

乘性二次噪声驱动的线性过阻尼振子的随机共振*

张路¹⁾²⁾ 钟苏川¹⁾ 彭皓¹⁾ 罗懋康^{1)†}

1) (四川大学数学学院, 成都 610065)

2) (电子信息控制重点实验室, 成都 610036)

(2011年8月14日收到; 2011年11月24日收到修改稿)

针对乘性二次噪声和加性周期调制噪声联合驱动的线性过阻尼振子, 利用随机平均法推导了系统响应的一阶、二阶稳态矩以及稳态响应振幅和方差的解析表达式. 理论分析和仿真实验均表明这类系统具有比传统的由线性噪声驱动的线性系统更丰富的动力学特性; 当二次噪声的系数满足一定条件时, 系统稳态响应的振幅及方差均存在广义随机共振现象.

关键词: 随机共振, 乘性噪声, 二次噪声, 周期调制噪声

PACS: 05.40.-a, 05.40.Ca, 02.50.-r

1 引言

随机共振的概念是由 Benzi 等^[1] 在上世纪 80 年代为解释第四季冰川问题而首次提出的, 此后的 30 年来随机共振的理论和实验研究引起了人们极大的兴趣. 围绕着不同的动力系统和噪声, 人们对各种随机共振现象进行了深入的研究^[2-18]. 传统的随机共振是指系统响应的信噪比随噪声的某些特征参数(如噪声的强度、相关率等)非单调变化的现象. 广义的随机共振概念是由 Gitterman 等提出的, 即系统响应的某些函数(如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等)随系统的某些特征参数(如激励振幅、频率或噪声的强度、相关率等)非单调变化的现象^[5].

对随机共振现象的早期研究主要集中在受周期信号和加性噪声激励的非线性模型^[2-4]. 随着研究的进一步深入, 有学者发现由乘性色噪声和周期信号联合驱动的线性系统^[5-11], 或者仅由乘性色噪声驱动的线性系统^[12,13]也会出现随机共振现象. 针对物理系统(如在光学或射电天文学的扩充器)中常见的周期信号调制噪声, 也有学者开始考虑由此类噪声驱动的线性系统, 例如, Guo 等^[14]发

现由乘性、加性和周期调制噪声共同作用的线性系统存在随机共振现象. Jin 等^[15]则讨论了在乘性色噪声和周期调制噪声的联合作用下, 线性阻尼振子的响应振幅和二阶稳态矩随噪声及系统参数所出现的广义随机共振现象. 可见随机共振是随机动力学系统中存在的一种较为普遍的现象, 因此也引起了人们的普遍关注和浓厚兴趣, 并已广泛应用于激光物理、生物物理、化学物理及工程信号处理等诸多领域. 对随机共振现象及其控制的研究不仅对物理学研究起着重要的作用, 而且对于工程实际应用也有特殊的价值.

不过, 以上文献考虑的加性或者乘性的驱动噪声主要是线性噪声(即色噪声的一次线性函数), 而对驱动噪声是色噪声的非线性函数的系统的随机共振现象的报告较少. 但事实上, 在实际的非线性物理系统中, 驱动噪声常以色噪声的非线性函数的形式出现. 比如, 在激光泵浦系统中外部源的扰动可以导致噪声的二次非线性^[16], Zhang 等^[17]便讨论了当乘性噪声是泵浦噪声的二次函数时单模激光系统对幅度调制信号的响应. 当乘性噪声为双态噪声的二次函数时, Hector 等^[18]发现线性系统稳态响应的振幅随噪声强度也是非单调变化的, 即存在广义随机共振现象.

* 国家自然科学基金(批准号: 10731050)和教育部长江学者和创新团队发展计划(批准号: IRTO0742)资助的课题.

† E-mail: makaluo@scu.edu.cn

本文针对由乘性二次噪声和周期调制噪声联合驱动的线性过阻尼系统, 推导了系统响应的一阶、二阶稳态矩以及系统稳态响应振幅和方差的解析表达式, 分析了这类系统所具有的丰富动力学特性. 发现系统响应的稳态振幅及方差均存在广义随机共振现象, 并且乘性二次噪声的系数对系统的随机共振现象有非常大的影响. 因此, 我们可以通过调节二次噪声的系数, 在一定范围内实现对线性过阻尼振子的随机共振的有效控制. 这也对随机共振现象在弱信号检测中的应用具有指导意义.

