

基于稀疏贝叶斯学习的复杂网络拓扑估计*

郝崇清 王江[†] 邓斌 魏熙乐

(天津大学电气与自动化工程学院, 天津 300072)

(2011年7月13日收到; 2011年12月27日收到修改稿)

提出了一种噪声环境下复杂网络拓扑估计方法, 仅利用含噪时间序列估计未知结构混沌系统的动力学方程和参数, 以及由混沌系统组成的复杂网络的拓扑结构、节点动力学方程、所有参数、节点间耦合方向和耦合强度. 通过采用动力学方程的统一形式, 将动力系统方程结构和参数估计看成线性回归问题的系数估计, 该估计问题利用贝叶斯压缩传感的信号重建算法求解, 含噪信号的模型重建使用相关向量机方法, 即通过稀疏贝叶斯学习求解稀疏欠定线性方程得到上面提到的可估计对象. 以单个 Lorenz 系统及由 200 个 Lorenz 系统组成的无标度网络为例说明方法的有效性. 仿真结果表明, 提出的方法对噪声有很强的鲁棒性, 收敛速度快, 稳态误差极小, 克服了最小二乘估计方法收敛速度慢、稳态误差大以及压缩传感估计方法对噪声鲁棒性不强的缺点.

关键词: 稀疏贝叶斯学习, 贝叶斯压缩传感, 拓扑估计, 复杂网络

PACS: 89.75.Fb, 05.45.Tp

1 引言

复杂网络是对复杂系统的一种抽象和描述方式, 任何包含大量组成单元(或子系统)的复杂系统, 当把构成单元抽象成节点、单元之间的相互关系抽象为边时, 都可以当做复杂网络来研究. 在 Watts 和 Strogatz 关于小世界网络^[1]以及 Barabási 和 Albert 关于无标度网络^[2]的开创性工作之后, 复杂网络已成功地应用于许多复杂系统, 并在相应领域取得了重要进展^[3-8]. 人们在对不同领域大量实际网络进行广泛实证性研究中发现, 复杂网络不仅具有小世界效应, 同时还呈现出无标度特征. 刻画网络节点特性的最简单同时也是最重要的概念就是度, 某节点 i 的度 k_i 是指与该节点相连接的边数, 某节点度值的大小体现了该节点在网络中的重要程度. 度分布定义为在网络中随机选取的节点度值为 k 的概率, 度分布服从幂律分布的网络称为无标度网络. 网络拓扑结构分析与辨识、网络宏观性质的微

观生成机制和网络中动力学机制研究成为目前的研究热点.

作为复杂网络研究的一个重要前沿方向, 网络拓扑结构分析与辨识的前期研究主要集中在已知拓扑结构下网络拓扑对网络特性的影响^[1,2,9,10], 网络拓扑结构和节点动力学方程是研究网络同步、控制、生长和故障诊断等的重要前提. 然而在实际复杂网络中通常不知道网络的拓扑结构及网络节点方程, 因此估计复杂网络节点的动力学方程及网络拓扑结构具有重要的理论和现实意义.

由混沌系统输出时间序列辨识其动力学方程和参数, 属于动力学研究的逆问题. 对单个非线性或混沌系统, 传统意义上的系统辨识问题一般而言是在已知系统方程结构的情况下估计系统的参数, 已有状态观测器^[11]、自适应同步^[12-16]、寻优算法^[17-19]等多种有效的辨识方法. 当系统的方程结构未知时, 利用人工神经网络^[20]、模糊逻辑方法^[21]等“灰箱模型”逼近原动力学方程, 然而辨识

* 国家自然科学基金(批准号: 61072012)资助的课题.

[†] E-mail: jiangwang@tju.edu.cn

出的系统方程并非原系统真实的动力学方程,难以全局刻画混沌系统的复杂动力学特性.

