

修正 KP 方程及其孤波解的稳定性*

张娟 周志刚 石玉仁[†] 杨红娟 段文山

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2011 年 8 月 9 日收到; 2011 年 11 月 20 日收到修改稿)

采用约化摄动法, 得到描述无磁场等离子体中离子声波传播的 modified Kadomtsev- Petviashvili(mKP) 方程, 构造有限差分格式对 mKP 方程的一类特殊孤立波解的稳定性进行数值研究. 数值结果表明: 在两种特殊情形的初始扰动下, 该孤立波均不稳定.

关键词: 离子声孤波, 约化摄动法, mKP 方程, 稳定性

PACS: 04.30.Nk, 02.90.+ p

1 引言

近年来, 非线性波的研究已成为等离子物理中重要问题之一, 对孤波的研究得到了越来越多的关注. 孤波的研究涉及尘埃声孤波、离子声孤波和尘埃离子声孤波等^[1-20]. 过去的几十年里, 在对孤波进行的过程中, 形成和发展出了一套成熟的非线性科学理论, 该理论被广泛地应用于流体力学、等离子体、光学、凝聚态物理以及其他科学研究领域. 在等离子体众多的非线性结构中, 离子声孤波代表了现代等离子体研究中关于非线性现象最重要的方面之一^[21-29]. 非线性波的传播一般由一组复杂的控制方程描述, 通常采用摄动法对原问题进行简化处理. 在小振幅假设下, 几乎每一个近似模型都可以被归结为一些非线性偏微分方程来描述, 这些方程有 Korteweg-de Vries(KdV) 方程、Zakharov-Kuznetsor(ZK) 方程、Nonlinear Schrödinger(NLS) 方程、Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程和修正的 KP 方程 (mKP) 等^[30-34]. 长波近似下, 无碰撞等离子体中离子声孤波的动力学行为可由 KP 方程来描述^[35]. 目前, 许多学者通过使用不同的摄动方法, 已经成功研究了不同等离子体系统中的离子声孤波^[36-38].

前述研究工作主要是针对一维体系的, 对于高

维系统中孤子的研究已经成为一个备受关注的课题. 在冷离子和热等温电子构成的等离子体中, 可用 KP 方程描述非线性离子声波的传播. 本文考虑由冷离子和非等温电子组成的等离子体中离子声波的传播, 采用 Schamel 提出的电子数密度的修正形式, 运用约化摄动法得到了 mKP 方程, 并构造有限差分格式对其一类特殊的孤立波解的稳定性进行了数值研究. 数值结果表明: 在两种特殊情形的初始扰动下, 该孤立波均不稳定.

2 mKP 方程的导出

考虑由冷离子和热电子组成的无磁场等离子体中离子声波的传播, 该系统可由连续性方程、动量方程和 Poisson 方程来描述. 忽略朗道阻尼和电子惯性的影响并考虑电子共振的情况, 其基本方程可归结为^[39,40]

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} + \nabla \cdot (n' \mathbf{v}') = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' = -\frac{e}{M} \nabla \phi', \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi' = e (n'_e - n') / \varepsilon_0, \quad (3)$$

$$n'_e = n_0 \left[\exp \left(\frac{e\phi'}{kT_{ef}} \right) - \frac{4}{3} b \left(\frac{e\phi'}{kT_{ef}} \right)^{3/2} \right], \quad (4)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11047010)、教育部科学技术研究重点项目基金 (批准号: 209128) 和西北师范大学自然科学基金 (批准号: NWNNU-KJCXGC-03-53) 资助的课题.

[†] E-mail: shiy@nwnu.edu.cn

其中 n' , n'_e , ϕ' , $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ 分别表示离子数密度、电子数密度、静电势、离子流的运动速度; $b = (1 - T_{\text{ef}}/T_{\text{et}})\pi^{-1/2}$, T_{ef} 是自由电子的温度, T_{et} 是陷俘电子的温度, 因此 b 表征了电子偏离等温状态的程度. 各物理量的无量纲化过程为 $n = n'/n_0$, $n_e = n'_e/n_0$, $v_x = v'_x/(kT_{\text{ef}}/M)^{1/2}$, $v_y = v'_y/(kT_{\text{ef}}/M)^{1/2}$, $v_z = v'_z/(kT_{\text{ef}}/M)^{1/2}$, $\phi = \phi'/(kT_{\text{ef}}/e)$, $t = t'/\omega_{\text{pi}}^{-1}$, $x = x'/\lambda_{\text{D}}$, $y = y'/\lambda_{\text{D}}$, $z = z'/\lambda_{\text{D}}$, n' , n'_e , v'_x , v'_y , v'_z , t' , x' , y' , z' , ϕ' 分别为相应量纲的量, n_0 为未受扰动的背景电子数密度, k 为 Boltzmann 常量, $\omega_{\text{pi}}^{-1} = (\varepsilon_0 M/n_0 e^2)^{1/2}$ 为离子声波的周期, $\lambda_{\text{D}} = (\varepsilon_0 kT_{\text{ef}}/n_0 e^2)^{1/2}$ 为德拜长度, M 为离子质量, ε_0 为真空电容率. 由此得无量纲化方程

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(nv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(nv_z)}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)v_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)v_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)v_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = e^\phi - \frac{4}{3}b\phi^{3/2} - n, \quad (9)$$

对弱非线性情况, 引入坐标变换

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon^{1/2}(x - t), & Y &= \varepsilon y, \\ Z &= \varepsilon z, & T &= \varepsilon^{2/3}t, \end{aligned} \quad (10)$$

并对各物理量做如下展开

$$\begin{bmatrix} n \\ \phi \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} n^{(1)} \\ \phi^{(1)} \\ v_x^{(1)} \end{bmatrix} + \varepsilon^3 \begin{bmatrix} n^{(2)} \\ \phi^{(2)} \\ v_x^{(2)} \end{bmatrix} + \dots, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \varepsilon^{5/2} \begin{bmatrix} v_y^{(1)} \\ v_z^{(1)} \end{bmatrix} + \varepsilon^3 \begin{bmatrix} v_y^{(2)} \\ v_z^{(2)} \end{bmatrix} + \dots, \quad (12)$$

其中, ε 为标识非线性强度的小参量. 将方程 (10)—(12) 代入方程 (5)—(9), 得小量 ε 在各方程中不同阶的项:

$$\varepsilon^2 : n^{(1)} = \phi^{(1)}, \quad (13)$$

$$\varepsilon^{5/2} : n_x^{(1)} = (v_x^{(1)})_X, \quad (v_x^{(1)})_X = (\phi^{(1)})_X, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : (\phi^{(1)})_X &= (v_z^{(1)})_X, & (v_y^{(1)})_X &= (\phi^{(1)})_Y, \\ n^{(2)} + \frac{4}{3}b\phi^{(1)3/2} &+ (\phi^{(1)})_{XX} &= \phi^{(2)}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{7/2} : (v_y^{(2)})_X &= 0, & (v_x^{(1)})_T &+ (\phi^{(2)})_X = (v_x^{(2)})_X, \\ (v_z^{(2)})_X &= 0, \\ (n^{(1)})_T &+ (v_x^{(2)})_X &+ (v_y^{(1)})_Y &+ (v_z^{(1)})_Z \\ &= (n^{(2)})_X, \end{aligned} \quad (16)$$

通过整理各方程中 ε 不同阶的项, 得如下方程

$$\begin{aligned} (2n_T^{(1)} + 2b\sqrt{n^{(1)}}n_X^{(1)} + n_{XX}^{(1)})_X \\ + n_{YY}^{(1)} + n_{ZZ}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

方程 (17) 即 mKP 方程.