2 系统模型

本文考虑具有乘性二次噪声和周期调制噪声外激励的线性过阻尼系统, 它的随机微分方程可以写为:

$$\gamma \dot{x} = -\omega_0^2 x - (a_1 \xi(t) + a_2 \xi^2(t)) x + R\eta(t) \cos(\Omega t), \quad (1)$$

其中 $\gamma > 0$ 为阻尼系数, ω_0 为系统的固有频率, $a_1 \xi(t) + a_2 \xi^2(t)$ 是由于振子固有频率参数涨落引起的乘性噪声项, $R\eta(t) \cos(\Omega t)$ 是周期调制噪声项, R 可看做周期信号的振幅. 这里, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是具有零均值和非零相关函数的色噪声, 通常人们总是假设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 互不相关, 但在很多物理系统中, 如激光系统, 其内部的噪声之间总是存在某种关联性. 本文假设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 具有指数关联性, 满足如下的统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t) \xi(s) \rangle &= D_\xi \lambda_\xi \exp(-\lambda_\xi |t - s|), \\ \langle \eta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta(t) \eta(s) \rangle &= D_\eta \lambda_\eta \exp(-\lambda_\eta |t - s|), \\ \langle \xi(t) \eta(s) \rangle &= \kappa \lambda_{\xi\eta} \sqrt{D_\xi D_\eta} \exp(-\lambda_{\xi\eta} |t - s|), \end{aligned} \quad (2)$$

其中, D_ξ 和 D_η 为色噪声强度, λ_ξ 和 λ_η 为色噪声的相关率, κ 为噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的关联系数, $\lambda_{\xi\eta}$ 为关联率. 本文假设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 均为非对称的双态随机过程, 并且 $\xi(t)$ 在 $\{A_1, -B_1\}$ 中取值, $\eta(t)$ 在 $\{A_2, -B_2\}$ 取值, $A_i, B_i, i = 1, 2$ 均为正数. 不妨设 A_1 到 $-B_1$ 的转换概率为 p_1 , 逆转换概率为 q_1 ; A_2 到 $-B_2$ 的转换概率为 p_2 , 逆转换概率为 q_2 . $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的非对称性分别用 A_ξ 和 A_η 表示. 于是有:

$$\lambda_\xi = p_1 + q_1, \quad D_\xi \lambda_\xi = A_1 B_1,$$

$$\begin{aligned} A_\xi &= A_1 - B_1, \quad \lambda_\eta = p_2 + q_2, \\ D_\eta \lambda_\eta &= A_2 B_2, \quad A_\eta = A_2 - B_2. \end{aligned} \quad (3)$$

3 系统响应的一、二阶矩以及稳态响应振幅和方差的计算

3.1 系统响应的一阶稳态矩及响应振幅

对方程 (1) 两边取平均并利用关系式 (2), 可以得到系统响应的一阶矩满足的微分方程:

$$\frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} = -\frac{\omega_0^2}{\gamma} \langle x(t) \rangle - \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{\gamma} \langle \xi^k(t) x(t) \rangle, \quad (4)$$

将 (1) 式两边乘以 $\xi(t)$ 并取平均得到:

$$\begin{aligned} \left\langle \xi(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle &= -\frac{\omega_0^2}{\gamma} \langle \xi(t) x(t) \rangle \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{\gamma} \langle \xi^{k+1}(t) x(t) \rangle \\ &\quad + \frac{R}{\gamma} \langle \xi(t) \eta(t) \rangle \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

由 Shapiro-Loginov 公式^[19] 可得:

$$\frac{d \langle \xi(t) x(t) \rangle}{dt} = \left\langle \xi(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle - \lambda_\xi \langle \xi(t) x(t) \rangle, \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 并利用 (2) 式有:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \xi(t) x(t) \rangle}{dt} &= -\left(\frac{\omega_0^2}{\gamma} + \lambda_\xi \right) \langle \xi(t) x(t) \rangle \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{\gamma} \langle \xi^{k+1}(t) x(t) \rangle \\ &\quad + \frac{\kappa \lambda_{\xi\eta} R \sqrt{D_\xi D_\eta}}{\gamma} \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (7)$$

