

# 高斯涡旋光束在自由空间传输中电场和磁场的偏振奇点\*

罗亚梅<sup>1)†</sup> 吕百达<sup>2)</sup> 唐碧华<sup>1)</sup> 朱渊<sup>1)</sup>

1) (泸州医学院生物医学工程系, 泸州 646000)

2) (四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2011年11月14日收到; 2011年12月2日收到修改稿)

利用矢量菲涅尔衍射积分公式, 以高斯涡旋光束为例, 推导出傍轴高斯涡旋光束在自由空间传输过程中电场分量和磁场分量的解析表达式, 详细研究了自由空间中电场和磁场的偏振奇点变化规律. 结果表明, 高斯涡旋光束在自由空间传输中, 存在二维和三维电场和磁场的偏振奇点, 其位置一般不重合. 改变光束束腰宽度比、振幅比以及传输距离, 偏振奇点出现移动. 在二维电场和磁场中, 当满足一定条件时, 会有  $V$  点产生.

**关键词:** 高斯涡旋光束, 电场和磁场的偏振奇点, 自由空间传输

**PACS:** 42.25.Bs, 42.25.Ja

## 1 引言

奇点光学的研究对象已从标量场推广到矢量场. 在矢量奇点光学中, 偏振奇点是一个重要研究对象<sup>[1-14]</sup>. 基于偏振奇点形成的 Stokes 测偏振术, 在亚微米粒子的变形和位移精确测量以及生命科学研究中得到应用<sup>[15,16]</sup>. Berry 和 Dennis<sup>[4,5]</sup> 研究了傍轴矢量场偏振奇点的几何结构和形态, 计算了偏振奇点的密度, 将偏振奇点解释为光子自旋轨迹. 通常, 电场和磁场的偏振奇点是不同的. Hajnal<sup>[2]</sup> 通过实验研究了微波在自由空间传输过程中的三维电场的偏振奇点以及三维磁场的偏振奇点. Berry<sup>[10]</sup> 对傍轴矢量波的横向场(二维)以及三维电场和磁场偏振奇点做了比较研究. 本文以高斯涡旋光束为例, 研究了涡旋光束在自由空间传输过程中, 光束振幅比、束腰比以及离轴参数和传输距离等变化对二维和三维电场、磁场中的偏振奇点的影响, 所得结果有助于深入认识电场和磁场偏振奇点在自由空间中的变化规律.

## 2 理论推导

设在源平面  $z = 0$  处有一高斯背景光的离轴位

相奇点光束<sup>[17]</sup>

$$E_x(x_0, y_0, 0) = E_{0x}(x_0 - a + iy_0) \times \exp\left[-\frac{(x_0 - a)^2 + y_0^2}{w_{0x}^2}\right], \quad (1a)$$

$$E_y(x_0, y_0, 0) = E_{0y}(x_0 - a + iy_0) \times \exp\left[-\frac{(x_0 - a)^2 + y_0^2}{w_{0y}^2}\right]. \quad (1b)$$

其中,  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$ ,  $w_{0x}$ ,  $w_{0y}$  分别是  $E_x$  和  $E_y$  的振幅常量和束腰宽度,  $a$  为光涡旋在  $x$  方向的离轴量.

根据矢量形式的菲涅尔衍射积分公式, 光束在自由空间傍轴传输过程中有

$$E_x(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{\lambda z_i} \iint_{-\infty}^{\infty} E_x(x_0, y_0, 0) \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0, \quad (2a)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{\lambda z_i} \iint_{-\infty}^{\infty} E_y(x_0, y_0, 0) \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (2b)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 10874125)和四川省教育厅自然科学基金(批准号: 10ZB029)资助的课题.

† E-mail: luoluoyan@126.com; baidalu0@tom.com.

