

耦合复金兹堡 - 朗道 (Ginzburg-Landau) 方程中的模螺旋波

高继华 谢伟苗 高加振 杨海朋 戈早川[†]

(深圳大学材料学院, 深圳市特种功能材料重点实验室, 深圳 518060)

(2011年11月19日收到; 2011年12月12日收到修改稿)

以双层耦合复金兹堡 - 朗道 (Ginzburg-Landau) 方程系统为时空模型, 研究了其中的模螺旋波, 讨论了这种特殊波动现象的稳定条件和相关影响因素. 模螺旋波与该类时空系统中常见的相螺旋波相比, 其中心不存在缺陷点, 同时仅在其变量的振幅部分 (而非相位部分) 表现为螺旋结构. 本文通过数值方法研究了耦合复金兹堡 - 朗道方程中产生模螺旋波所需要的初始和参数条件. 研究表明, 当双层耦合系统的初始斑图之间的差距较大时, 才能够产生模螺旋波; 同时观察到系统在参数不匹配的条件下会发生相螺旋波向模螺旋波的转变. 通过对同步函数的计算, 发现该转变过程具有非连续性.

关键词: 螺旋波, 复金兹堡 - 朗道方程, 模螺旋波

PACS: 05.45.-a, 82.40.Ck, 47.54.-r

1 引言

螺旋波是一种存在于二维时空系统中的周期性斑图, 常见于化学反应系统^[1]、光学系统^[2]、流体系统^[3]以及生物系统^[4]中. 由于其具有广泛的应用潜力, 已经受到了众多研究群体的重视和研究^[5-14]. 最近, 有文献报道了双层耦合复金兹堡 - 朗道方程 (complex Ginzburg-Landau equation, CGLE) 系统中出现的一类新颖模螺旋波^[15]. 这种螺旋波与二维 CGLE 系统中常见的相螺旋波有很大区别. 首先, 相螺旋波的中心为缺陷点 (defect point), 在该位置系统复变量的振幅为零; 而模螺旋波的中心不存在单独的缺陷点, 在双层耦合系统中模螺旋波与对应的相螺旋波共用同一个缺陷点. 其次, 相螺旋波中系统变量的相位部分表现为螺旋波结构, 而在模螺旋波中相位部分具有非对称性, 而仅在系统变量的振幅部分表现为螺旋波结构. 最后, 相螺旋波可以在大量的二维时空系统中单独自发存在, 而模螺旋波必须在相螺旋波的驱动下才能够稳定存在, 目前仅发现存在于二维非对称耦合系统中. 由于模螺旋波具有以上新颖性质, 对

其进一步进行研究很有必要. 同时, 我们还发现, 这种振幅波动行为不仅仅出现于二维系统中, 边界驱动下的一维 CGLE 中, 也可以观察到类似的行为, 边界处的波源可以在特定条件下产生振幅波动现象^[16]. 这说明, 系统变量的振幅波动现象具有普遍性, 不仅仅存在于二维时空系统中, 有可能是自然界中的一种普遍现象. 耦合二维时空系统与单层系统相比, 可以更精确地描述反应扩散系统的内在机理, 同时可以刻画不同模式之间的竞争行为, 是由二维系统向三维时空系统的过渡模型, 从而更接近于实际系统, 具有较高的应用研究价值, 因此双层耦合系统中螺旋波的相互作用已成为理论和实验研究的一个热点^[17-22]. 此外, CGLE (complex Ginzburg-Landau Equation, CGLE) 是一个重要的非线性偏微分方程, 具有广泛意义和丰富内涵, 在流体动力学、激光物理、化学动力学等自然科学中占有重要地位. CGLE 系统目前已是研究时空振荡介质的一个重要模型, 它描述了反应扩散系统在 Hopf 分岔点附近的普适行为, 具有极为丰富的动力学行为^[23-28]. 本文将以双层耦合 CGLE 系统为模型, 讨论不同初始条件对模螺旋波稳定性的影响, 并试图发现系统在参数不匹配的条件下产生模

[†] E-mail: gezaochuan@126.com

螺旋波的规律.