引入下列变换

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= X, & \tilde{y} &= Y, & \tilde{z} &= Z, \\ t &= 8T, & u &= b^2 n^{(1)}/225, \end{aligned} \quad (18)$$

并略去“ \sim ”, 得以下 mKP 方程

$$(16u_t + 30u^{1/2}u_x + u_{xxx})_x + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (19)$$

上式表明在冷离子和热电子构成的无磁场等离子体中, 将存在由 mKP 方程所描述的非线性波. 方程 (19) 存在下式所表示的一类特殊的一维孤立波解

$$u = u_0(\xi) = \text{sech}^4 \xi, \quad (20)$$

其中 $\xi = x - t$. 下面研究该孤立波的稳定性.

3 稳定性分析

记 $u = u_0 + u'$, $|u'| \ll |u_0|$ 且设 u 满足 mKP 方程 (19), 略去高阶小量得到 u' 满足的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[16 \frac{\partial u'}{\partial t} + 30u_0^{1/2} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial^3 u'}{\partial x^3} \right] \\ + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

通过考察 u' 随时间的演变就可得知 u 的稳定性. 采用如下有限差分格式对 (21) 式进行数值求解

$$\begin{aligned} \frac{16}{\Delta x \cdot \Delta t} \left[(u'_{i,j,l}{}^{m+1} - u'_{i-1,j,l}{}^{m+1}) \right. \\ \left. - (u'_{i,j,l}{}^m - u'_{i-1,j,l}{}^m) \right] \\ + 60 \sec h^6(\xi) \tanh(\xi) \frac{u'_{i,j,l}{}^m - u'_{i-1,j,l}{}^m}{\Delta x} \\ + 30 \text{sech}^2(\xi) \frac{u'_{i+1,j,l}{}^m - 2u'_{i,j,l}{}^m + u'_{i-1,j,l}{}^m}{\Delta x^2} \\ + \frac{1}{\Delta x^4} \left[6u'_{i,j,l}{}^m - 4(u'_{i-1,j,l}{}^m + u'_{i+1,j,l}{}^m) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + u'_{i-2,j,l}{}^m + u'_{i+2,j,l}{}^m \Big] \\
 & + \frac{u'_{i,j+1,l}{}^m - 2u'_{i,j,l}{}^m + u'_{i,j-1,l}{}^m}{\Delta y^2} \\
 & + \frac{u'_{i,j,l+1}{}^m - 2u'_{i,j,l}{}^m + u'_{i,j,l-1}{}^m}{\Delta z^2} = 0, \quad (22)
 \end{aligned}$$

其中 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分别为 x, y 和 z 方向的空间步长, Δt 为时间步长, $u'_{i,j,l}{}^m$ 表示 m 层节点 (i, j, l) 处 u' 的值. 该格式为两层显式格式, 截断误差为 $O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2)$, 条件稳定. 计算第一层时, 采用下列格式启动

$$\begin{aligned}
 & \frac{16}{\Delta x \cdot \Delta t} \left[(u'_{i,j,l}{}^1 - u'_{i-1,j,l}{}^0) - (u'_{i,j,l}{}^0 - u'_{i-1,j,l}{}^0) \right] \\
 & + 60 \operatorname{sech}^6(\xi) \tanh(\xi) \frac{u'_{i,j,l}{}^0 - u'_{i-1,j,l}{}^0}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

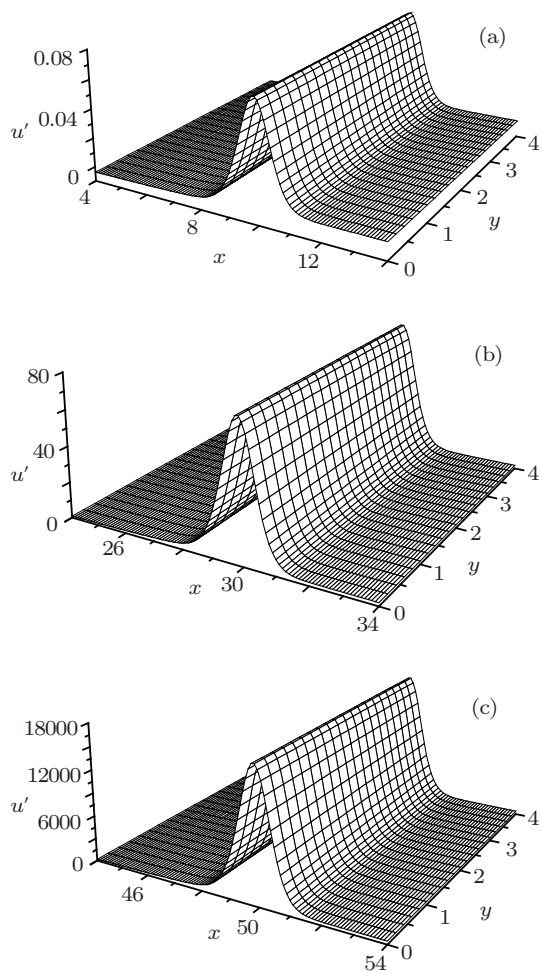


图1 无横向扰动情况下不同时刻扰动波的波形图 (a) $t = 10$; (b) $t = 30$; (c) $t = 50$

$$\begin{aligned}
 & + 30 \operatorname{sech}^2(\xi) \frac{u'_{i+1,j,l}{}^0 - 2u'_{i,j,l}{}^0 + u'_{i-1,j,l}{}^0}{\Delta x^2} \\
 & + \frac{1}{\Delta x^4} \left[6u'_{i,j,l}{}^0 - 4(u'_{i-1,j,l}{}^0 + u'_{i+1,j,l}{}^0) \right. \\
 & \left. + u'_{i-2,j,l}{}^0 + u'_{i+2,j,l}{}^0 \right] \\
 & + \frac{u'_{i,j+1,l}{}^0 - 2u'_{i,j,l}{}^0 + u'_{i,j-1,l}{}^0}{\Delta y^2} \\
 & + \frac{u'_{i,j,l+1}{}^0 - 2u'_{i,j,l}{}^0 + u'_{i,j,l-1}{}^0}{\Delta z^2} = 0. \quad (23)
 \end{aligned}$$

本文考察 mKP 方程孤波解 (20) 的稳定性, 所用方法也适合于考虑其他解的稳定性. 数值计算时步长取为 $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.04$; 在 x 方向采用绝热边界条件, y 方向和 z 方向采用周期性边界条件. 下面考虑两种情形下该孤波解的稳定性.

