}\sqrt{c}p(y), \\ g_3(y) &= -\frac{1}{2}p(y). \quad (40)\end{aligned}$$

这里 $F(x,y)$ 是 $x,y$ 的任意函数.

将 (38) ∼ (40) 式分别代入 (36) 式后, 得到改进的 (2+1) 维色散水波系统的下列形式的精确解.

$$\begin{cases} u_1(x,y,t)=\dfrac{q_t(y,t)}{2p(y)}-\dfrac{p(y)\psi'\big(p(y)x+q(y,t)\big)}{\psi\big(p(y)x+q(y,t)\big)}, \\ v_1(x,y,t)=(u_1)_y(x,y,t),(b=0). \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} u_2(x,y,t)=\dfrac{q_t(y,t)}{2p(y)}-\dfrac{p(y)\psi'\big(p(y)x+q(y,t)\big)}{2\psi\big(p(y)x+q(y,t)\big)}, \\ v_2(x,y,t)=(u_2)_y(x,y,t),(c=0). \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} u_3(x,y,t)=\dfrac{q_t(y,t)}{2p(y)}-\dfrac{p(y)\big[\pm\sqrt{c}\psi^2\big(p(y)x+q(y,t)\big)+\psi'\big(p(y)x+q(y,t)\big]}{2\psi\big(p(y)x+q(y,t)\big)}, \\ v_3(x,y,t)=(u_3)_y(x,y,t). \end{cases} \tag{43}$$

将 (3), (37) 式一起代入 (35) 式, 令 $\psi^q(\xi)[\psi'(\xi)]^r(r=0,1;q=0,1,2,3)$ 的系数为零后得到一个超定微分方程组 (限于篇幅未列出), 用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解.

$$g_0(y,t)=\int R(x,t)\mathrm{d}t+G(x,y),\quad g_1(y)=\mp\frac{\sqrt{c}q_t(y,t)}{4g_0(y,t)},\quad g_2(y)=\ -\frac{q_t(y,t)}{4g_0(y,t)},\quad p(y)=\frac{q_t(y,t)}{2g_0(y,t)}; \tag{44}$$

其中 $G(x,y)$ 是 $x,y$ 的任意函数.

将 (44) 式代入 (37) 式后, 得到改进的 (2+1) 维色散水波系统的下列形式的精确解.

$$\begin{cases} u_4(x,y,t)=g_0(y,t)\mp\dfrac{\big[\sqrt{c}\psi^2(\xi)\pm\psi'(\xi)\big]q_t(y,t)}{4\psi(\xi)g_0(y,t)}, \\ v_4(x,y,t)=(u_4)_y(x,y,t),\quad \left(\xi=\dfrac{q_t(y,t)}{2g_0(y,t)}x+q(y,t)\right). \end{cases} \tag{45}$$

这里 $g_0(y,t)=\int R(x,t)\mathrm{d}t+G(x,y)$,$G(x,y)$ 是 $x,y$ 的任意函数.

利用以上得到的辅助方程 (3) 的解与 Bäcklund 变换以及形式解 (41) ∼ (43), (45), 可以获得改进的 (2+1) 维色散水波系统的无穷序列类孤子新精确解.

(1) 无穷序列光滑类孤立子解

将 (4), (7), (12) 来确定的无穷序列精确解, 代入 (43) 后得到改进的 (2+1) 维色散水波系统的双曲函数型无穷序列光滑类孤立子解.