研究复杂网络的目标之一是理解网络上的各种动力学过程如何受到网络结构的影响,因此获取复杂网络的拓扑结构是解决许多其他问题的前提和基础. 比如,根据无标度网络的增长性(网络从 m_0 个节点开始,每增加一个节点皆连接到 m 个已存在的节点上,且 $m \leq m_0$)和优先连接特性(即新节点优先连接到网络中度值较大的节点)^[2],当无标度网络在时间演化过程中加入新的节点时,新节点要优先连接那些度比较大的节点,这就需要获知网络的拓扑结构或邻接矩阵从而得到每个节点的度值,为新节点的接入提供参考. 辨识网络拓扑结构及其节点动力学方程, Zhou 和 Lu^[22] 及 Wu^[23] 指出,异结构(节点动力学不相同)的网络更容易识别其拓扑结构, Chen 等^[24] 指出同步对拓扑辨识起阻碍作用. 当网络节点动力学和节点间耦合函数已知时, Tang 等^[25] 将拓扑辨识转化成最小优化问题,解决了网络同步情况下的拓扑辨识. Yu 等^[26] 提出了在已知每个节点的动力学方程和参数时,对网络施加控制测取稳态响应的方法估计网络拓扑结构. 当网络节点的动力学方程结构已知而方程参数未知时, Liu 等^[27] 利用自适应控制的思想实现了网络拓扑辨识.

近来,结构未知系统动力学方程的估计问题引起了很大关注. 对于单个非线性或混沌系统, Gouesbet 和 Letellier^[28] 将未知方程写成自治多项式结构的统一形式进行估计, Lu 等^[29] 给出了含有观测噪声的自治多项式结构的估计, Bezruchko 和 Smirnov^[30] 提出非自治微分方程结构的估计方法,他们均是利用最小二乘法估计多项式系数,然后利用多项式系数与方程结构的对应关系得到系统的方程. 然而这种估计方法收敛速度慢且存在较大稳态误差. 为了预测系统的突变及网络动力学特性, Wang 等^[31,32] 提出了一种基于压缩传感的动力学系统方程估计和网络拓扑结构估计方法,然而该方法对噪声的鲁棒性不强.

利用压缩传感估计系统动力学方程,是基于动力学方程可以用线性统一多项式结构逼近,且仅有少数项的系数为非零这个基本假设,则多项式系数可看成稀疏向量,动力学方程的估计转化为求解欠定线性系统. Donoho^[33] 和 Candès^[34] 提出的压缩

传感方法为求解此类欠定线性方程奠定了基础,并证明了可以利用部分傅里叶系数重建原始信号^[35]. 由于多项式系数与结构项的对应关系,利用压缩传感求解欠定线性系统可以实现动力学方程和参数的同时估计. 压缩传感的优点在于信号的投影测量数据量远小于传统的采样方法,突破了香农采样定理的瓶颈. 利用压缩传感从含有少量观测数据中重建源信号近来在压缩成像^[36]、传感网络^[37]、数据通信^[38] 等领域得到了良好应用.

在测量中噪声是不可避免的,加性噪声下的压缩传感重建问题,可以映射到以稀疏贝叶斯学习为基础的核向量机 (RVM)^[39,40] 框架下进行估计. 相比于支持向量机 (SVM) 结构风险最小化的学习机, RVM 是基于贝叶斯框架下的学习机,由于不受 Mercer 条件的限制,可以构建任意核函数,通过假设权值服从均值为零的正态分布,将权值过小的项置为零,克服了 SVM 容易过拟合的缺点.

本文的目的是利用贝叶斯压缩传感重建方法从被噪声污染的信号中估计复杂网络拓扑结构和节点的动力学方程,提出了基于稀疏贝叶斯学习的复杂网络拓扑结构和节点动力学方程的估计方法. 该方法不仅实现了估计值的快速收敛和极小的稳态误差,而且对噪声有很强的鲁棒性. 以单个 Lorenz 系统作为新节点接入同结构(节点动力学相同)无标度网络为例,假定新节点及网络中各节点方程结构和参数均未知,网络拓扑结构也未知,要保持网络的同结构应确保新接入节点的动力学方程与网络节点动力学方程相同,根据无标度网络的优先连接特性,新节点要优先连接度大的点,从而可以估计该新节点及网络节点的动力学方程以及网络的拓扑结构.

2 贝叶斯压缩传感

传统的压缩理论总是测量多维信号的所有像素点,得到正交基下基函数系数的压缩集. 然而在采样过程中受到香农采样定理的限制,使得数据采集速度很低,在很多领域面临问题,比如在功能磁共振 (fMRI) 中,病人需要暴露于高磁场辐射环境下很长时间才能完成脑部成像,这会对病人的健康产生危害. 压缩传感理论通过压缩集的直接测量,即稀疏采样而非完全采样,突破了香农采样定理的

限制, 实现了多点信号的高速采集.

压缩传感过程可分为信号的稀疏化、构建稳态测量矩阵和利用重建算法恢复源信号三部分. 压缩传感中重建恢复原信号是一种求解欠定义线性系统稀疏解的方法. 由于欠定义线性系统中未知数的个数大于方程的个数, 所以通常会有无穷多个解, 但是如果系统有唯一的稀疏解, 则我们可以通过压缩传感方法利用较少的观测量便能重建稀疏解.

压缩传感描述为: 已知某传感矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$, 且 $N \gg M$, 稀疏向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ 在矩阵 Φ 下的输出为 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{M \times 1}$, 即 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$, 压缩传感可根据 \mathbf{y} 重建 \mathbf{x} . 当处理图像或高维数据时应将其多维向量转换为一维长向量. 若 \mathbf{x} 的时域信号是非稀疏的, 可将其进行某种变换使其可以稀疏表示, 常用的变换有傅里叶变换、小波变换和冗余字典等. 为了重建原稀疏信号, 观测数据量必须满足 $O(K \ln N)$, 其中 K 为原稀疏信号非零项的个数, 且矩阵 Φ 必须满足约束等距条件^[41]. 对于原信号的恢复重建已有多种算法, 文献 [36] 已证明, 利用测量值通过求解最优 l_1 范数可重构 \mathbf{x} : $\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{x}\|_1$, 其约束条件为:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}, \quad (1)$$

这是一个凸最优问题, 可以转化为线性规划问题求解, 也即基追踪. 其他重建算法还有匹配追踪算法、最小全变分法等.

贝叶斯压缩传感的重建就是根据 \mathbf{x} 在某基下是稀疏的、数据 \mathbf{y} 是可测量的等先验知识, 估计 \mathbf{x} 的后验密度函数. 当引入加性测量高斯噪声 $\mathbf{e} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$ 时, (1) 式写为

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad (2)$$

这类含加性高斯噪声的线性回归问题显然可以通过最小二乘法, 利用极小化模型误差平方和对 \mathbf{x} 进行估计, 但该方法收敛速度慢且存在很大的稳态误差. 由于本文中要将动力系统方程写成统一形式, 系统真实方程仅是统一形式中的少数项, 其余大部分项的系数为零, 即统一形式系数向量是稀疏的, 因此本文提出利用基于稀疏贝叶斯学习的相关向量机求解稀疏向量 \mathbf{x} . 该方法首先对稀疏向量 \mathbf{x} 的每一个元素赋予一个零均值的高斯先验模型 $P(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^N N(x_i|0, \alpha_i^{-1})$, 其中 α_i 为高斯密度函数的逆方差, $\boldsymbol{\alpha}$ 称为超参

数, 然后对 $\boldsymbol{\alpha}$ 定义一个 Gamma 分布的超先验, 由此使得 x_i 的最终先验满足 t 分布且是稀疏先验. 利用迭代算法求得 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 σ^2 的最大后验密度, 即 $(\boldsymbol{\alpha}_{\text{MP}}, \sigma_{\text{MP}}^2) = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2} P(\mathbf{y}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$, 迭代过程中大部分 α_i 趋于无穷大, 即对应的 x_i 趋于零, 其他趋于有限值 x_i 就称之为相关向量, 得到 \mathbf{x} 的后验密度函数 $P(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$ 后, 取后验估计的均值为 \mathbf{x} 的点估计.