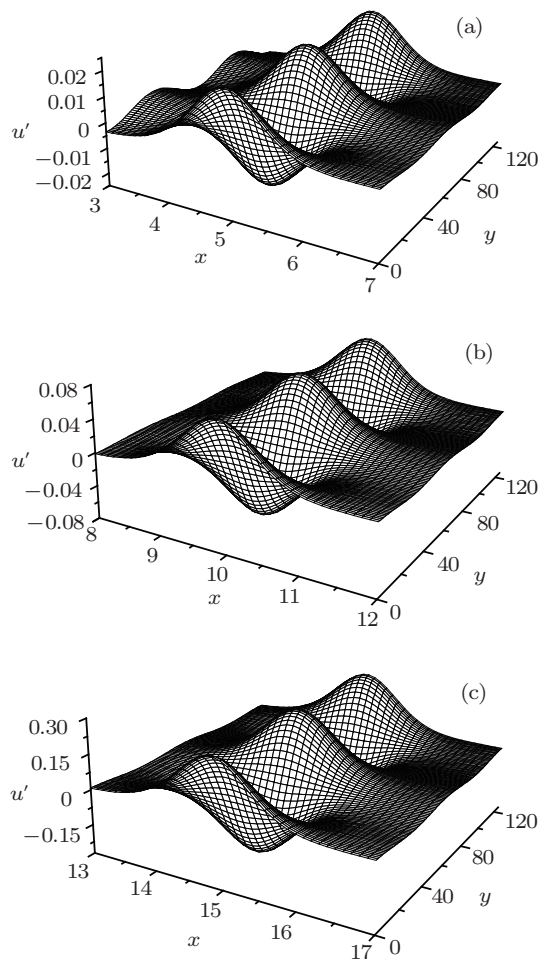


图2 存在横向扰动情况下不同时刻扰动波的波形图 (a) $t = 5$; (b) $t = 10$; (c) $t = 15$

不存在横向扰动时, 假设初始扰动为

$$u'(x, 0) = 0.01 \operatorname{sech}^4(x), \quad (24)$$

图 1 显示了 u' 在不同时刻的图像. 从图 1 可以看出, 随着时间的推移, 扰动波的振幅明显增加, 表明此时 mKP 方程所描述的孤立波是不稳定的.

存在横向扰动时, 假设初始扰动为

$$u'(x, 0) = 0.01 \operatorname{sech}^4(x)[\cos(k_2 y) + \cos(k_3 z)], \quad (25)$$

图 2 显示了 $k_2 = 0.1$ 时不同时刻 u' 的图像 (取 $z = 0$). 从图 2 可看出, 随着时间的推移, 扰动波的振幅在逐渐增加, 表明当存在形如 (25) 式的扰动时, 该孤立波仍不稳定.

上面虽然只考察了两种特殊情形的初始扰动

下孤立波的稳定性, 但从数值实验结果来看, 我们有理由猜测, mKP 方程的孤立波解 (20) 可能是不稳定的. 这样的波在实际的物理过程中存在的时间很短, 不利于观测.

4 结论

本文采用约化摄动法得到了描述无磁场等离子体中离子声波传播的 mKP 方程, 然后构造有限差分格式对该方程的一类特殊孤立波解的稳定性进行了数值研究. 数值结果表明: 在两种特殊情形的初始扰动下, 该孤立波均不稳定. 在冷离子和非等温电子组成的等离子体系统中, 是否存在稳定的孤立波, 是个值得研究的问题.