$$\begin{cases} \begin{cases} u_j(x,y,t)=\dfrac{q_t(y,t)}{2p(y)}-\dfrac{p(y)\big[\pm\sqrt{c}\psi_j^2(\xi)+\psi_j'(\xi)\big]}{2\psi_j(\xi)},(\xi=p(y)x+q(y,t)) \\ v_j(x,y,t)=(u_j)_y(x,y,t). \end{cases} \\ \psi_j(\xi)=\dfrac{p+qz_{j-1}(\xi)+mz_{j-1}^2(\xi)+rz_{j-1}'(\xi)+nz_{j-1}^3(\xi)+l\big[z_{j-1}'(\xi)\big]^2}{A_2+B_2z_{j-1}(\xi)+Dz_{j-1}^2(\xi)+Cz_{j-1}'(\xi)+Fz_{j-1}^3(\xi)+K\big[z_{j-1}'(\xi)\big]^2}, \\ \psi_0(\xi)=\dfrac{\rho_0^2(\xi)-a}{b-2\sqrt{c}\rho_0(\xi)},\rho_0(\xi)=2z_0(\xi), \\ z_0(\xi)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi),\quad (R<0,\ j=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{46}$$

将 (4), (9), (12) 来确定的无穷序列精确解, 代入 (43) 后得到改进的 (2+1) 维色散水波系统的三角函数

型无穷序列光滑类孤立子解.

$$\begin{cases}\begin{cases}u_j(x,y,t)=\dfrac{q_t(y,t)}{2p(y)}-\dfrac{p(y)\big[\pm\sqrt{c}\psi_j^2(\xi)+\psi_j'(\xi)\big]}{2\psi_j(\xi)},(\xi=p(y)x+q(y,t))\\ v_j(x,y,t)=(u_j)_y(x,y,t).\end{cases}\\ \psi_j(\xi)=\dfrac{p+qz_{j-1}(\xi)+mz_{j-1}^2(\xi)+rz_{j-1}'(\xi)+nz_{j-1}^3(\xi)+l\big[z_{j-1}'(\xi)\big]^2}{A_2+B_2z_{j-1}(\xi)+Dz_{j-1}^2(\xi)+Cz_{j-1}'(\xi)+Fz_{j-1}^3(\xi)+K\big[z_{j-1}'(\xi)\big]^2},\\ \psi_0(\xi)=\dfrac{\rho_0^2(\xi)-a}{b-2\sqrt{c}\rho_0(\xi)},\ \rho_0(\xi)=2z_0(\xi),\\ z_0(\xi)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi),\ (R>0,\ j=1,2,\cdots).\end{cases}\tag{47}$$

其中 $p=R(-B_2+m+FR)$,

$$q=\frac{B_2l^2-(l^2+K^2R)[m+r+(F+l)R]}{Kl},\quad A_2=\frac{B_2l-l^2R-l(m+r+FR)-KR(C+KR)}{K},$$

$$n=\frac{1}{K}(Fl-l^2-K^2R),\quad D=-C+\frac{1}{K}(Fl-l^2)+\frac{1}{l}(m+r+FR)K-KR;$$

$B_2,C,F,K,m,l,r$ 是不全为零的任意常数.

(2) 无穷序列尖峰类孤立子解

将 (26), (30) 确定的无穷序列精确解, 代入 (42) 后得到改进的 (2+1) 维色散水波系统的无穷序列尖峰类孤立子解.

$$\begin{cases}\begin{cases}u_j(x,y,t)=\dfrac{q_t(y,t)}{2p(y)}-\dfrac{p(y)\psi_j'(\xi)}{2\psi_j(\xi)},\quad(\xi=p(y)x+q(y,t))\\ v_j(x,y,t)=(u_j)_y(x,y,t),\quad(c=0).\end{cases}\\ \psi_j(\xi)=\dfrac{(-4aP^2+b^2F^2)[(4aP^2+b^2F^2)\psi_{j-1}(\xi)+4bP^2\psi_{j-1}^2(\xi)+4bPF\psi_{j-1}'(\xi)]}{(4aP^2-b^2F^2+4bP^2\psi_{j-1}(\xi))^2},\\ \psi_0(\xi)=-\dfrac{a}{b}+\dfrac{a\big[1+\exp(\sqrt{a}|\xi|)\big]^2}{b\big[1-\exp(\sqrt{a}|\xi|)\big]^2},\quad(a>0,j=1,2,\cdots).\end{cases}\tag{48}$$

这里 $F,P$ 是不全为零的任意常数.