3 复杂网络拓扑估计

对于一类含有多项式结构或者可以通过幂级数展开成多项式结构的动力学系统, 若要利用时间序列重建原动力系统的方程, 首先应指定系统方程的统一形式, 即将方程的全局重建变成一个线性回归问题, 利用最小二乘法求回归方程的系数, 利用回归系数与结构项的对应关系从而同时得到方程的结构和参数. 然而该方法收敛速度很慢, 由于指定的统一结构的多项式项数多于实际项数, 所以对于稀疏结构的形式该方法存在较大误差, 而利用压缩传感恰好解决了这些问题. 压缩传感框架下估计系统的动力学方程, 假定自治动力系统形式如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{A}), \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态变量, \mathbf{A} 为系统参数. $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{A}_1), F_2(\mathbf{x}, \mathbf{A}_2), \dots, F_n(\mathbf{x}, \mathbf{A}_n))$ 为平滑向量函数. 假设系统各变量均可观测, 则每个系统变量可以表示成统一形式

$$\dot{x}_i = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_d=0}^N (a_i)_{l_1, l_2, \dots, l_d} \prod_{j=1}^d x_j^{l_j},$$

其中 d 为变量的最高幂指数, 系数值 $(a_i)_{l_1, l_2, \dots, l_d}$ 为向量 \mathcal{A}_i 的元素, 写成向量形式为 $\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}, \mathcal{A}_i) = \boldsymbol{\varphi} \mathcal{A}_i^T$, 其中 $\boldsymbol{\varphi} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_d=0}^N \prod_{j=1}^d x_j^{l_j}$. 选择适当的幂指数 d 时, 由于缺少相关项, \mathcal{A}_i 中的大部分元素为零, 即其是稀疏的.

当系统在某参数 \mathbf{A} 下演化时, 获得 n 个系统状态变量的 μ 个测量值 $[\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_\mu)]^T$, 对于第 i 个方程 F_i 由观测量 $[x_i(t_1), x_i(t_2), \dots, x_i(t_\mu)]^T$ 和采样频率求得 $\dot{\hat{x}}_i = [\dot{x}_i(t_1), \dot{x}_i(t_2), \dots, \dot{x}_i(t_\mu)]^T$, 同时求得矩阵 Φ 的 μ 个行向量 $\Phi = [\boldsymbol{\varphi}(t_1), \boldsymbol{\varphi}(t_2), \dots, \boldsymbol{\varphi}(t_\mu)]^T$, 由此我们获得如下等式

$$\dot{\hat{x}}_i = \Phi \mathcal{A}_i^T + \mathbf{e}, \quad (4)$$

其中 \mathcal{A}_i 为由系数 $(a_i)_{l_1, l_2, \dots, l_d}$ 组成的向量, e 为测量噪声. 利用贝叶斯压缩传感可以估计出 \mathcal{A}_i 的值, 由于 \mathcal{A}_i 与系统各项存在对应关系, 估计出系统每个方程 \mathcal{A}_i 的值便可估计出整个系统的方程. 为了满足约束等距性, 将矩阵 Φ 的每个元素除以该元素所在列的 2-范数.

当由 K 个节点组成网络时, 为简单起见, 假设节点间仅通过第一个变量存在耦合, 对第 i 个节点 $[x_1]_i$ 表示成

$$[\dot{x}_1]_i = [F_1(\mathbf{x}, \mathcal{A}_1)]_i + \sum_{j=1, j \neq i}^K C_{i,j}([x_1]_j - [x_1]_i), \quad (5)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, K, C_{i,j}$ 为第 i 个节点与第 j 个节点的耦合强度. 对 (5) 式所包含的节点变量进行分组, 把含有第 i 个节点的所有变量分成一组, 这样可将 (5) 式分成 K 组, 即写成如下 K 组式子的和:

$$\begin{cases} [F_1(\mathbf{x}, \mathbf{A})]_i - \sum_{j=1, j \neq i}^K C_{i,j}[x_1]_j \\ C_{i,1}[x_1]_1 \\ C_{i,K}[x_1]_K \end{cases}, \quad (6)$$

对其中的每一组均可按照前面介绍的方法进行估计方程结构和参数, 利用第一组和其他变量的估计可得出第 i 个节点的方程, 其余各组估计出与第 i 个节点相连的节点号及耦合强度. 对网络中所有节点均执行该估计方法, 我们便得到了网络的拓扑结构.

下面以混沌 Lorenz 系统为例说明单个系统方程以及多个系统组成的耦合网络拓扑结构的估计方法, Lorenz 系统以

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_x y + b_x x, \\ \dot{y} &= a_y x + b_y y + c_y x z, \\ \dot{z} &= a_z x y + b_z z \end{aligned} \quad (7)$$

形式给出, 当常系数分别取 $a_x = 10, b_x = -10, a_y = 28, b_y = -1, c_y = -1, a_z = 1, b_z = -8/3$ 时 Lorenz 系统处于混沌状态.

对于确定性系统而言, 选取的幂指数越大意味着求取的向量越稀疏. 以 Lorenz 系统取幂指数 $d = 3$ 为例, 在 t_i 时刻,

$$\varphi(t_i) = [x(t_i)^0 y(t_i)^0 z(t_i)^0, x(t_i)^0 y(t_i)^0 z(t_i)^1,$$

$$\dots, x(t_i)^3 y(t_i)^3 z(t_i)^3]$$

共 64 项. 由上式可见, 对 \dot{x} 而言只有 $x(t_i)^1 y(t_i)^0 z(t_i)^0, x(t_i)^0 y(t_i)^1 z(t_i)^0$ 等两项所对应的系数为非零, 其余项所对应的系数皆为零; 同理, \dot{y} 只有 $x(t_i)^1 y(t_i)^0 z(t_i)^0, x(t_i)^0 y(t_i)^1 z(t_i)^0, x(t_i)^1 y(t_i)^0 z(t_i)^1$ 三项为非零, \dot{z} 只有 $x(t_i)^1 y(t_i)^1 z(t_i)^0, x(t_i)^0 y(t_i)^0 z(t_i)^1$ 两项为非零. $\varphi(t_i)$ 的系数向量为稀疏向量, 根据贝叶斯压缩传感原理, 我们通过 μ 个 \dot{x} 的值和 $[\varphi(t_1), \varphi(t_2), \dots, \varphi(t_\mu)]$, 可以估计出 $\varphi(t_i)$ 所对应的系数向量 \mathcal{A}_i, \dot{y} 和 \dot{z} 非零系数向量同理可得.

对于由 K 个 Lorenz 系统组成的无权网络, 各节点间仅通过变量 x 耦合, 假定第 5 个节点与第 10, 11 和 17 等三个节点耦合, 要估计第 5 个节点与其他节点的耦合情况, 幂指数取为 $d = 3$, 利用单个独立节点的估计方法可得到 \dot{y}, \dot{z} 所在的方程. 将 \dot{x} 所在的方程表示成 (6) 式的形式, 则我们可得到 K 组中的第 1 组为 $[F_1(\mathbf{x}, \mathbf{A})]_5 = [\dot{x}]_5 = 10[y]_5 - 10[x]_5, \sum_{j=1, j \neq i}^K C_{5,j}[x_1]_j = 3[x]_5$, 第 11 组为 $C_{5,10}[x_1]_{10} = [x_1]_{10}$, 第 12 组为 $C_{5,11}[x_1]_{11} = [x_1]_{11}$, 第 18 组为 $C_{5,17}[x_1]_{17} = [x_1]_{17}$, 即 \dot{x} 所在的方程共有 $64K$ 项, 而只有 5 项是非零, 其余各项皆为零. 由此我们便得到了第 5 个节点的动力学方程及与该节点耦合的节点与耦合强度. 同时, 如果第 10 个节点与第 5 个节点无耦合表明存在耦合方向, 对网络中的每个节点皆按此方法进行估计便得到了整个网络的拓扑结构、节点动力学方程、耦合强度和耦合方向.

4 仿真实例

以没有重边和自环的无权无标度网络为例说明方法的有效性. 假设网络由 200 个节点组成的同结构网络 (节点动力学方程相同), 如图 1 所示. 各个节点皆为 Lorenz 系统, 节点间仅通过 Lorenz 系统 (7) 式的第一个变量 x 相互耦合. 如果我们要接入一个新混沌系统作为节点, 该新混沌系统的方程结构和参数均未知, 根据无标度网络的优先连接特性, 要将该新混沌系统与网络中度值大的节点相连接, 需要估计出网络的拓扑结构, 得到各个节点的度来确定新混沌系统要和网络中哪些节点相连接.

同时为了保证网络的同结构特性, 还需要估计出新混沌系统及网络原节点的动力学方程.

首先根据该新混沌系统的输出时间序列估计出其方程和参数; 其次根据网络中各节点的输出时间序列估计网络拓扑结构和节点动力学方程, 如果新混沌系统与网络是同结构的且根据网络拓扑得到各节点的度, 将新混沌系统接入网络目标节点上成为网络中一个新的节点; 最后重新估计网络的拓扑结构检验网络新节点的连接情况. 同时我们比较了贝叶斯压缩传感和最小二乘法的数据长度对收敛速度的影响, 以及在噪声背景下贝叶斯压缩传感与压缩传感对估计精度的影响.

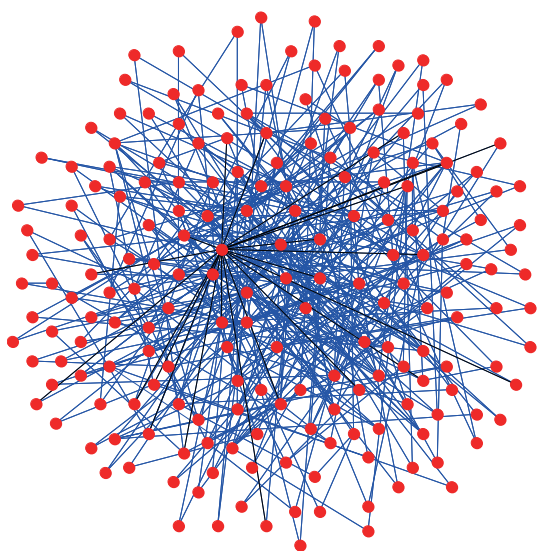


图1 无标度网络拓扑结构图

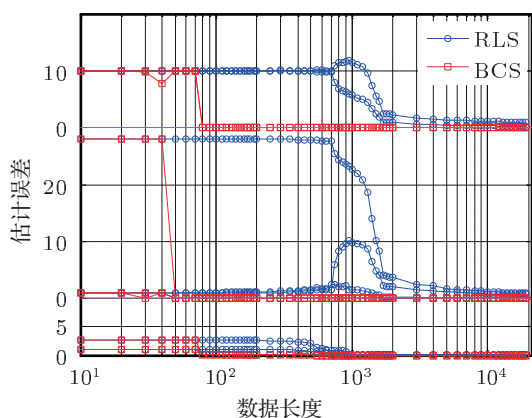


图2 RLS 与 BCS 估计收敛速度比较

新混沌系统方程和参数估计时, 多项式中变量的最高幂指数取为 $d = 2$, 则多项式共有 27 项. 对 \dot{x} , \dot{z} 所在方程有两个非零项, \dot{y} 所在方程有 3 个非零项, 当无测量噪声时, 取估计误差为估计值

与真实值之差的绝对值, 分别利用贝叶斯压缩传感 (BCS) 和递推最小二乘法 (RLS) 进行估计, 则我们得到两者非零项估计误差随测量数据长度间的关系曲线, 如图 2 所示, 从上到下依次为 \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} 对应的非零项. 由图可见, BCS 相比于 RLS, 不仅收敛速度快, 而且存在极小的稳态误差. 当取 $d = 3$ 时, 我们分别利用 BCS 和 CS 对多项式系数向量

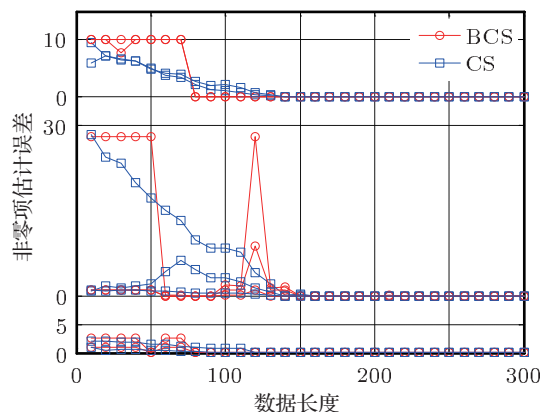


图3 CS 与 BCS 估计收敛速度比较

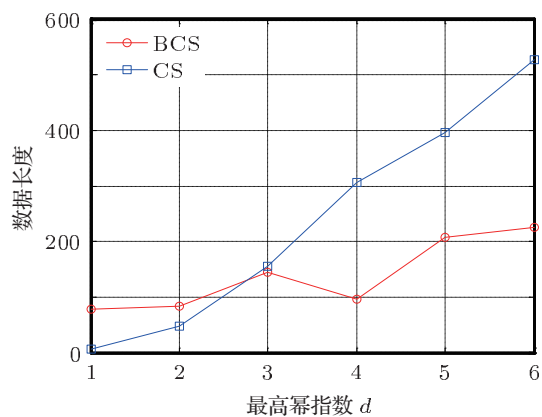


图4 不同稀疏状况下 CS 与 BCS 估计收敛速度比较

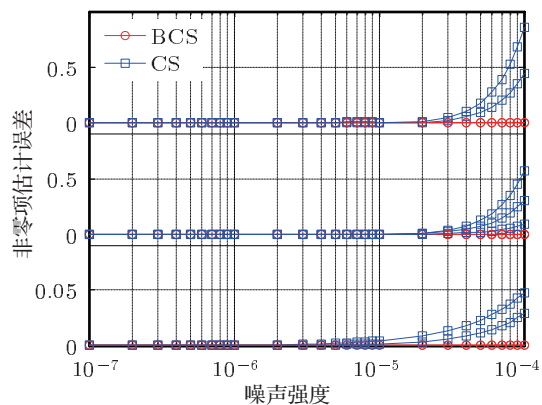


图5 噪声对 CS 与 BCS 估计精度的影响

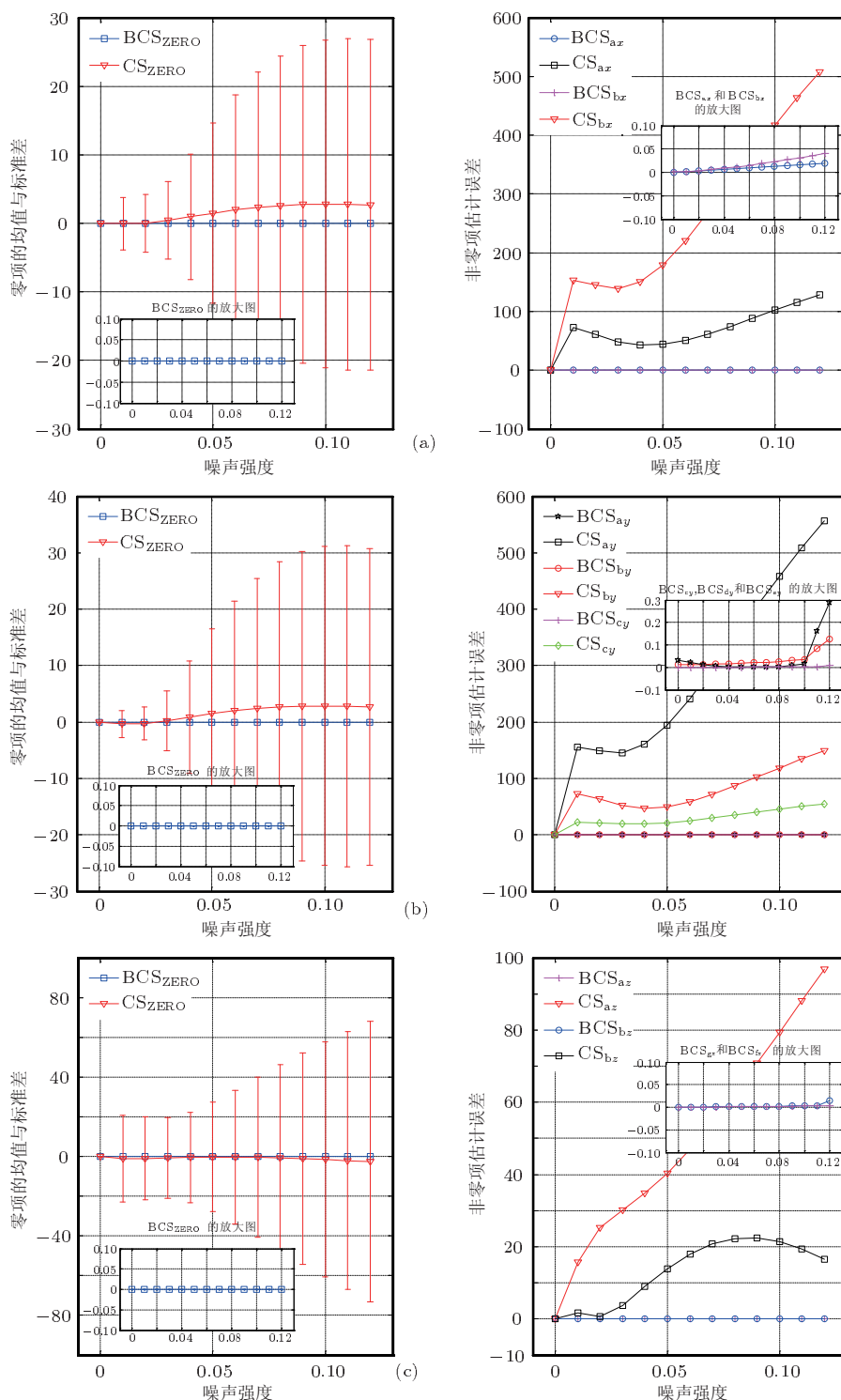


图 6 分别利用 CS 和 BCS 估计 (a) \hat{x} , (b) \hat{y} , (c) \hat{z} 所在方程零项与非零项的比较 (a), (b), (c) 中左图代表零项估计误差随噪声强度的影响, 右图代表非零项估计误差随噪声强度的影响

进行估计, 其中非零项的估计误差如图 3 所示, 在大约 150 处估计误差几乎为零, BCS 与 CS 几乎以相同的速度收敛于真实值.

在相同估计误差下, 系数向量的稀疏程度与数

据的测量次数, 即估计所需的数据长度之间的关系如图 4 所示. 由于多项式系数向量过于稀疏时利用 RLS 估计产生估计错误, 因此我们只比较 BCS 与 CS 两者间的不同. 我们取系统中七个非零项的

绝对误差绝对值的和作为评判标准, 取为 0.1. 在变量的最高幂指数较小时, 即稀疏度低, CS 所需数据长度小于 BCS, 但稀疏度很高时, BCS 所需数据长度小于 CS.