2 耦合 CGLE 中的模螺旋波

考虑以下双层耦合 CGLE 模型^[15,29,30],

$$\begin{aligned} \partial_t A_{1,2} = & A_{1,2} + (1 + i\alpha_i)\nabla^2 A_{1,2} \\ & - (1 + i\beta_i)|A_{1,2}|^2 A_{1,2} \\ & + \varepsilon_{1,2}(A_{2,1} - A_{1,2}), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $A_{1,2}$ 是系统变量, 为复数. $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ 为系统参数, 都是实数. $\varepsilon_{1,2}$ 表示双层系统中两个子系统之间的反馈耦合强度. 二维空间时, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. 考虑系统限制在一个 $L \times L$ 的正方形空间内, 其中 L 为系统尺寸, 并采用无流边界条件 (no flux boundary condition). 不失一般性, 在本文的研究中考虑 $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 \neq 0$ (如无特别声明, 本文中的参数和变量均取任意单位, 下同), 则耦合系统 (1) 可以看成是由驱动系统 1 和响应系统 2 组成. 同时, 为了方便对比初始斑图的差别, 在以下的研究中驱动和响应系统的初始斑图均采用单个螺旋波. 在满足一定的参数条件时, 响应系统中可以产生模螺旋波,

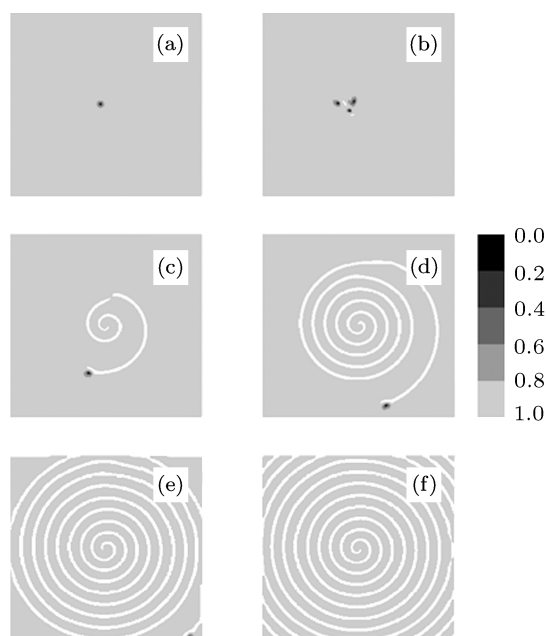


图1 模螺旋波的产生过程. 系统参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = -1.34$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.35$, 耦合强度 $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0.08$, 系统尺寸 $L = 256$. 图中所示为响应系统的演化情况, 变量的振幅部分 (而非相位部分) 产生了螺旋结构. 系统时间分别为 (a) $t = 0$; (b) $t = 100$; (c) $t = 200$; (d) $t = 300$; (e) $t = 400$; (f) $t = 500$

如图 1 所示. 从图可以看出, 随着时间的演化, 响

应系统中单个螺旋波的缺陷点被驱离中心位置, 运动至边界而消失, 系统空间呈现一个完整的模螺旋波. 这种模螺旋波与 CGLE 系统中常见的相螺旋波相比, 其中心不存在拓扑缺陷, 同时其变量振幅部分 (而非相位部分) 表现为螺旋结构^[15].