其中,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数,  $\lambda$  为波长. 将 (1) 式代入 (2) 式, 积分得

$$E_x(x, y, z) = \frac{2E_{0x}[k\pi w_{0x}^4(x + iy - a) - 4ia\pi zw_{0x}^2]}{\lambda(kw_{0x}^2 + 2iz)^2} \times \exp\left\{ik\left(z + \frac{i(x^2 + y^2)}{kw_{0x}^2 + 2iz}\right)\right\}, \quad (3a)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{2E_{0y}[k\pi w_{0y}^4(x + iy - a) - 4ia\pi zw_{0y}^2]}{\lambda(kw_{0y}^2 + 2iz)^2} \times \exp\left\{ik\left(z + \frac{i(x^2 + y^2)}{kw_{0y}^2 + 2iz}\right)\right\}. \quad (3b)$$

按文献 [10], 傍轴近似下的纵向场分量可由散度方程用横向场分量表示为

$$\begin{aligned} E_z &\approx \frac{i}{k} \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t, \\ B_z &\approx \frac{i}{k} \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t, \end{aligned} \quad (4)$$

式中,

$$\begin{aligned} \nabla_t &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \quad \mathbf{E}_t = \{E_x, E_y\}, \\ \mathbf{B}_t &= \{B_x, B_y\}, \end{aligned}$$

且有

$$B_x(x, y, z) = \frac{1}{c} \left\{ -E_y - \frac{1}{2k^2} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_y - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} E_x \right] \right\}, \quad (5a)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{1}{c} \left\{ E_x - \frac{1}{2k^2} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} E_y \right] \right\}, \quad (5b)$$

其中,  $c$  为真空中的光速.

### 3 圆偏振奇点 ( $c$ 和 $C$ 点)

对于矢量  $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_t, E_z\}$  和  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_t, B_z\}$ , 对圆偏振奇点的定义有<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{E}_t = 0 \quad (c_E \text{ 线}), \quad (6a)$$

$$\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{B}_t = 0 \quad (c_B \text{ 线}), \quad (6b)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (C_E \text{ 线}), \quad (6c)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (C_B \text{ 线}), \quad (6d)$$

在线上偏振椭圆的长轴和短轴方向并不确定. 若考虑在  $z$  一定处的圆偏振奇点, 即在  $xy$  平面上满足式 (6a)—(6d) 的点则分别为  $c_E$  点、 $c_B$  点、 $C_E$  点和  $C_B$  点. 由 (3)—(6) 式可知, 高斯涡旋光束在

自由空间傍轴传输过程中, 二维电场和磁场 ( $\mathbf{E}_t$  和  $\mathbf{B}_t$ ) 以及三维电场和磁场 ( $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ ) 中的偏振奇点随光束振幅比  $\eta = E_{02}/E_{01}$ 、束腰宽度比  $\delta = w_{0y}/w_{0x}$ 、离轴量  $a$  以及传输距离  $z$  等变化.

根据 (6a)—(6d) 式, 其实部和虚部的交点即为  $c_E$  点、 $c_B$  点以及  $C_E$  点、 $C_B$  点. 图 1(a)—(d) 中, 实线和虚线分别代表 (6a)—(6d) 式的实部和虚部等值线, 参数为  $w_{0x} = 50\lambda$ ,  $\delta = 1.2$ ,  $\eta = 1$ ,  $a = 2\lambda$ ,  $z = 1000\lambda$ . 由图可见, 在范围  $\{1.5 \leq x/\lambda \leq 2.5, 0 \leq y/\lambda \leq 0.4\}$  内分别有两个  $c_E$  点、 $c_B$  点以及  $C_E$  点、 $C_B$  点, 两个  $c_E$  点位置分别为  $c_{E1}$  (1.96398, 0.21543) 和  $c_{E2}$  (2.04201, 0.21537); 两个  $c_B$  点位置分别为  $c_{B1}$  (1.96395, 0.21537) 和  $c_{B2}$  (2.04201, 0.21537); 两个  $C_E$  点位置分别为  $C_{E1}$  (1.89160, 0.11009) 和  $C_{E2}$  (2.11433, 0.3268); 两个  $C_B$  点位置分别为  $C_{B1}$  (2.11533, 0.11101) 和  $C_{B2}$  (1.89062, 0.31976). 可以证明, 在严格傍轴近似下, 即 (5) 式中  $\frac{1}{k^2}$  项可忽略时, 二维电场和磁场的圆偏振奇点完全重合. 但三维电场和磁场中相对应的圆偏振奇点相隔较远.