- [1] Rao N N, Shukla P K, Yu M Y 1990 *Planet. Space Sci.* **38** 543
- [2] Shukla P K, Silin V P 1992 *Phys. Scr.* **45** 508
- [3] Wei L, Wang Y N 2007 *Phys. Rev. B* **75** 193407
- [4] He B G, Xu C Z, Zhang J F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 511 (in Chinese) [何宝钢, 徐昌智, 张解放 2006 物理学报 **55** 511]
- [5] Hou L J, Wang Y N, Miskovic Z L 2004 *Phys. Rev. E* **70** 056406
- [6] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华, 吴小红, 方建平, 郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]
- [7] Xie B S, Du S C 2006 *Phys. Plasmas* **13** 074504
- [8] Xie B S, Li H B, Hu B B 2005 *Eur. Phys. Lett.* **69** 358
- [9] Xie B S, Wang N C 2002 *Phys. Scr.* **65** 444
- [10] Xie B S, Yu M Y 2000 *Phys. Plasmas* **7** 3137
- [11] Xie B S, He K F, Huang Z Q, 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 815
- [12] Xie B S, He K F, Huang Z Q 1999 *Phys. Plasmas* **6** 3808
- [13] Huang G X, Velarde M G, Makrov V A 2001 *Phys. Rev. A* **64** 013617
- [14] Duan W S 2004 *Chin. Phys.* **13** 598
- [15] Duan W S 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 319
- [16] Mao J J, Yang J R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5049 (in Chinese) [毛杰健, 杨建荣 2007 物理学报 **56** 5049]
- [17] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617 (in Chinese) [卢殿臣, 洪宝剑, 田立新 2006 物理学报 **55** 5617]
- [18] Han J N, Li S C, Yang X X, Duan W S 2008 *Eur. Phys. J. D* **47** 197
- [19] Mushtaq A, Khan S A 2007 *Phys. Plasmas* **14** 052307
- [20] Xiao D L, Ma J X, Li Y F, Xia Y H, Yu M Y 2006 *Phys. Plasmas* **13** 052308
- [21] Goerts C K 1998 *Rev. Geophys.* **27** 271
- [22] Havnes O, Melandse F, La Hoz C, Aslaksen T K, Hartquist T 1992 *Phys. Scr.* **45** 433
- [23] Benkadda S, Tsytovich V N, Verga A 1995 *Comments Plasmas Phys. Cont. Fus.* **16** 321
- [24] Verheest F 1996 *Space Sci. Rev.* **77** 267
- [25] Shukla P K, Silin V P, Yu M Y 1992 *Phys. Scr.* **45** 508
- [26] Barkar A, Meclino R L, D'Angelo N 1995 *Phys. Plasma* **2** 3563
- [27] Morfill G E, Thomos H 1996 *J. Vac. Sci. Technol. A* **14** 490
- [28] Merlino R L, Barkan A, Thompson C, D'Angelo N 1990 *Plant Space Sci.* **38** 1143
- [29] Duan W S 2001 *Phys. Plasmas* **8** 3583
- [30] Hong X R, Duan W S, Song J A, Shi Y R, Lü K P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2671 (in Chinese) [洪学仁, 段文山, 孙建安, 石玉仁, 吕克璞 2003 物理学报 **52** 2671]
- [31] Shi Y R, Zhang J, Yang H J, Duan W S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020402 (in Chinese) [石玉仁, 张娟, 杨红娟, 段文山 2011 物理学报 **60** 020402]
- [32] Shi Y R, Zhang J, Yang H J, Duan W S, Karl E Lonngren 2011 *Chin. Phys. B* **20** 015205
- [33] Das J, Bandyopadhyay A, Das K P 2007 *Phys. Plasmas* **14** 092403
- [34] Singh D K, Malik H K 2007 *Plasma Phys. Contr. F* **49** 1551
- [35] Han J N, Wang C L, Li S C, Duan W S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6068 (in Chinese) [韩久宁, 王苍龙, 栗生长, 段文山 2008 物理学报 **57** 6068]
- [36] Han J N, Yang X X, Tian D X, Duan W S 2008 *Phys. Lett. A* **372** 4817
- [37] Tian B, Gao Y T 2007 *Phys. Lett. A* **362** 283
- [38] Duan W S, Hong X R 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1337 (in Chinese) [段文山, 洪学仁 2003 物理学报 **52** 1337]
- [39] Ikezi H, Taylor R J, Baker D R 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 11
- [40] Schamel H 1973 *Phys. Plasmas* **9** 377

The stability of solitay wave solution to a modified Kadomtsev-Petviashvili equation*

Zhang Juan Zhou Zhi-Gang Shi Yu-Ren[†] Yang Hong-Juan Duan Wen-Shan

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 9 August 2011; revised manuscript received 20 November 2011)

Abstract

The reductive perturbation method is employed to describe the behaviour of ion-acoustic waves for plasmas in the absence of magnetic field, leading to a type of modified Kadomtsev-Petviashvili equation. The stability of a special type of solitary wave solutions for the modified Kadomtsev-Petviashvili equation is investigated with a finite difference scheme. The numerical results show that this solitary wave is unstable under two particular initial perturbations.

Keywords: ion-acoustic solitary waves, reductive perturbation method, modified Kadomtsev-Petviashvili equation, stability

PACS: 04.30.Nk, 02.90.+p

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11047010), the Key Project Foundation of the Education Ministry of China (Grant No. 209128), and the Natural Science Foundation of Northwest Normal University (Grant No. NWNNU-KJCXGC-03-53).

[†] E-mail: shiyu@nwnu.edu.cn