注意到 (4) 式和 (7) 式中都包含高阶的相关函数 $\langle \xi^k(t) x(t) \rangle$, $k = 2, 3$, 而由双态噪声的性质可知, 存在常数 $b_{\xi,k}, c_{\xi,k}, k = 2, 3$ 使得下面的降阶公式成立:

$$\begin{aligned} \langle \xi^2(t) x(t) \rangle &= b_{\xi,2} \langle \xi(t) x(t) \rangle + c_{\xi,2} \langle x(t) \rangle, \\ \langle \xi^3(t) x(t) \rangle &= b_{\xi,3} \langle \xi(t) x(t) \rangle + c_{\xi,3} \langle x(t) \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{aligned} b_{\xi,2} &= A_\xi, \\ c_{\xi,2} &= \lambda_\xi D_\xi, \\ b_{\xi,3} &= A_\xi^2 + \lambda_\xi D_\xi, \\ c_{\xi,3} &= \lambda_\xi D_\xi A_\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

将 (8) 式分别代入 (4) 式和 (7) 式并化简, 可以得到 $\langle x(t) \rangle$ 和 $\langle \xi(t)x(t) \rangle$ 所满足的线性微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} = d_1 \langle x(t) \rangle + d_2 \langle \xi(t)x(t) \rangle, \\ \frac{d \langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} = d_3 \langle x(t) \rangle + d_4 \langle \xi(t)x(t) \rangle \\ + d_5 \cos(\Omega t), \end{cases} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{\omega_0^2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k}, \\ d_2 &= -\frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k}, \\ d_3 &= -\frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k+1}, \\ d_4 &= -\frac{\omega_0^2}{\gamma} - \lambda_{\xi} - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k+1}, \\ d_5 &= \frac{\kappa \lambda_{\xi \eta} \sqrt{D_{\xi} D_{\eta}}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (11)$$

求解方程组 (10), 并令 $t \rightarrow \infty$, 可以得到系统的平均稳态响应的解析表达式为:

$$\langle x(t) \rangle_{st} = A_{st} \cos(\Omega t + \varphi). \quad (12)$$

其中 $A_{st} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ 和 $\varphi = -\arctan(f_2/f_1)$ 分别为系统稳态响应的振幅和相位, 系数 f_1 和 f_2 由下式确定:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{Rd_2d_5(d_2d_3 - d_1d_4) + Rd_2d_5\Omega^2}{(d_2d_3 - d_1d_4)^2 + (d_1^2 + d_4^2 + 2d_2d_3)\Omega^2 + \Omega^4}, \\ f_2 &= -\frac{Rd_2d_5(d_1 + d_4)\Omega}{(d_2d_3 - d_1d_4)^2 + (d_1^2 + d_4^2 + 2d_2d_3)\Omega^2 + \Omega^4}. \end{aligned} \quad (13)$$

3.2 系统响应的二阶稳态矩及方差

下面我们用类似的方法来求系统响应的平均稳态二阶矩. 首先, 方程 (1) 两边同时乘以 $2x$ 取平均, 并将双态噪声的降阶公式 (8) 式代入后化简可得:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle x^2(t) \rangle}{dt} &= -\frac{2}{\gamma} \left(\omega_0^2 + \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k} \right) \langle x^2(t) \rangle \\ &\quad - \frac{2}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k} \langle \xi(t)x^2(t) \rangle \\ &\quad + \frac{2R}{\gamma} \langle x(t)\eta(t) \rangle \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (14)$$

注意到 (14) 式中出现了新的耦合项 $\langle \xi(t)x^2(t) \rangle$ 和 $\langle x(t)\eta(t) \rangle$, 因此我们需要对其进行解耦. 方程 (1) 两边乘以 $2\xi(t)x(t)$ 取平均, 并将公式 (8) 代入后化简可得:

$$\begin{aligned} &\left\langle \xi(t) \frac{dx^2(t)}{dt} \right\rangle \\ &= -\frac{2}{\gamma} \left(\omega_0^2 + \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k+1} \right) \langle \xi(t)x^2(t) \rangle \\ &\quad - \frac{2}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k+1} \langle x^2(t) \rangle \\ &\quad + \frac{2R}{\gamma} \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (15)$$

同时将方程 (1) 两边乘以 $\eta(t)$ 取平均并将公式 (8) 代入后化简可得:

$$\begin{aligned} \left\langle \eta(t) \frac{dx}{dt} \right\rangle &= -\frac{1}{\gamma} \left(\omega_0^2 + \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k} \right) \langle x(t)\eta(t) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k} \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle \\ &\quad + \frac{D_{\eta}\lambda_{\eta}R}{\gamma} \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (16)$$