(3) 无穷序列紧孤立子解

将 (19), (29) 确定的无穷序列精确解, 代入 (41) 后得到改进的 (2+1) 维色散水波系统的三角函数型无穷序列紧孤立子解.

$$\begin{cases}\begin{cases}u_n(x,y,t)=\dfrac{q_t(y,t)}{2p(y)}-\dfrac{p(y)\psi_n'(\xi)}{\psi_n(\xi)},(\xi=p(y)x+q(y,t))\\ v_n(x,y,t)=(u_n)_y(x,y,t),\ (b=0).\end{cases}\\ \psi_n^2(\xi)=\dfrac{-8a\sqrt{3A_1}-2\sqrt{3A_1}c\psi_{n-1}^2(\xi)}{4c\big[\sqrt{3A_1}\mp9[\psi_{n-1}'(\xi)]^2\big]},\ \left(b=0,\ a<0,\ A_1=4\sqrt{\dfrac{a^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots\right),\\ \psi_0(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{-a}{c}\sec^2[(-a)^{\frac12}\xi]\right]^{\frac12},&\left(|\xi|\le\dfrac{2k\pi}{\sqrt{-a}},k\in Z,\ a<0,\ c>0\right),\\ \sqrt{\dfrac{-a}{c}},&\left(|\xi|>\dfrac{2k\pi}{\sqrt{-a}},\ k\in Z,\ a<0,\ c>0\right).\end{cases}\end{cases}\tag{49}$$

将 (23), (28) 确定的无穷序列精确解, 代入 (41) 后得到改进的 (2+1) 维色散水波系统的双曲函数型无穷

序列紧孤立子解.

$$\begin{cases}\begin{cases}u_n(x,y,t)=\dfrac{q_t(y,t)}{2p(y)}-\dfrac{p(y)\psi_n'(\xi)}{\psi_n(\xi)}, \quad (\xi=p(y)x+q(y,t))\\ v_n(x,y,t)=(u_n)_y(x,y,t), \quad (b=0).\end{cases}\\ \psi_n^2(\xi)=\dfrac{-2\sqrt{3A_1}c\psi_{n-1}^2(\xi)\pm 6a[\psi_{n-1}'(\xi)]^2}{c\big[\sqrt{3A_1}\mp 9[\psi_{n-1}'(\xi)]^2\big]}, \quad \left(b=0,\ a>0,\ A_1=4\sqrt{\dfrac{a^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots\right),\\ \psi_0(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{-a}{c}\operatorname{sech}^2[\sqrt{a}\xi]\right]^{\frac{1}{2}}, & \left(|\xi|\le\dfrac{|\operatorname{arcsech}(0)|}{\sqrt{a}},\ a>0,\ c<0\right),\\ 0, & \left(|\xi|>\dfrac{|\operatorname{arcsech}(0)|}{\sqrt{a}},\ a>0,\ c<0\right).\end{cases}\end{cases} \tag{50}$$

## 5 结 论

文献 [1—22] 利用辅助方程法, 在 $u(x,t)=u(\xi),\xi=x+\omega t$ 或 $u(x,y,t)=u(\xi),\ \xi=p(y)x+q(y,t)$ 等变换下, 构造了非线性发展方程的有限多个新精确解. 这些精确解主要是光滑孤立子解和光滑类孤子解.

辅助方程法主要经过四个步骤来获得非线性发展方程的精确解. 前两个步骤中选择辅助方程、选择非线性发展方程的形式解和选择变量变换, 这里体现了辅助方程法的构造性. 后两个步骤中体现了辅助方程法的机械化性特点. 本文主要考虑辅助方程法的构造性, 选择了辅助方程 (3). 通过变换 (4) 和 Riccati 方程 (5) 的五种解和相应的 Bäcklund 变换, 可以获得非线性发展方程的无穷序列光滑孤立子精确解.