3 初始条件的影响

为了更清楚地展示双层耦合系统的初始斑图对模螺旋波稳定性的影响作用, 本文采用缺陷点在系统中心位置的单个螺旋波作为驱动系统初始条件, 缺陷点偏离中心位置的单个螺旋波作为响应系统初始条件, 并对耦合系统方程 (1) 进行数值模拟. 首先设定两个子系统参数相同, 为 $\alpha_1 = \alpha_2 = -1.34, \beta_1 = \beta_2 = 0.35$, 而耦合强度不同, 分别为 $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0.08$. 可以观察到当驱动和响应系统的初始斑图的中心不在同一位置时, 响应系统变量的振幅部分发生振荡现象, 产生了稳定的模螺旋波, 如图 2 所示. 其中驱动系统用虚线表示, 响应系统用实线表示. 左栏表示系统变量的实部 $\text{Re}(A_{1,2})$, 右栏表示相应的模 $|A_{1,2}|$.

进一步的数值模拟实验表明, 在系统参数不变的前提下, 当耦合系统初始斑图的中心较为接近时, 驱动和响应系统会达到完全同步, 这说明初始条件对于模螺旋波的产生具有重要性. 接下来, 我们将驱动系统的初始斑图固定为一个处于系统空间中心的螺旋波, 调整响应系统的初始螺旋波位置, 并将两个螺旋波中心之间的距离 (下文中称为螺旋波距离) 作为控制参数, 来研究模螺旋波的稳定性. 从图 3(a) 和 3(b) 的数值实验结果可以看出: 螺旋波距离较小时, 响应系统演化为与驱动系统完全相同的相螺旋波; 当螺旋波距离较大时, 响应系统空间中出现了模螺旋波. 为了定量观察这种现象, 本文引入下面的 δ 函数来表征双层耦合系统的同步程度,

$$\delta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{L^2} \int_0^T dt \int_0^L dx \int_0^L dy |A_2 - A_1|. \quad (2)$$

从该函数的定义式可以看出, 当驱动系统 A_1 与响应系统 A_2 达到同步时, δ 函数的值接近于零; 而当双层系统未达到同步时, δ 函数保持较大的数值. 图 3(c) 画出了 δ 函数随螺旋波距离 d 的变化情况. 我们发现, 随着螺旋波距离的增加, 响应系统的演化结果从相螺旋波变为模螺旋波. 由图 3(c) 我们还

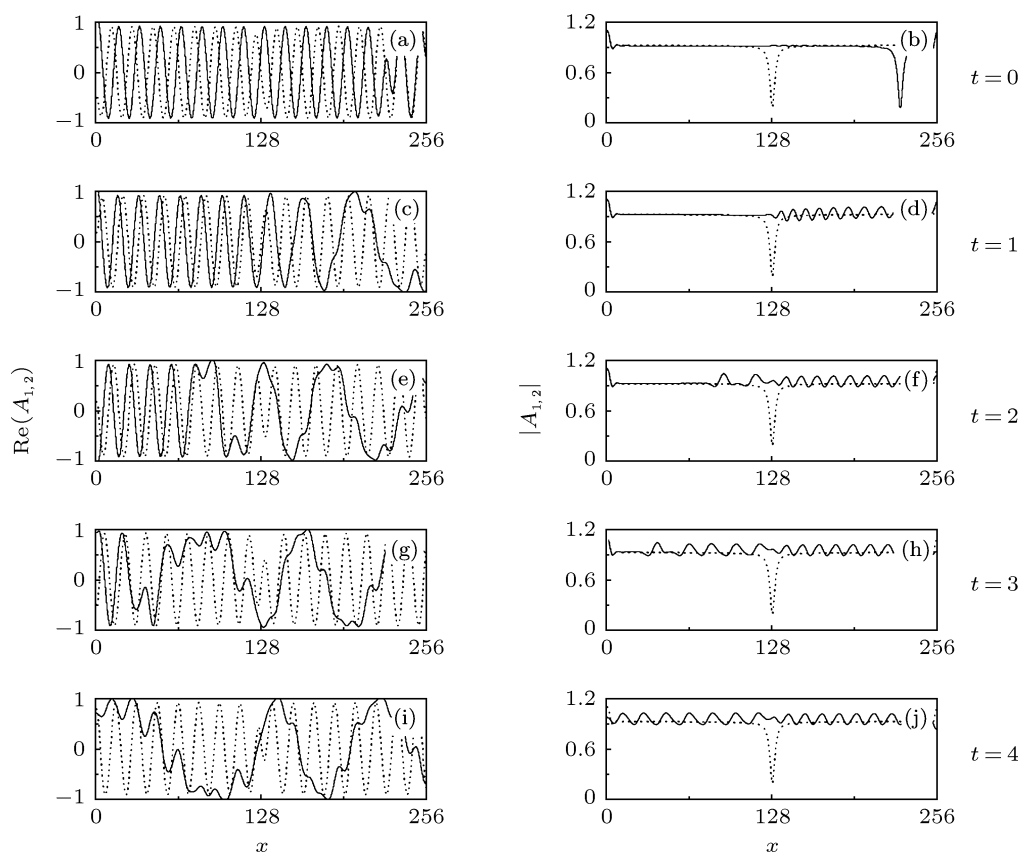


图 2 驱动和响应系统变量的实部和振幅随时间的演化系统参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = -1.34$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.35$, 耦合强度 $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.08$. 虚线表示驱动系统, 实线表示响应系统

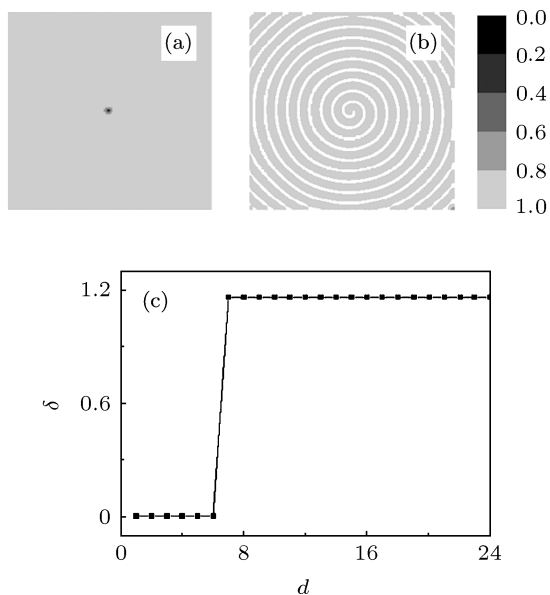


图 3 螺旋波距离 d 对耦合系统演化结果的影响 系统参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = -1.34$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.35$, 耦合强度 $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.08$. 响应系统 $|A_2|$ 的演化结果 (a) $d = 6$, (b) $d = 8$, (c) δ 函数随螺旋波距离 d 的变化情况

观察到, 当初始条件控制参数跨过临界值 $d_c \approx 7$ 时, δ 函数的突变行为说明在该处发生了相变现象,

表明相螺旋波和模螺旋波的行为具有较大的差异性.

4 系统参数的影响

模螺旋波的产生与稳定不但与双层耦合系统的初始条件有关, 而且还会受到系统参数的影响. 不失一般性, 在下面的研究中驱动系统参数固定为 $\alpha_1 = -1.34$, $\beta_1 = 0.35$, 我们通过调整响应系统参数来观察耦合系统斑图的演化情况. 在前一节的研究中, 我们发现在驱动与响应系统具有相同参数的条件下, 只有当双层耦合系统的初始斑图有较大的差别时 (即螺旋波距离 $d \geq d_c \approx 7$), 响应系统才有可能出现模螺旋波. 这给我们一个启发: 是否只有当驱动系统与响应系统有一定差异时, 才可能出现模螺旋波? 在本节的研究中, 我们选择了螺旋波距离 $d = 0$ 作为控制参数用来消除初始条件的差异性, 仅通过引入不同的响应系统参数来观察模螺旋波的稳定性来验证我们的猜想. 在如图 4(a) 所示的情形中, 响应系统参数 $\alpha_2 = -1.10$, 与驱动系统的相应参数 $\alpha_1 = -1.34$ 相比, 差别较小, 则相应系

统的最终演化结果是相螺旋波. 而在如图 4(b) 所示的情形中, 响应系统参数 $\alpha_2 = -1.02$, 与驱动系统的 $\alpha_1 = -1.34$ 相比差别较大, 则响应系统的最终演化结果是模螺旋波. 这个实验结果说明我们的猜想是正确的: 即使双层耦合系统的初始斑图相同, 当系统参数存在差别时, 在响应系统中也可以观察到模螺旋波. 本文接着计算了双层耦合系统的同步函数 δ 随系统参数 α_2 的变化情况, 如图 4(c) 所示. 由图可以看出, 当 $\alpha_2 = \alpha_1$ 时同步函数 $\delta = 0$, 说明此时驱动系统和响应系统达到了完全同步, 两个系统均表现为相螺旋波. 而当 $\alpha_2 \neq \alpha_1$ 时, 同步函数 δ 从零开始逐渐增大, 说明双层耦合斑图的同步性质受到了影响, 但是在参数差别不大的条件下响应系统仍然表现为相螺旋波. 值得注意的是, 当 $\alpha_2 \approx -1.02$ 时, 同步函数 δ 的值发生了跃变, 响应系统的斑图从相螺旋波突然转变为模螺旋波. 同步函数变化的非连续性, 说明在参数 α_2 的临界位置系统发生了相变现象.

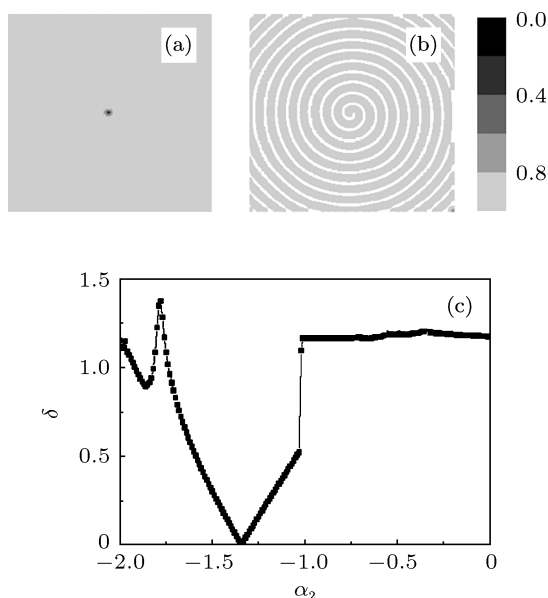


图 4 系统参数对耦合系统演化结果的影响 驱动系统参数 $\alpha_1 = -1.34$, $\beta_1 = 0.35$, 响应系统参数 $\beta_2 = 0.35$, 耦合强度为 $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.08$. 响应系统的振幅 (a) $\alpha_2 = -1.10$; (b) $\alpha_2 = -1.02$; (c) δ 函数随参数 α_2 的变化情况

为了确认这种临界突变现象的普遍性, 我们考虑在不同的系统参数条件下对同步函数 δ 进行计算. 图 5(a) 中画出了驱动系统的参数分别为 $\alpha_1 = -1.04, -1.09, -1.34$ 以及 -1.44 时, 同步函数 δ 随 α_2 的变化情况. 从图中可以看出, 当驱动系统参数不同时, 响应系统参数的完全同步位置 (即图中出现 $\delta = 0$ 的位置) 和出现模螺旋波的临界值位置同时发生了变化, 但是同步函数 δ 随 α_2

的变化趋势没有发生变化, 表现为不同驱动系统参数条件下同步函数的斜率没有差异. 在图 5(b) 中画出了驱动系统的参数 β_1 分别为 $0.25, 0.30, 0.35$ 以及 0.40 时, 同步函数 δ 随 α_2 的变化情况. 我们注意到, 驱动系统参数 β_1 发生变化时, 并不影响 α_2 的同步位置 ($\delta = 0$ 的位置), 但是出现模螺旋波的临界值有微小改变, 同时同步函数的斜率也有不同.

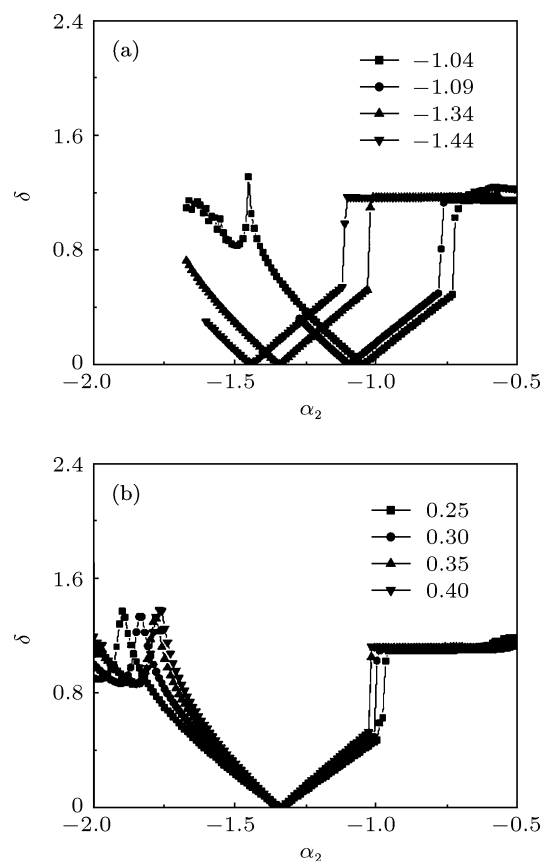


图 5 同步函数 δ 随系统参数 α_2 的变化 耦合强度 $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.08$, (a) $\beta_1 = \beta_2 = 0.35$, $\alpha_2 = -1.34$, 参数 α_1 分别为 $-1.044, -1.09, -1.34, -1.44$; (b) $\alpha_1 = \alpha_2 = -1.34$, $\beta_2 = 0.35$, 参数 β_1 分别为 $0.25, 0.30, 0.35, 0.40$

5 结论

本文以双层耦合 CGLE 系统为模型, 研究了其中的模螺旋波 (amplitude spiral wave) 现象, 发现当驱动系统和响应系统的初始条件或参数不同时均能够产生模螺旋波. 本文通过数值实验总结出以下结论: (1) 当驱动系统和响应系统的初始斑图均为单个螺旋波时, 螺旋波距离 d 是一个重要的控制参数. 当 d 较大时, 表明驱动系统和响应系统的初始条件有较大的差别, 在此条件下响应系统中变量的振幅部分可以出现螺旋结构, 产生模螺旋波. (2) 本文还研究了耦合系统在参数不匹配的条件下由同

步相螺旋波向非同步模螺旋波的转变过程,发现当系统参数有较大差别时模螺旋波才能出现.通过对同步函数的定义和计算,得到该转变过程的一些定量特征,发现耦合系统从相螺旋波到模螺旋波的转变过程具有非连续性.模螺旋波是最近报道的一种新颖螺旋斑图,目前仅出现于耦合时空系统中.与常见的相螺旋波相比,模螺旋波自身不具有中心缺陷点,在双层耦合系统中模螺旋波与对应的相螺旋波共用同一个缺陷点.模螺旋波必须在对应的

相螺旋波驱动下才能够稳定存在,目前仅发现于二维非对称耦合系统中.与此同时,在边界受控的一维 CGLE 系统中也发现了类似的振幅波动行为,因而这种现象具有一定的普遍性.本文对这种新颖波动行为进行了大量的实验观察和分析,讨论了初始条件和系统参数对模螺旋波稳定性的影响,为这种现象在介质性质、信号传播等领域的应用提供新的内容,具有重要的理论研究意义.

- [1] Zaikin A N, Zhabotinsky A M 1970 *Nature* **225** 535
- [2] Masajada J, Dubik B 2001 *Opt. Commun.* **198** 21
- [3] Yu L C, Ma J, Zhang G Y, Chen Y 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 2706
- [4] Lee K J, Cox E C, Goldstein R E 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1174
- [5] Goryachev A, Chate H, Kapral R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 873
- [6] Vanag V K, Epstein I R 2001 *Science* **294** 835
- [7] Zaritski R M, Pertsov A M 2002 *Phys. Rev. E* **66** 066120
- [8] Gong Y F, Christini D J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 088302
- [9] Ouyang Q 2000 *Pattern Formation in Reaction-Diffusion Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [欧阳颀 2000 反应扩散系统中的斑图动力学 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [10] Zhan M, Kapral R 2005 *Phys. Rev. E* **72** 046221
- [11] Gan Z N, Ma J, Zhang G Y, Chen Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5400 (in Chinese) [甘正宁, 马军, 张国勇, 陈勇 2008 物理学报 **57** 5400]
- [12] Xie L L, Gao J H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060515
- [13] Gao J Z, Xie L L, Xie W M, Gao J H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080503 (in Chinese) [高加振, 谢玲玲, 谢伟苗, 高继华 2011 物理学报 **60** 080503]
- [14] Zhong M, Tang G N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1593 (in Chinese) [钟敏, 唐国宁 2010 物理学报 **59** 1593]
- [15] Gao J H, Xie L L, Nie H C, Zhan M 2010 *Chaos* **20** 043132
- [16] Xie L L, Gao J Z, Xie W M, Gao J H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 110503
- [17] He X Y, Zhang H, Hu B, Cao Z J, Zheng B, Hu G 2007 *New J. Phys.* **9** 66
- [18] Zhabotinsky A M, Muller S C, Hess B 1990 *Chem. Phys. Lett.* **172** 445
- [19] Winston D, Arora M, Maselko J, Gaspar V, Showalter K 1991 *Nature* (London) **351** 132
- [20] Hildebrand M, Cui J X, Mihaliuk E, Wang J C, Showalter K 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026205
- [21] Yang L F, Epstein I R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 178303
- [22] Yang H J, Yang J Z 2007 *Phys. Rev. E* **76** 016206
- [23] Kuramoto Y 1984 *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (New York: Springer)
- [24] Cross M, Hohenberg P 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [25] Aranson I S, Kramer L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 99
- [26] Das S K, Puri S, Cross M 2001 *Phys. Rev. E* **64** 046206
- [27] Ipsen M, van Hecke M 2001 *Physica D* **160** 103
- [28] van Hecke M 2003 *Physica D* **174** 134
- [29] Nie H C, Xie L L, Gao J H, Zhan M 2011 *Chaos* **21** 023107
- [30] Nie H C, Gao J H, Zhan M 2011 *Phys. Rev. E* **84** 056204

Amplitude spiral wave in coupled complex Ginzburg-Landau equation

Gao Ji-Hua Xie Wei-Miao Gao Jia-Zhen
Yang Hai-Peng Ge Zao-Chuan[†]

(Key Laboratory of Special Functional Materials of Shenzhen, College of Materials, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

(Received 19 November 2011; revised manuscript received 12 December 2011)

Abstract

A novel amplitude spiral wave in coupled complex Ginzburg-Landau equation (CGLE) system is proposed. The stability conditions and the relevant factors are investigated via numerical simulations. On the tip of an amplitude spiral wave there exist no topological defect, which is different from the commonly observed phase spiral wave, and in its amplitude part (instead of phase part) there is a spiral structure. In this research, the stability of amplitude spiral wave is studied by considering the different initial patterns in the case of the system parameter mismatches.

Keywords: spiral wave, complex Ginzburg-Landau equation, amplitude spiral wave

PACS: 05.45.-a, 82.40.Ck, 47.54.-r

[†] E-mail: gezaochuan@126.com