另外, 由 Shapiro-Loginov 公式有:

$$\begin{aligned} \left\langle \xi(t) \frac{dx^2(t)}{dt} \right\rangle &= \frac{d \langle \xi(t)x^2(t) \rangle}{dt} + \lambda_{\xi} \langle \xi(t)x^2(t) \rangle, \\ \left\langle \eta(t) \frac{dx}{dt} \right\rangle &= \frac{d \langle \eta(t)x(t) \rangle}{dt} + \lambda_{\eta} \langle \eta(t)x(t) \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

因此, 将 (17) 式分别代入 (15) 式和 (16) 式后化简可得:

$$\begin{aligned} &\frac{d \langle \xi(t)x^2(t) \rangle}{dt} \\ &= -\left(\frac{2\omega_0^2}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k+1} + \lambda_{\xi} \right) \langle \xi(t)x^2(t) \rangle \\ &\quad - \frac{2}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k+1} \langle x^2(t) \rangle \\ &\quad + \frac{2R}{\gamma} \cos(\Omega t) \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle, \\ &\frac{d \langle \eta(t)x(t) \rangle}{dt} \\ &= -\left(\frac{\omega_0^2}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k} + \lambda_{\eta} \right) \langle x(t)\eta(t) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k} \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

$$+ \frac{D_\eta \lambda_\eta R}{\gamma} \cos(\Omega t). \quad (19)$$

进一步,注意到(18)式和(19)式中均含有新的耦合项 $\langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle$, 因此我们需要建立它的微分方程. 对 $\langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle$ 求导得到:

$$\begin{aligned} & \frac{d \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle}{dt} \\ &= \left\langle \xi(t) \frac{d[\eta(t)x(t)]}{dt} \right\rangle + \left\langle \eta(t)x(t) \frac{d\xi(t)}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \xi(t) \frac{d[\eta(t)x(t)]}{dt} \right\rangle + \left\langle \eta(t) \frac{d[\xi(t)x(t)]}{dt} \right\rangle \\ & \quad - \left\langle \eta(t)\xi(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

(20)式的前两项可以通过对 $\langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle$ 运用两次 Shapiro-Loginov 公式得到:

$$\begin{aligned} \left\langle \xi(t) \frac{d[\eta(t)x(t)]}{dt} \right\rangle &= \frac{d \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle}{dt} \\ & \quad + \lambda_\xi \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle, \\ \left\langle \eta(t) \frac{d[\xi(t)x(t)]}{dt} \right\rangle &= \frac{d \langle \eta(t)\xi(t)x(t) \rangle}{dt} \\ & \quad + \lambda_\eta \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

为了化简(20)式的最后一项,我们将(1)式两端同时乘以 $\xi(t)\eta(t)$ 并取平均得到:

$$\begin{aligned} \left\langle \xi(t)\eta(t) \frac{dx}{dt} \right\rangle &= -\frac{\omega_0^2}{\gamma} \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle \\ & \quad - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k \langle \xi^{k+1}(t)\eta(t)x(t) \rangle \\ & \quad + \frac{R}{\gamma} \langle \eta^2(t)\xi(t) \rangle \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (22)$$

因为 $\eta(t)$ 也是双态噪声,所以我们可以推导出:

$$\begin{aligned} \langle \eta^2(t)\xi(t) \rangle &= A_\eta \langle \xi(t) \rangle + \lambda_\eta D_\eta \langle \eta(t)\xi(t) \rangle \\ &= \kappa \lambda_\eta \lambda_{\xi\eta} D_\eta \sqrt{D_\xi D_\eta}, \end{aligned} \quad (23)$$

将上式代入(22)式并利用双态噪声的降阶公式(8)后可以得到:

$$\begin{aligned} & \left\langle \xi(t)\eta(t) \frac{dx}{dt} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\gamma} \left(\omega_0^2 + \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k+1} \right) \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle \\ & \quad - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k+1} \cdot \langle x(t)\eta(t) \rangle \\ & \quad + \frac{R\kappa\lambda_\eta\lambda_{\xi\eta}D_\eta\sqrt{D_\xi D_\eta}}{\gamma} \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (24)$$

将式(21)和(24)同时代入(20)式得到:

$$\begin{aligned} & \frac{d \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle}{dt} \\ &= -\left(\frac{\omega_0^2}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k b_{\xi,k+1} + \lambda_\xi + \lambda_\eta \right) \\ & \quad \times \langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle \\ & \quad - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 a_k c_{\xi,k+1} \cdot \langle x(t)\eta(t) \rangle \\ & \quad + \frac{R\kappa\lambda_\eta\lambda_{\xi\eta}D_\eta\sqrt{D_\xi D_\eta}}{\gamma} \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (25)$$

于是(14),(18)和(19),(25)式构成了 $\langle x^2(t) \rangle$, $\langle \xi(t)x^2(t) \rangle$, $\langle \xi(t)\eta(t)x(t) \rangle$, $\langle \eta(t)x(t) \rangle$ 的线性微分方程组. 求解此方程组,令 $t \rightarrow \infty$ 并在一个周期内取平均可得 $\langle x^2(t) \rangle$ 的平均稳态表达式为:

$$\langle x^2(t) \rangle_{st} = \frac{R^2 [-(2d_4 + \lambda_\xi)g_1 + 2d_2g_2]}{2\gamma g_3 [d_1(2d_4 + \lambda_\xi) - 2d_2d_3]}, \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{D_\eta \lambda_\eta}{\gamma} \left[\Omega^2 (d_1 - \lambda_\eta) + (d_1 - \lambda_\eta)(d_4 - \lambda_\eta)^2 \right. \\ & \quad \left. - d_2 d_3 (d_4 - \lambda_\eta) \right], \\ g_2 &= -D_\eta \lambda_\eta \left[\frac{d_3}{\gamma} + (d_4 - \lambda_\eta) d_5 \right] \Omega^2 \\ & \quad + D_\eta \lambda_\eta [(d_1 - \lambda_\eta)(d_4 - \lambda_\eta) - d_2 d_3] \\ & \quad \times \left[\frac{d_3}{\gamma} - (d_1 - \lambda_\eta) d_5 \right], \\ g_3 &= \Omega^4 + [(d_1 - \lambda_\eta)^2 + (d_4 - \lambda_\eta)^2 + 2d_2 d_3] \Omega^2 \\ & \quad + [d_2 d_3 - (d_1 - \lambda_\eta)(d_4 - \lambda_\eta)]^2. \end{aligned} \quad (27)$$

因此由稳态方差的定义,方程(1)的系统响应的稳态方差可以写为:

$$\begin{aligned} \sigma_{st}^2 &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \left[\langle x^2(t) \rangle_{st} - (\langle x(t) \rangle_{st})^2 \right] dt \\ &= \langle x^2(t) \rangle_{st} - \frac{1}{2} (A_{st})^2. \end{aligned} \quad (28)$$

4 数值讨论

第3节中的(12)式和(28)式分别给出了系统的稳态响应振幅和方差的解析表达式. 下面我们来讨论噪声参数(包括噪声强度、相关率以及二次噪声的系数)对系统稳态响应的振幅 A_{st} 和方差 σ_{st}^2 的影响.

4.1 系统稳态响应振幅的随机共振现象

我们首先取定二次噪声函数的系数为 $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, 图 1(a) 绘制了系统稳态响应的幅度 A_{st} 作为乘性二次噪声强度 D_ξ 的函数, 随着不同的阻尼系数 γ 变化的曲线. 其他各参数的取值为 $\omega_0 = 0.1$, $R = 1$, $\Omega = 1$, $\lambda_{\xi\eta} = 0.2$, $\kappa = 0.9$, $\lambda_\xi = 0.5$, $A_\xi = 0.8$, $D_\eta = 0.5$, $A_\eta = 0.3$, $\lambda_\eta = 0.3$. 可以看到, A_{st} 随着噪声强度 D_ξ 的增大出现了一个共振峰, 即出现了广义的随机共振现象. 这是由于二次乘性噪声与周期调制噪声的协同作用, 使得噪声的能量向周期信号的能量转移, 从而增强了系统响应的幅值. 并且, 随着阻尼系数 γ 的增大, A_{st} 的共振峰变得逐渐平缓, 并且极值逐渐减小, 极值点的位置逐渐右移. 这说明系统的阻尼的增大使得系统响应的随机共振现象减弱, 符合物理实际.

接着, 我们取定乘性二次噪声的一次项系数 $a_1 = -0.5$, 图 1(b) 绘制了系统稳态响应的幅度 A_{st} 作为噪声相关率 λ_ξ 的函数, 随着不同的二次项系数 a_2 变化的曲线. 其他各参数的取值为 $\omega_0 = 0.2$, $\Omega = 0.5$, $\gamma = 0.3$, $R = 1$, $D_\xi = 0.6$, $A_\xi = 0.6$, $D_\eta = 0.5$, $\lambda_\eta = 0.3$, $A_\eta = 0.6$, $\lambda_{\xi\eta} = 0.1$, $\kappa = 0.4$. 当二次项系数 $a_2 = 0$ 时 (即乘性噪声为双态噪声的一次线性函数), A_{st} 随着双态噪声的相关率 λ_ξ 的增大而逐渐减小而没有出现随机共振现象, 而当 $a_2 > 0$ 时, A_{st} 随着 λ_ξ 的增大出现了一个共振峰. 随着 a_2 的增大, A_{st} 的共振峰变得越来越尖锐, 同时极值点的位置逐渐左移, 极值点的高度则不断增加. 这说明乘性噪声的二次项系数对随机共振现象起着非常关键的作用.

图 1(a) 和 (b) 表明, 在乘性二次噪声和周期调制噪声的影响下, 线性过阻尼振子的系统稳态响应的幅值随着二次噪声的强度和相关率的变化均出现了共振现象. 系统阻尼系数的减小会使共振峰的峰值增大. 乘性二次噪声的系数对共振现象也有非常大的影响, 不同的系数会使共振峰峰值增大或减小, 峰的位置提前或延后出现, 因此, 改变乘性二次噪声系数的值可以有效地控制系统的随机共振现象.

特别地, 当二次噪声系数满足一定关系时可有效加强系统响应的随机共振效应. 例如, 在图 1(c) 中我们绘制了对不同的周期信号振幅 R , 系统稳态响应的幅度 A_{st} 作为乘性二次噪声强度 D_ξ 的函数随着不同的二次噪声系数变化的曲线. 其它各参数

的取值为 $\omega_0 = 0.6$, $\Omega = 0.6$, $\lambda_{\xi\eta} = 0.2$, $\kappa = 0.4$, $\lambda_{\xi\eta} = 0.2$, $\kappa = 0.4$, $\lambda_\xi = 0.2$, $\lambda_\xi = 0.2$, $D_\eta = 0.2$, $A_\eta = 0.3$, $\lambda_\eta = 0.3$. 从图中可以看到, 当周期信号的幅值 R 分别为 1, 0.1, 0.01 时, 系统稳态响应的振幅随着噪声强度的增加均出现了随机共振现象. 当周期激励振幅最小 ($R = 0.01$) 时, 二次噪声系数分别取为 $a_1 = 1$, $a_2 = -3$, 系统稳态响应的振幅却具有最明显的随机共振现象. 这说明通过调节二次噪声系数可以使得即使是由微弱周期信号激励的系统的响应也有非常明显的随机共振现象, 从而有利于微弱信号的检测.

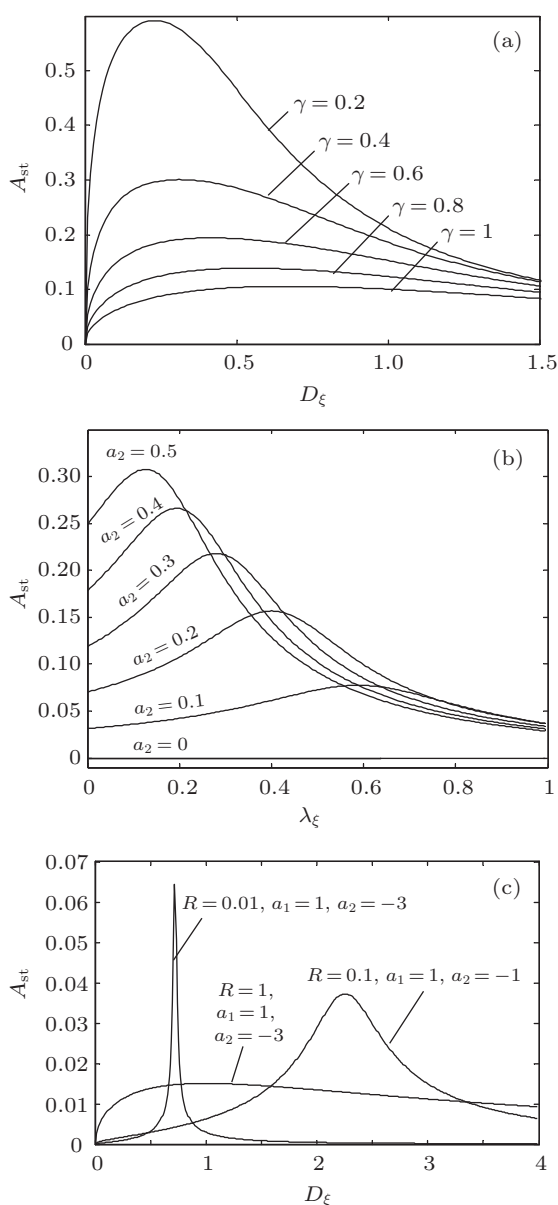


图 1 (a) A_{st} 作为 D_ξ 的函数随着 γ 变化的曲线; (b) A_{st} 作为 λ_ξ 的函数随着 a_2 变化的曲线; (c) A_{st} 作为 D_ξ 的函数随着周期激励的振幅及二次噪声系数变化的曲线

4.2 系统响应稳态方差的随机共振现象

下面我们讨论噪声参数对系统的稳态方差的影响. 这里我们先取定 $\omega_0 = 0.2, \Omega = 0.6, \gamma = 0.3, R = 1, \lambda_\xi = 0.2, A_\xi = 0.2, D_\eta = 0.2, \lambda_\eta = 0.2, A_\eta = 0.3, \lambda_{\xi\eta} = 0.2, \kappa = 0.2$. 当固定噪声函数的一次项系数 $a_1 = 1$ 并改变二次项系数 a_2 时, 我们发现系统响应的稳态方差随着噪声强度 D_ξ 的变化主要表现出三种随机共振现象: 单峰共振、单峰单谷共振和双峰共振. 当 $a_2 = -0.2$ 时, σ_{st}^2 所出现的单峰共振也就是传统的随机共振现象如图 2(a) 所示. 当 $a_2 = -0.26$ 时, σ_{st}^2 所出现的单峰单谷共振如图 2(b) 所示, 此时, 系统的稳态方差 σ_{st}^2 随噪声强度 D_ξ 的增大先达到一极大值, 即出现了随机共振现象, 而继续增大噪声强度, 系统稳态方差 σ_{st}^2 会出现一个极小值, 即出现了抑制现象.

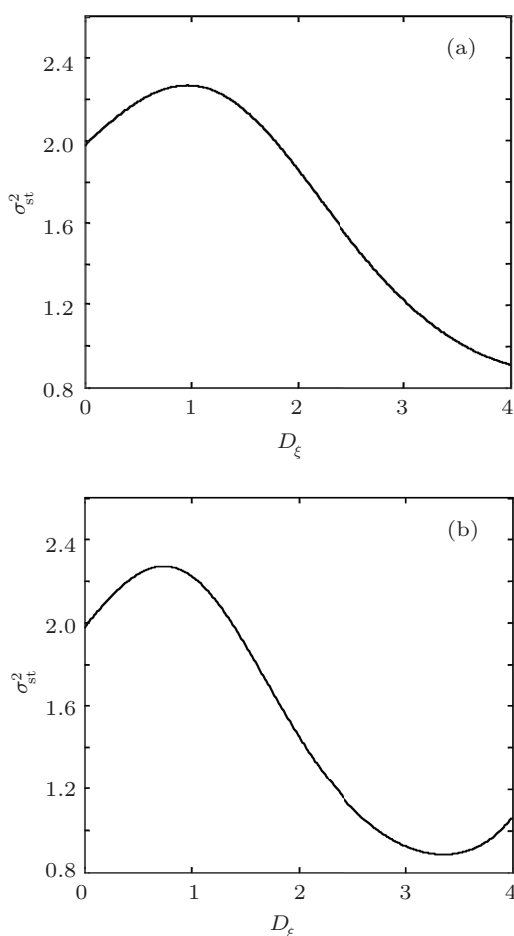


图 2 (a) σ_{st}^2 作为 D_ξ 的函数的单峰共振曲线; (b) σ_{st}^2 作为 D_ξ 的函数的单峰单谷共振曲线

当 $a_2 = -2$ 时, 我们发现 σ_{st}^2 随着 D_ξ 的增大出现了双峰共振现象. 现有文献对此类随机共振现

象报告较少, 特别是在线性系统中. 图 3 绘制了 σ_{st}^2 作为 D_ξ 的函数随二次噪声的二次项系数 a_2 变化的曲线. 可以看到, 当 a_2 继续减小时, 双峰极值点的位置均逐渐左移, 同时第一个共振峰逐渐增强而第二个共振峰逐渐减弱.

图 2(a), (b) 和图 3 表明, 线性过阻尼系统响应的稳态方差随着二次噪声的强度出现了多种随机共振现象, 包括单峰共振、单峰单谷共振和双峰共振, 其中的双峰共振现象在乘性色噪声仅为双态噪声的线性函数的情况下还未见报告. 类似地, 乘性二次噪声的系数对稳态方差共振峰的出现也有着非常明显的影响. 这也说明通过调控系统乘性噪声的系数可以调控系统的随机共振现象.

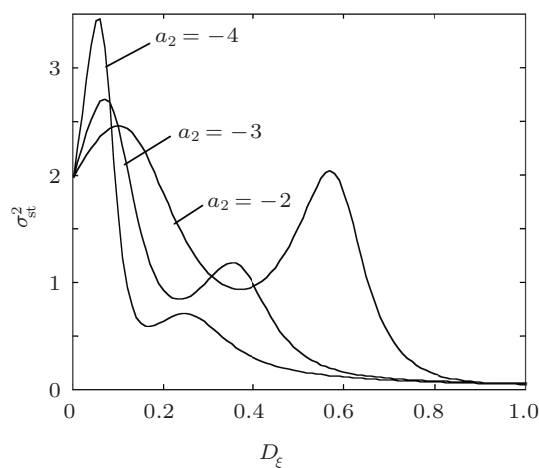


图 3 σ_{st}^2 作为 D_ξ 的函数随着 a_2 变化的曲线

5 结论

非线性噪声广泛存在于诸如非线性电路和激光系统等非线性的物理及工程系统中. 本文通过分析受乘性二次双态噪声和周期调制噪声联合驱动的线性过阻尼振子模型后发现, 由于乘性噪声、周期调制噪声以及系统的协同作用, 使得系统响应的稳态幅值和方差均出现了随机共振现象, 而乘性噪声的非线性系数则导致了随机共振现象的多样化. 通过调节二次噪声的系数, 我们可以在一定范围内实现对线性过阻尼振子随机共振的有效控制, 从而使得即使是微弱周期信号也能产生明显的随机共振现象, 该特性为微弱信号的检测方法开创了新的思路, 也拓宽了随机共振现象在物理学和工程中的应用范围.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453
- [2] Ya J, Si N Y, Jia R L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
- [3] Xiao Q L, Shi Q Z 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
- [4] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
- [5] Gitterman M 2005 *Physical A* **352** 309
- [6] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [7] Jing H L, Yin X H 2006 *Phys. Rev. E* **74** 051115
- [8] Ning L J, Xu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2889 (in Chinese) [宁丽娟, 徐伟 2009 物理学报 **58** 2889]
- [9] Li D S, Li J H 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 298
- [10] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
- [11] Katrin L, Romi M, Astrid R 2009 *Phys. Rev. E* **79** 051128
- [12] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [13] Zhou Y R, Guo F, Jiang S Q 2008 *Journal of University of Electronic Science and Technology of China* **37** 232 (in Chinese) [周玉荣, 郭锋, 蒋世奇 2008 电子科技大学学报 **37** 232]
- [14] Guo F, Zhou Y R, Jiang S Q, Gu T X 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 1705
- [15] Jin Y F, Xu W, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 (in Chinese) [靳艳飞, 徐伟, 李伟 2005 **54** 2562]
- [16] Murray S I, Marlan O S, Willis E J 1974 *Laser Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley) p197
- [17] Zhang L Y, Cao Li, Wu D J 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1310
- [18] Hector C, Fernando M, Enrique T 2006 *Phys. Rev. E* **74** 022102
- [19] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Physical A* **91** 563

Stochastic resonance in an over-damped linear oscillator driven by multiplicative quadratic noise*

Zhang Lu¹⁾²⁾ Zhong Su-Chuan¹⁾ Peng Hao¹⁾ Luo Mao-Kang^{1)†}

1) (College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

2) (Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China)

(Received 14 August 2011; revised manuscript received 24 November 2011)

Abstract

For an over-damped linear oscillator driven by multiplicative quadratic noise and periodic modulated noise, the exact analytical expressions of the first two moments, the amplitude and variance of the system steady-state response are obtained. We find that this system has richer dynamic behaviors than the traditional linear systems driven by linear noise; when the coefficients of the quadratic noise satisfy certain conditions, both the amplitude and the variance of the system steady-state response present stochastic resonance.

Keywords: stochastic resonance, multiplicative noise, quadratic noise, periodic modulated noise

PACS: 05.40.-a, 05.40.Ca, 02.50.-r

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10731050), and the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University of Ministry of Education of China (Grant No. IRT00742).

† E-mail: makaluo@scu.edu.cn