图 2 给出了图 1 中奇点对的距离随束腰比  $\delta$  的变化, “●” 代表  $c_E$  点对  $c_{E1}$  和  $c_{E2}$ , “■” 代表  $C_E$  点对  $C_{E1}$  和  $C_{E2}$ . 由图可见, 电场的圆偏振奇点对的距离随束腰比的变化而变化. 例如, 对  $\delta = 1.15$  和  $0.85$  时,  $c_{E1}$  和  $c_{E2}$  间的距离分别为  $0.062\lambda$ ,  $0.098\lambda$ ;  $C_{E1}$  和  $C_{E2}$  间的距离分别为  $0.309\lambda$ ,  $0.335\lambda$ . 当  $\delta < 1$  时, 二维电场的圆偏振奇点随  $\delta$  的减小而距离增大; 当  $\delta > 1$  时, 二维电场的圆偏振奇点随  $\delta$  的增大而距离增大; 三维电场的圆偏振奇点随  $\delta$  的增大而减小. 二维磁场的圆偏振奇点对也有类似的变化规律. 值得注意的是, 当  $\delta = 1$  时,  $c_{E1}$  和  $c_{E2}$  重合在一起. 根据文献 [2] 定义二维电场有

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{E_x + iE_y}{\sqrt{2}}, \\ E_L &= \frac{E_x - iE_y}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

则  $E_R = 0$ , 对应左旋  $c_E$  点;  $E_L = 0$ , 对应右旋  $c_E$  点. 根据式 (3a) 和 (3b) 可以得到当  $\delta = 1$  (即  $w_{0x} = w_{0y} = w_0$ ) 时

$$x = a, \quad (8a)$$

$$y = \frac{2az}{kw_0^2}, \quad (8b)$$

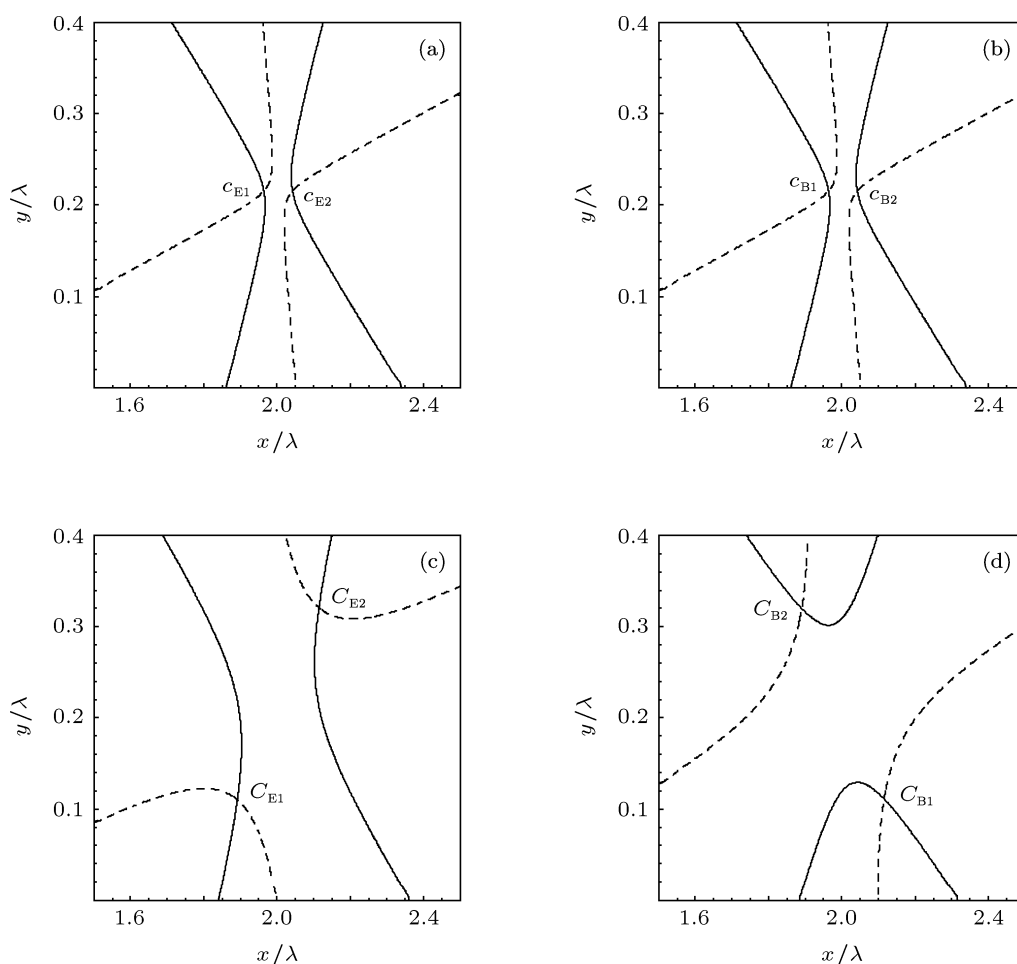


图1 (6a)—(6d) 式实部和虚部等值线分布图.  $w_{0x} = 50\lambda, \delta = 1.2, \eta = 1, a = 2\lambda, z = 1000\lambda$

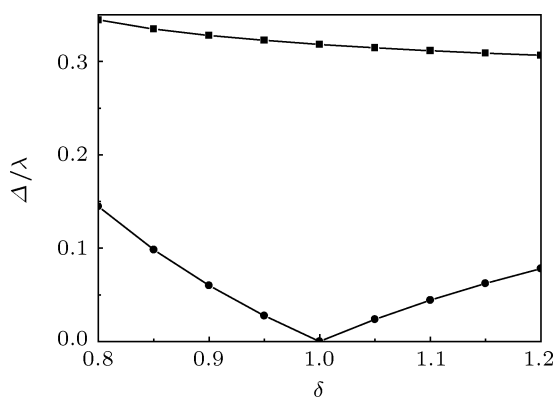


图2 奇点对的距离随束腰比  $\delta$  的变化, —●—  $c_E$  点对  $c_{E1}$  和  $c_{E2}$  (或  $c_B$  点对  $c_{B1}$  和  $c_{B2}$ ), —■—  $c_E$  点对  $C_{E1}$  和  $C_{E2}$  (或  $c_B$  点对  $C_{B1}$  和  $C_{B2}$ )

同时满足  $E_R = 0$  和  $E_L = 0$ , 说明两个旋性相反的圆偏振点重合在一起 (或者说  $c_{E1}$  和  $c_{E2}$  碰撞在一起), 此时在该点不能再称之为一个左旋圆偏振点或右旋圆偏振点, 出现一个  $V$  点, 该点的偏振态是不确定的 [12]. 对二维磁场中形成的  $V$  点的

条件是相同的, 因此,  $\delta = 1$  时, 二维电场和磁场左旋和右旋圆偏振奇点严格重合, 且构成  $V$  点, 其位置的  $x$  坐标仅由光涡旋在  $x$  方向的离轴量  $a$  决定, 其  $y$  坐标则由束腰宽度  $w_0$ 、离轴量  $a$  以及传输距离  $z$  决定.

若是改变振幅比以及传输距离等, 也会有以上类似的变化规律, 故略去.

#### 4 线偏振奇点 ( $l$ 线和 $L$ 点)

对于矢量  $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_t, E_z\}$  和  $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_t, B_z\}$ , 对线偏振奇点的定义有 [10]

$$\text{Im}\mathbf{E}_t^* \times \mathbf{E}_t = 0, \quad (l_E \text{面}) \quad (9a)$$

$$\text{Im}\mathbf{B}_t^* \times \mathbf{B}_t = 0, \quad (l_B \text{面}) \quad (9b)$$

$$\text{Im}\mathbf{E}^* \times \mathbf{E} = 0, \quad (L_E \text{线}) \quad (9c)$$

$$\text{Im}\mathbf{B}^* \times \mathbf{B} = 0, \quad (L_B \text{线}) \quad (9d)$$

此时偏振态退化为线偏振, 其旋向性不确定. 若考虑在  $z$  一定处的线偏振奇点, 即在  $xy$  平面

上构成满足式 (9a)—(9d) 的  $l_E$  线、 $l_B$  线、 $L_E$  点和  $L_B$  点. 二维情况下, 对电场和磁场中的  $l$  线满足条件

$$|E_R|^2 - |E_L|^2 = 0, \quad (l_E \text{ 线}) \quad (10a)$$

$$|B_R|^2 - |B_L|^2 = 0. \quad (l_B \text{ 线}) \quad (10b)$$

三维情况下, 对电场和磁场中的  $L$  点满足条件

$$\text{Re}(\mathbf{E}_t^* \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t) = 0, \quad (L_E \text{ 点}) \quad (11a)$$

$$\text{Re}(\mathbf{B}_t^* \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t) = 0. \quad (L_B \text{ 点}) \quad (11b)$$

图 3 给出了不同  $\eta$  时的线偏振奇点, (a)  $\eta = 1$ , (b)  $\eta = 0.01$ , 其余参数同图 1(a). 由图可见,  $z$  一定时, 所考虑范围内有  $l_E$  线 (以实线表示) 和  $l_B$  线 (以虚线表示) 各一条. 可以证明, 随着  $\eta$  的变化,  $l_E$  线不变. 根据 (10a) 可以得到一个圆表达式

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2, \quad (12)$$

其中,

$$A = \frac{a[-16z^4 + 3k^4 w_{0x}^8 \delta^4 + 4k^2 w_{0x}^4 z^2 (1 + \delta^4)]}{4k^2 w_{0x}^4 \delta^2 (4z^2 + k^2 w_{0x}^4 \delta^2)}, \quad (13a)$$

$$B = \frac{az(1 + \delta^2)}{kw_{0x}^2 \delta^2}, \quad (13b)$$

$$R = \frac{a(4z^2 + k^2 w_{0x}^4)(4z^2 + k^2 w_{0x}^4 \delta^4)}{4k^2 w_{0x}^4 \delta^2 (4z^2 + k^2 w_{0x}^4 \delta^2)}. \quad (13c)$$

由 (12) 和 (13) 式可知,  $l_E$  线为圆心在  $(A, B)$ , 半径为  $R$  的圆, 它并不随  $\eta$  的变化而改变, 其圆心和半径由束腰宽度, 传输距离等决定. 数值计算表明,  $l_B$  线会随着  $\eta$  的变化而改变, 当  $\eta = 1$  时,  $l_E$  线和  $l_B$  线基本上重合, 当 (5) 式中的  $1/(2k^2)$  项省略时二者完全重合. 随着  $\eta$  的变化,  $l_E$  线和  $l_B$  线分开明显 (例如图 3(b)), 当  $\eta = 0.01$  时,  $l_B$  线处于  $l_E$  线外侧; 但不管  $\eta$  如何变化,  $l_E$  线和  $l_B$  线的位置关系满足文献 [10] 中的 (24) 式.

所考虑范围内有一个  $L_E$  点 (以“▲”表示) 和一个  $L_B$  点 (以“△”表示). 随着  $\eta$  的变化,  $L_E$  点和  $L_B$  点的位置发生变化, 例如,  $\eta = 1$  和 0.01 时  $L_E$  点的位置分别为 (1.491, 0.722), (2.001, 0.187);  $L_B$  点的位置分别为 (1.114, 0.550), (1.186, -0.186). 但不管怎么样,  $L_E$  点始终处于  $l_E$  线上,  $L_B$  点始终处于  $l_B$  线上, 从公式 (9) 和 (10) 也可以看出这一特点 [10]. 类似地, 若改变光束束腰宽度比以及传输距离等, 也会有上述变化规律.

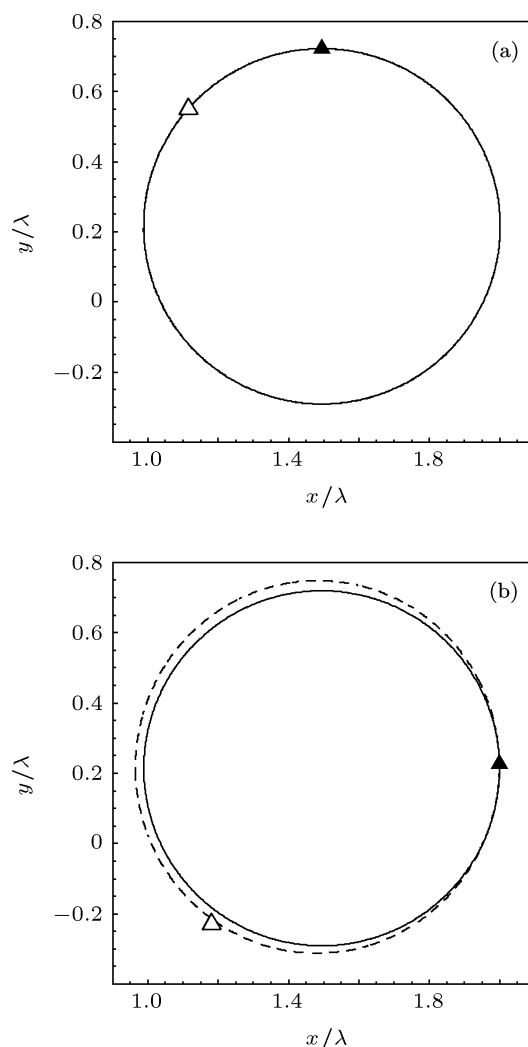


图 3 不同  $\eta$  时的线偏振奇点 (a)  $\eta = 1$ ; (b)  $\eta = 0.01$

## 5 结论

本文从矢量形式的菲涅尔衍射积分公式和 Maxwell 散度方程出发, 推导出高斯涡旋光束在自由空间传输过程中电场分量和磁场分量的解析表达式, 用以研究其在自由空间中的二维偏振奇点  $c_E$ ,  $l_E$ ,  $c_B$  和  $l_B$  奇点和三维场的  $C_E$ ,  $L_E$ ,  $C_B$  和  $L_B$  奇点随束腰宽度比、振幅比以及传输距离等的变化, 以及偏振奇点间的位置关系. 高斯涡旋光束在自由空间传输过程中, 存在二维偏振奇点  $c_E$ ,  $l_E$ ,  $c_B$  和  $l_B$  奇点和三维场的  $C_E$ ,  $L_E$ ,  $C_B$  和  $L_B$  奇点, 且随着束腰宽度比、振幅比、离轴量以及传输距离的变化, 各奇点均会发生移动. 对于二维电场和磁场中相对应的圆偏振奇点位置几乎是重合的; 而三维电场和磁场中相对应的圆偏振奇点位置相隔较远. 二维电场或磁场中, 两个旋性相反的圆偏振奇点重合在一起 (或者说碰撞在一起), 形成  $V$  点,

该点的偏振态是不确定的. 形成  $V$  点的条件是  $\delta = 1$ , 电场和磁场的  $V$  点是重合的, 其位置由离轴量  $a$ , 束腰宽度  $w_0$  以及传输距离  $z$  决定. 整个过程中, 虽然线偏振奇点会随束腰宽度比、振幅比、离轴量以及传输距离等的变化而有所移动, 但当振幅比变化时,  $l_E$  线始终为圆, 它并不随  $\eta$  的变

化而改变, 其圆心和半径由束腰宽度, 传输距离等决定. 此外,  $L_E$  点始终处于  $l_E$  线上,  $L_B$  点始终处于  $l_B$  线上. 本文的结果深化了对高斯涡旋光束在自由空间传输中电场和磁场的偏振奇点变化规律的认识.

- 
- [1] Nye J F, Hajnal J V 1987 *Proc. R. Soc. Lond. A* **409** 21  
 [2] Hajnal J V 1990 *Proc. R. Soc. Lond. A* **430** 413  
 [3] Nye J F 1999 *Natural Focusing and the Fine Structure of Light* (IOP Publishing, Bristol, UK)  
 [4] Berry M V, Dennis M R 2001 *Proc. R. Soc. Lond. A* **457** 141  
 [5] Dennis M R 2002 *Opt. Commun.* **213** 201  
 [6] Mokhun A I, Soskin M S, Freund I 2002 *Opt. Lett.* **27** 995  
 [7] Freund I, Mokhun A I, Soskin M S, Angelsky O V, Mokhun I I 2002 *Opt. Lett.* **27** 545  
 [8] Angelsky O V, Mokhun I I, Mokhun A I, Soskin M S 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036602  
 [9] Soskin M S, Denisenko V, Freund I 2003 *Opt. Lett.* **28** 1475  
 [10] Berry M V 2004 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** 475  
 [11] Flossmann F, Schwarz U T, Maier M, Dennis M R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 253901  
 [12] Schoonover R W, Visser T D 2006 *Opt. Express* **14** 5733  
 [13] Dennis M R 2008 *Opt. Lett.* **33** 2572  
 [14] Chernyshov A A, Felde C V, Bogatyryova H V, Polyanskii P V, Soskin M S 2009 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11** 094010  
 [15] Soskin M S, Denisenko V G, Egorov R I 2004 *Proc. of SPIE* **5458** 79  
 [16] Bliokh K Y, Niv A, Kleiner V, Hasman E 2008 *Opt. Express* **16** 695  
 [17] Liu P S, Cheng K, Lü B D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1683 (in Chinese) [刘普生, 程科, 吕百达 2008 物理学报 **57** 1683]

# The electric and magnetic polarization singularities of Gaussian vortex beam in the free-space propagation\*

Luo Ya-Mei<sup>1)†</sup> Lü Bai-Da<sup>2)</sup> Tang Bi-Hua<sup>1)</sup> Zhu Yuan<sup>1)</sup>

1) (*Department of Biomedical Engineering, Luzhou Medical College, Luzhou 646000, China*)

2) (*Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

(Received 14 November 2011; revised manuscript received 2 December 2011)

## Abstract

Using the Fresnel vector diffraction integral and taking the Gaussian vortex beam as an example, the analytical expressions for the electric and magnetic components of Gaussian vortex beam propagating in the free-space are derived, and used to study the variations of electric and magnetic polarization singularities in free space. It is found that there exist two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D) electric and magnetic polarization singularities in the free-space, which do not coincide in general. By varying waist width ratio, amplitude ratio, and propagation distance, the motion of polarization singularities takes place. In the 2D and the 3D electric and magnetic fields, the  $V$ -point may appear under a certain condition.

**Keywords:** Gaussian vortex beam, electric and magnetic polarization singularities, free-space propagation

**PACS:** 42.25.Bs, 42.25.Ja

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874125), the Natural Science Foundation of the Education Department of Sichuan Province (Grant No. 10ZB029).

† E-mail: luoluoyan@126.com; baidalu0@tom.com.