非线性发展方程的紧孤立子解和尖峰孤立子解是光滑孤立子解的特殊情况. 因此, 本文在 $b=0$ 时获得了辅助方程 (3) 的解 (19)—(23). 根据这些解的图形特点, 可以构造非线性发展方程的紧孤立子精确解. $b=0$ 和 $c=0$ 时, 辅助方程 (3) 的解 (24) 和 (26) 可以构造非线性发展方程的尖峰孤立子精确解.

文献 [17],[21],[23—26] 获得了改进的 (2+1) 维色散水波系统的有限多个光滑孤立子解, 并研究了解的一些性质以及相关问题. 而本文给出的辅助方程与非线性发展方程的两种形式解相结合的方法, 在理论上获得了改进的 (2+1) 维色散水波系统的无穷序列类孤子精确解. 比如: 通过 Bäcklund 变换 (46), (47) 可以获得改进的 (2+1) 维色散水波系统的无穷序列光滑类孤立子解. Bäcklund 变换 (48) 可以构造改进的 (2+1) 维色散水波系统的无穷序列紧孤立子解. Bäcklund 变换 (49), (50) 可以获得改进的 (2+1) 维色散水波系统的无穷序列尖峰类孤立子解. 这些解的物理意义有待于进一步研究.


[1] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[2] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940

[3] Chen Y, Yan Z Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 1

[4] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 137

[5] Li D S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 143

[6] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377

[7] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 497

[8] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 585

[9] Xie F D,Yuan Z T 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 39

[10] Zhen X D, Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 647

[11] LÜ Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 405

[12] Xie F D, Gao X S 2004 *Commun. Theor. Phys.*(Beijing) **41** 353

[13] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 1

[14] Ma S H, Fang J P, Zhu H P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4319 (in Chinese) [马松华, 方建平, 朱海平 2007 物理学报 **56** 4319]

[15] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华, 吴小红, 方建平, 郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]

[16] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569(in Chinese)[李德生, 张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[17] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984

[18] Wang Z,Li D S, Lu H F, Zhang H Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 2158

[19] Wang Z, Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2210

[20] Li D S, Zhang H Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1565(in Chinese) [李德生, 张鸿庆 2006 物理学报 **55** 1565]

[21] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377

[22] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617(in Chinese)[卢殿臣, 洪宝剑, 田立新 2006 物理学报 **55** 5617]

[23] Boiti M 1987 *Inverse Problems* **3** 37

[24] Durovsky V G, Konopelchenko E G 1994 *Phys.* A **27** 4619

[25] Radha R, Lakshmanan M 1997 *Math. Phys.* **38** 292

[26] Radha R, Lakshmanan M 1999 *Chaos, Solitons & Fractals* **10** 1821

# A method of constructing infinite sequence soliton-like solutions of nonlinear evolution equations*

Taogetusang[1)2)†] Bai Yu-Mei[1)]

1) ( *The College of Mathematical, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao* 028043*, China* )

2) ( *The College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot* 010022*, China* )

( Received 14 October 2011; revised manuscript received 8 December 2011 )

**Abstract**

The auxiliary equation method is used to construct the finite new exact solutions of nonlinear evolution equations. To search for infinite sequence soliton-like exact solutions of nonlinear evolution equations, characteristics of constructivity and mechanization of auxiliary equation method are analyzed and summarized. Therefore, the quasi-Bäcklund transformation between new solutions of a kind of auxiliary equation with Riccati equation is presented, then (2+1)-dimensional modified dispersive water-wave system is taken as an applicable example to find infinite sequence soliton-like new exact solutions by choosing two kinds of formal solutions of nonlinear evolution equations with the help of symbolic computation system Mathematica, where included are the infinite sequence smooth soliton-like solutions, compact soliton solutions and peak soliton-like solutions.

**Keywords:** auxiliary equation, nonlinear evolution equation, Bäcklund transformation, soliton-like new exact solution

**PACS:** 02.30.Ik,02.30.Jr

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10862003), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China(Grant No. NJZY12031) and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China(Grant No. 2010MS0111).

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn