

非高斯噪声激励下 FitzHugh-Nagumo 神经元的随机共振*

张静静¹⁾²⁾ 靳艳飞^{1)2)†}

1) (飞行器动力学与控制教育部重点实验室, 北京 100081)

2) (北京理工大学宇航学院力学系, 北京 100081)

(2011 年 10 月 11 日收到; 2011 年 11 月 22 日收到修改稿)

研究了乘性非高斯噪声和加性高斯白噪声共同激励下 FitzHugh-Nagumo(FHN) 神经元系统的随机共振问题. 利用路径积分法和两态模型理论, 推导出系统信噪比的表达式. 研究结果表明: 系统参数在不同的取值条件下, FHN 神经元模型出现了随机共振和双重随机共振现象. 此外, 非高斯参数 q 在不同的取值条件下, 乘性噪声强度和加性噪声强度对信噪比的影响是不同的. 非高斯噪声的加入有利于增强 FHN 神经元系统的信号响应.

关键词: 非高斯噪声, FHN 神经元系统, 随机共振

PACS: 05.40.-a

1 引言

近年来, 噪声对神经系统的编码和信息传导的影响引起普遍关注^[1-15]. Hodgkin 和 Huxley 在上世纪 50 年代建立了著名的 Hodgkin-Huxley(H-H) 模型^[1]来研究神经元的放电特性和同步行为. FitzHugh 和 Nagumo 在保留 H-H 模型生物特性的基础上进行了简化, 提出了二维 FHN 神经元模型^[2]. Alarcon 等^[3]进一步对二维 FHN 神经元模型进行简化得到了一维 FHN 系统. 基于这些经典的神经元模型, 大量的科学研究发现神经元在信息的编码与传递过程中可以通过随机共振对噪声环境中的弱信号进行放大^[4-15].

在 FHN 神经元系统的研究中往往考虑环境振荡是高斯噪声的情况, 而已有实验研究证明^[16,17], 在某些神经系统、生物系统和物理系统中的噪声源倾向于非高斯分布. 由于非高斯噪声导致非马尔科夫过程, 且数学表达式复杂, 在数学上不易处理, 所以对其研究较少^[18-24]. Fuentes 和 Wio^[18,19]研究了非高斯噪声对双稳系统平均首次穿越时间和随机共振的影响. Wu 和 Zhu^[20]对非高斯噪声和高

斯白噪声共同激励下带有时滞项的对称双稳系统进行了随机共振研究. 赵燕等^[23]研究了非高斯噪声驱动下 FHN 神经元系统的平均首次穿越时间, 结果说明非高斯噪声有利于神经元信息的传递. 本文重点研究不相关的乘性非高斯噪声和加性高斯白噪声共同激励下的简化一维 FHN 神经元系统的随机共振, 讨论非高斯参数、噪声强度和噪声相关时间对系统随机共振的影响.

2 FHN 神经元系统的信噪比

考虑一个乘性非高斯噪声和加性高斯白噪声共同激励下简化一维 FHN 神经元系统, 在外加周期信号的情况下, 其朗之万方程为:

$$\frac{dv}{dt} = v(a-v)(v-1) - \frac{b}{\gamma}v + A \cos(\omega t) + v\eta(t) + \xi(t), \quad (1)$$

确定性方程的势函数为

$$U(v) = \frac{1}{4}v^4 - \frac{a+1}{3}v^3 + \frac{a+b/\gamma}{2}v^2. \quad (2)$$

其中, v 代表快变的膜电压变量, a 反映的是系统

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972032)、北京理工大学优秀青年教师资助计划持续支持项目 (批准号: 2010YS0101) 资助的课题.

† E-mail: jinyf@bit.edu.cn

的快变程度, b 为正常数, 反映的是慢变量对系统的影响, γ 是正常数. 这里需要指出的是, 因为相比原神经元系统省略了慢变量方程, 为了使得系统从一个定态过渡到另外一个定态情况, 因此简化模型中噪声 $\xi(t)$ 是必须的. 令 $U'(v) = 0$, 当参数满足 $b/\gamma < ((a-1)/2)^2$ 时, 势函数有两个稳定点: v_{s1} 代表细胞的神经元处于静息态, v_{s2} 表示细胞的神经元处于激发态; 和一个不稳定点 v_{un} , 表达式如下 [23]:

$$\begin{aligned} v_{s1} &= 0, \\ v_{s2} &= \frac{a+1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4b/\gamma}}{2}, \\ v_{un} &= \frac{a+1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4b/\gamma}}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

乘性噪声项 $\eta(t)$ 为非高斯噪声, 其统计性质如下:

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{d}{d\eta} V_q(\eta) + \frac{1}{\tau} \varepsilon(t), \quad (4)$$

其中, $V_q(\eta) = \frac{D}{\tau(q-1)} \ln \left[1 + \frac{\tau}{D} (q-1) \frac{\eta^2}{2} \right]$,

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta^2(t) \rangle &= \begin{cases} \frac{2D}{\tau(5-3q)}, & q \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right), \\ \infty, & q \in \left[\frac{5}{3}, 3\right), \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

这里 $\xi(t)$ 和 $\varepsilon(t)$ 为不相关的高斯白噪声, 其统计性质可以由它们的均值和方差来表示:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(t) \rangle &= \langle \xi(t) \rangle = 0, \\ \langle \varepsilon(t) \varepsilon(t') \rangle &= 2D\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t) \xi(t') \rangle &= 2Q\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (6)$$

其中, τ 为非高斯噪声 $\eta(t)$ 的相关时间, D 和 Q 分别为 $\varepsilon(t)$ 和 $\xi(t)$ 的噪声强度.

应用路径积分法 [18], 非高斯噪声可以写成

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} \eta(t) + \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} \varepsilon_1(t), \quad (7)$$

这里 $\varepsilon_1(t)$ 是高斯白噪声,

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(t) \rangle &= 0, \\ \langle \varepsilon_1(t) \varepsilon_1(t') \rangle &= 2D_{\text{eff}}\delta(t-t'). \end{aligned} \quad (8)$$

其中, τ_{eff} 和 D_{eff} 分别为有效噪声相关时间和有效噪声强度:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{eff}} &= \frac{2(2-q)}{5-3q} \tau, \\ D_{\text{eff}} &= \left(\frac{2(2-q)}{5-3q} \right)^2 D. \end{aligned} \quad (9)$$

参数 q 表示 $\eta(t)$ 偏离高斯分布的程度, 当 $q \rightarrow 1$ 时, $\eta(t)$ 可近似看成关联时间为 τ_{eff} , 噪声强度为 D_{eff} 的高斯色噪声.

应用统一色噪声近似 [25], 方程 (1) 可改写为

$$\dot{v} = \frac{1}{E(v)} \left[v(a-v)(v-1) - \frac{b}{\gamma} v + A \cos(\omega t) + v\varepsilon_1(t) + \xi(t) \right], \quad (10)$$

其中, $E(v) = 1 - \tau_{\text{eff}}[-2v^2 + (a+1)v - A \cos(\omega t)/v]$.

方程 (10) 还可以进一步写成下列形式

$$\frac{dv}{dt} = f(v) + g(v)\Gamma(t), \quad (11)$$

这里 $\Gamma(t)$ 是高斯白噪声, $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$, $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t-t')$,

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{v(a-v)(v-1) - bv/\gamma + A \cos(\omega t)}{E(v)}, \\ g(v) &= \frac{G(v)}{E(v)}, \\ G(v) &= (D_{\text{eff}}v^2 + Q)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

于是得到方程 (1) 的近似 FPK 方程表达式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(v, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial v} [A(v)P(v, t)] \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial v^2} [B(v)P(v, t)], \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} A(v) &= f(v) + g(v) \frac{dg(v)}{dv} \\ &= \frac{v(a-v)(v-1) - \frac{b}{\gamma} v + A \cos(\omega t)}{1 - \tau_{\text{eff}} \left[-2v^2 + (a+1)v - \frac{1}{v} A \cos(\omega t) \right]} \\ &\quad + \frac{1}{2} B'(v), \\ B(v) &= g^2(v) \\ &= \frac{D_{\text{eff}}v^2 + Q}{\left\{ 1 - \tau_{\text{eff}} \left[-2v^2 + (a+1)v - \frac{1}{v} A \cos(\omega t) \right] \right\}^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

由 (13) 和 (14) 式可得 FHN 神经元系统的近似定态概率密度函数 (SPD) 为

$$\rho_{\text{st}}(v) = \frac{N}{\sqrt{B(v)}} \exp \left[-\frac{\tilde{U}(v)}{D_{\text{eff}}} \right]. \quad (15)$$

这里 N 为归一化常数, 广义势函数 $\tilde{U}(v)$ 的表达式如下:

$$\tilde{U}(v) = -\int \frac{dv}{v^2 + \frac{Q}{D_{\text{eff}}}}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ v(a-v)(v-1) - \frac{b}{\gamma}v + A \cos(\omega t) \right\} \\
 & \times \left\{ 1 - \tau_{\text{eff}} \left[-2v^2 + (a+1)v - \frac{1}{v}A \cos(\omega t) \right] \right\} \\
 & = \frac{k_1}{2}v^4 - \frac{k_2}{3}v^3 + (k_3 - k_1h)v^2 + (k_2h - k_4)v \\
 & + (k_1h^2 - k_3h + k_5) \ln(D_{\text{eff}}v^2 + Q) \\
 & + \sqrt{h}(k_4 - k_2h) \arctan \left(\sqrt{\frac{D_{\text{eff}}}{Q}}v \right) \\
 & + \left[\left(\frac{k_6}{\sqrt{h}} + k_1\sqrt{h} \right) \arctan \left(\sqrt{\frac{D_{\text{eff}}}{Q}}v \right) - k_1v \right] A \cos(\omega t), \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \tau_{\text{eff}}, \\
 k_2 &= 3(a+1)\tau_{\text{eff}}, \\
 k_3 &= \frac{1}{2} [1 + (a+1)^2\tau_{\text{eff}} + 2(a+b/\gamma)\tau_{\text{eff}}], \\
 k_4 &= (a+1) [(a+b/\gamma)\tau_{\text{eff}} + 1], \\
 k_5 &= \frac{1}{2} (a+b/\gamma), \\
 k_6 &= (a+b/\gamma)\tau_{\text{eff}} - 1, \\
 h &= Q/D_{\text{eff}}.
 \end{aligned}$$

在绝热近似条件和时间尺度 $T \gg \omega_0^{-1}$ 时 (其中 ω_0 代表方程 (1) 仅受加性和乘性白噪声的特征转换率), 粒子由 x_{s1} 所在的势阱跃迁到 x_{s2} 所在的势阱的跃迁率以及相应的逆跃迁率 $W_{\pm}$ 的表达式为:

$$W_+ = \frac{|U''(v_{s1})U''(v_{\text{un}})|^{1/2}}{2\pi} \times \exp \left[-\frac{\tilde{U}(v_{\text{un}}) - \tilde{U}(v_{s1})}{D_{\text{eff}}} \right]$$

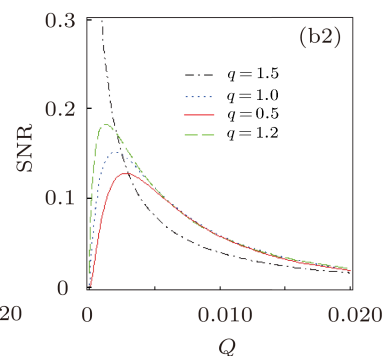
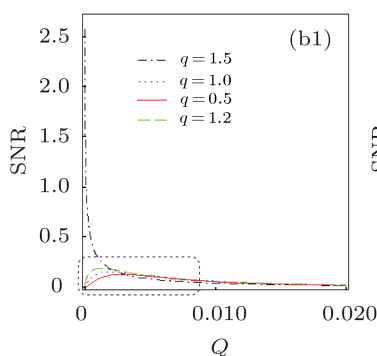
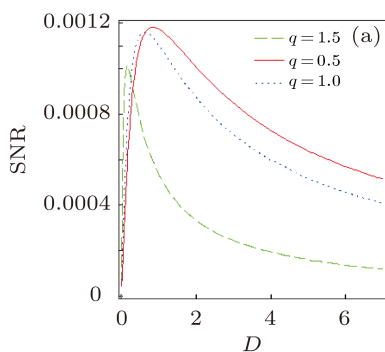


图1 信噪比随不同 q 变化的曲线 ($\tau = 0.1$), (a) $\text{SNR}-D$, $Q = 0.1$; (b) $\text{SNR}-Q$, $D = 0.1$.

$$\begin{aligned}
 & = \frac{1}{2\pi} \left| [3v_{s1}^2 - 2(a+1)v_{s1} + a + b/\gamma] \right. \\
 & \quad \times [3v_{\text{un}}^2 - 2(a+1)v_{\text{un}} + a + b/\gamma] \left. \right|^{1/2} \\
 & \quad \times \exp \left[-\frac{\tilde{U}(v_{\text{un}}) - \tilde{U}(v_{s1})}{D_{\text{eff}}} \right], \\
 W_- & = \frac{|U''(v_{s2})U''(v_{\text{un}})|^{1/2}}{2\pi} \\
 & \quad \times \exp \left[-\frac{\tilde{U}(v_{\text{un}}) - \tilde{U}(v_{s2})}{D_{\text{eff}}} \right] \\
 & = \frac{1}{2\pi} \left| [3v_{s2}^2 - 2(a+1)v_{s2} + a + b/\gamma] \right. \\
 & \quad \times [3v_{\text{un}}^2 - 2(a+1)v_{\text{un}} + a + b/\gamma] \left. \right|^{1/2} \\
 & \quad \times \exp \left[-\frac{\tilde{U}(v_{\text{un}}) - \tilde{U}(v_{s2})}{D_{\text{eff}}} \right], \quad (17)
 \end{aligned}$$

其中 $\tilde{U}(v)$ 和 $v_{s1}, v_{s2}, v_{\text{un}}$ 的定义同 (16) 和 (3) 式.

根据两态模型理论, 得到系统的信噪比表达式:

$$\text{SNR} = \frac{A^2\pi(\mu_1\beta_2 + \mu_2\beta_1)^2}{4\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{\beta} &= A \cos(\omega t), \quad \mu_1 = W_+|_{\bar{\beta}=0}, \\
 \mu_2 &= W_-|_{\bar{\beta}=0}, \quad \beta_1 = -\left. \frac{dW_+}{d\bar{\beta}} \right|_{\bar{\beta}=0}, \\
 \beta_2 &= -\left. \frac{dW_-}{d\bar{\beta}} \right|_{\bar{\beta}=0}.
 \end{aligned}$$

3 系统参数对信噪比的影响

取 $a = 0.5, b = 0.01, \gamma = 1$, 以下结论都是在这组参数下讨论得出.

图 1 给出了信噪比 SNR 作为乘性噪声强度 D 和加性噪声强度 Q 的函数随不同的非高斯参数 q 变化的曲线. 图 1(a) 中, SNR 曲线出现了明显的单峰结构, 系统观察到了随机共振现象, 并且共振峰的位置随着 q 值的增加而向左向下移动. 在图 1(b) 中, $q = 1.5$ 所对应的曲线呈现单调减小趋势. 这里

需要说明的是, 图 (b2) 是图 (b1) 中虚线框部分的放大图, 可以清楚的看到, q 值均小于 1.5 的三条曲线随着 Q 的增大先增加后减小, 曲线出现极大值, 表明系统有随机共振产生, SNR 随着 q 的增加而增加, 同时峰值的位置左移.

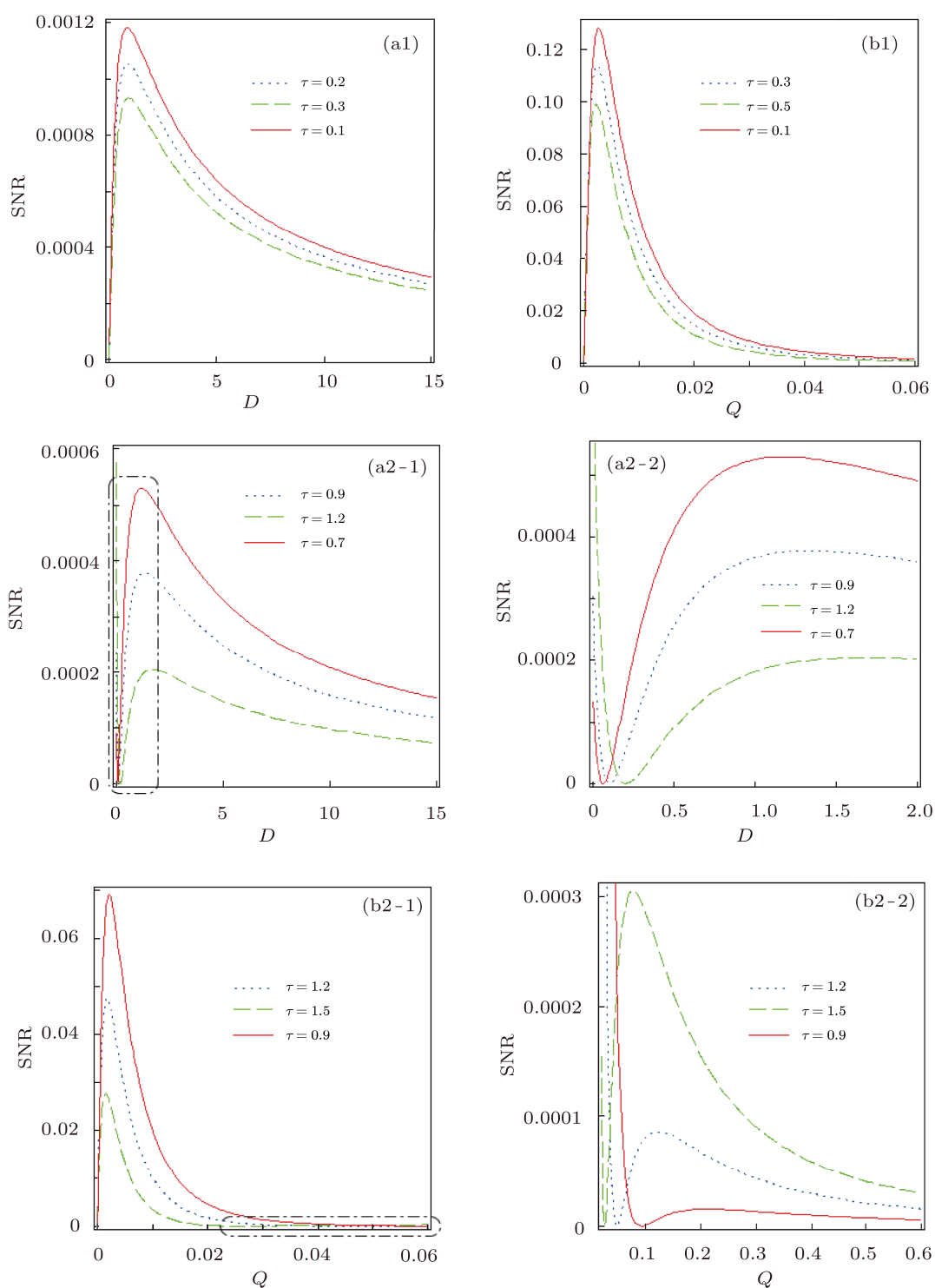


图 2 信噪比随不同 τ 变化的曲线 ($q = 0.5$), (a) SNR- D , $Q = 0.1$; (b) SNR- Q , $D = 0.1$

图 2 给出了 $q = 0.5$ 时信噪比 SNR 作为 D 和 Q 的函数随不同的自相关时间 τ 变化的曲线. 图 (a2-2) 和 (b2-2) 分别是图 (a2-1) 和 (b2-1) 虚线框中图形的放大图. 如图 (a1) 和 (b1) 所示, 当 τ 取值较小时, 曲线出现了明显的单峰, 即产生了随机共振, 并且共振峰的位置随着 τ 的增加而下移. 当 τ 取值较大时, 图 (a2) 中 SNR 首先随着 D 的增加, 逐渐减小达到一个极小值, 然后随着 D 的增加, 逐渐增大达到一个极大值, SNR 是 D 的非单调函数, 出现了随机共振. 故当 $D < 0.3$ 时, SNR 随 D 的增

大而受到抑制, 这时 FHN 神经元系统的放电行为将受到抑制; 当 $D > 0.3$ 时, SNR 随 D 的增大而出现一个共振峰, 说明此时细胞的信息过程被噪声放大和优化. 同时, 峰值随着 τ 的增加而减小. 在图 (b2) 中, 曲线出现了双峰结构, 这两个峰值分别处在 $[0.001—0.005]$ 和 $[0.05—0.25]$ 这两个区域中, 系统产生了双重随机共振. 并且信噪比曲线左边的峰值远远大于右边的峰值, 随着 τ 的增加, 左边的峰值越来越小同时右边的峰值越来越大.

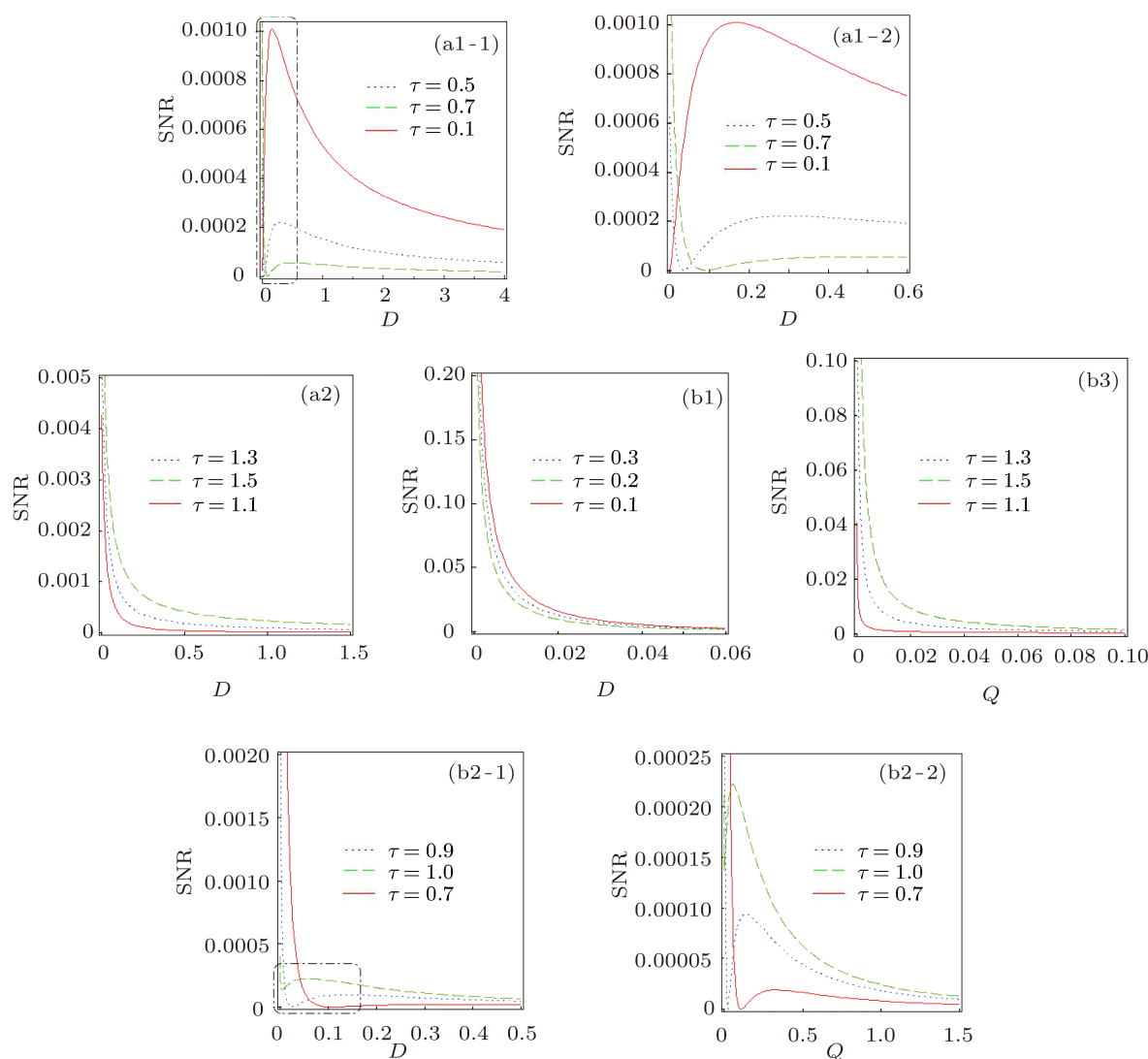


图 3 信噪比随不同 τ 变化的曲线 ($q = 1.5$) (a) SNR- D , $Q = 0.1$; (b) SNR- Q , $D = 0.1$

图 3 是 $q = 1.5$ 时信噪比 SNR 作为 D 和 Q 的函数随不同 τ 变化的曲线. 图 (a1-2) 和 (b2-2) 分别是图 (a1-1) 和 (b2-1) 虚线框中图形的放大图. 在图 (a1) 中, 当 $\tau = 0.1$ 时, 曲线上出现了单峰, 产生了随机共振. 但是随着 τ 的逐渐增加, SNR 随着 D

的增加出现了两个极值——一个极小值和一个极大值, 极小值部分形成了一个抑制平台, 呈现抑制现象; 而极大值部分对应随机共振. 同时共振峰的位置随着 τ 的增加向下移动. 如图 (b2) 所示, 当 τ 取值较大时, SNR- Q 曲线也出现了与图 (a1) 中类

似的现象, 并且共振峰的位置随着 τ 的增加而向左向上移动. 从图 (a2), (b1) 和 (b3) 中看出, 曲线均呈现单调减小趋势, 无随机共振现象产生. 说明不同 q 值对系统的随机共振有重要的影响. 同时在 (a2) 和 (b3) 中 SNR 随着 τ 的增加而增加, 在 (b1) 中却与此相反.

4 结论

本文主要考虑了不相关的乘性非高斯噪声和加性高斯白噪声共同作用下, 简化一维 FHN 神经

元系统的随机共振现象, 运用统一色噪声近似和两态模型理论, 在绝热近似条件下得到系统的信噪比表达式, 分析了非高斯参数、乘性噪声强度、加性噪声强度和噪声相关时间对信噪比的影响. 研究结果发现: 参数在不同的取值条件下, FHN 神经元系统出现随机共振和双重随机共振现象. 非高斯参数取不同值时, 加性和乘性噪声强度对信噪比的影响不同. 当自相关时间取较大或较小值时, 改变乘性噪声强度或加性噪声强度会对系统产生不一样的影响. 此外, 非高斯噪声的加入使得系统出现丰富多样的现象, 且有利于增强神经元系统的信号响应.

-
- [1] Hodgkin A L, Huxley A F 1952 *J. Gen. Physiol* **117** 500
 - [2] Fitzhugh R 1960 *J. Gen. Physiol* **43** 867
 - [3] Alarcon T, Perez-Madrod A, Rubi J M 1998 *Phys. Rev. E* **57** 4979
 - [4] Pikovsky A S, Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 775
 - [5] Nozaki D, Mar D J, Grigg P, Coliins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
 - [6] Zhang G J, Xu J X 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **23** 1439
 - [7] Wang Q Y, Shi X, Lu Q S 2008 *Synchronization Dynamics in the Coupled System of Neurons* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [王青云, 石霞, 陆启韶 2008 神经元耦合系统的同步动力学 (北京: 科学出版社)]
 - [8] Wang Q Y, Lu Q S, Chen G R, Feng Z S, Duan L X 2009 *Chaos, Solitons & Fractals* **39** 918
 - [9] Zhen B, Xu J 2010 *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 442
 - [10] Fan D J, Hong L 2010 *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 1873
 - [11] Wang C Q, Xu W, Zhang N M, Li H Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 749 (in Chinese) [王朝庆, 徐伟, 张娜敏, 李海泉 2008 物理学报 **57** 749]
 - [12] Liu Y, Xie Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2147 (in Chinese) [刘勇, 谢勇 2010 物理学报 **59** 2147]
 - [13] Yu S N, Jia Y 2000 *Journal of Central China Normal University* (Nat. Sci.) **34** 281
 - [14] Zeng C H, Zeng C P, Gong A L, Nie L R 2010 *Physica A* **389** 5117
 - [15] Yang J H, Liu X B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3727 (in Chinese) [杨建华, 刘先斌 2010 物理学报 **59** 3727]
 - [16] Bezrukov S M, Vodyanoy I 1997 *Nature* **385** 319
 - [17] Goychuk I, Hänggi P 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4272
 - [18] Fuentes M A, Toral R, Wio H S 2001 *Physica A* **295** 114
 - [19] Fuentes M A, Wio H S, Toral R 2002 *Physica A* **303** 91
 - [20] Wu D, Zhu S Q 2007 *Phys. Lett. A* **363** 202
 - [21] Gu R C, Xu Y, Zhang H Q, Sun Z K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110514 (in Chinese) [顾仁财, 许勇, 张慧清, 孙中奎 2011 物理学报 **60** 110514]
 - [22] Zhang J J, Jin Y F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120501 (in Chinese) [张静静, 靳艳飞 2011 物理学报 **60** 120501]
 - [23] Zhao Y, Xu W, Zou S C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1396 (in Chinese) [赵燕, 徐伟, 邹少存 2009 物理学报 **58** 1396]
 - [24] Xu C, Kang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 108701 (in Chinese) [徐超, 康艳梅 2011 物理学报 **60** 108701]
 - [25] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]

Stochastic resonance in FHN neural system driven by non-Gaussian noise*

Zhang Jing-Jing¹⁾²⁾ Jin Yan-Fei¹⁾²⁾†

1) (Key Laboratory of Dynamics and Control of Flight Vehicle Ministry of Education, Beijing 100081, China)

2) (Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 11 October 2011; revised manuscript received 22 November 2011)

Abstract

Stochastic resonance (SR) is studied in the FitzHugh-Nagumo (FHN) neural system subject to multiplicative non-Gaussian noise, additive Gaussian white noise and a periodic signal. Using the path integral approach and the two-state theory, the expression of the signal-to-noise ratio (SNR) is derived. The simulation results show that conventional SR and double SR occur in the FHN neural model under different values of system parameters. The effects of the additive and multiplicative noise intensities on SNR are different. Moreover, the addition of non-Gaussian noise is conducive to the enhancement of the response to the output signal of the FHN neural system.

Keywords: non-Gaussian noise, FHN neural system, stochastic resonance

PACS: 05.40.−a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972032), the Excellent Young Scholars Research Fund of Beijing Institute of Technology (Grant No. 2010YS0101).

† E-mail: jinyf@bit.edu.cn