当测量中含有均值为 0, 方差为 1 的高斯白噪声 $N(0, 1)$ 时, 数据长度取为 300. $d = 3$ 时, 自上而下依次为 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 对应的非零项估计误差随噪声强度的影响曲线, 如图 5 所示. 可以看出, 压缩传感对噪声的鲁棒性很弱, 在噪声强度仅为 10^{-5} 时估计误差便开始迅速增加, 而利用贝叶斯压缩传感的估计误差并没有显著增加.

为显示贝叶斯压缩传感对噪声的鲁棒性, 以及多项式零项与非零项估计误差随噪声强度的变化, 我们给出 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 三个方程的多项式中, 零项与非零项估计值与真值间偏差的绝对值随噪声强度从 0 到 0.12 的估计情况, 如图 6 所示. 由图可见, 在没有噪声时, 两者皆有非常高的估计精度, 随着噪声增加, 相比于压缩传感, 贝叶斯压缩传感对噪声有很强的鲁棒性; 由于稀疏模型将权值向量的多数项设置为零, 所以由图 6(a)—(c) 图的左图可见, 零项的估计误差始终为零, 这也是为了避免过学习现象,

减小预测的计算量.

下面我们估计图 1 中网络的拓扑结构. 节点 N6 的度为 22, 是网络中度最大的节点, 即所有节点中稀疏性最差的一个, 而稀疏性与估计精度和所需数据长度成反比, 因此仅以此节点为例, 其他同理可得. 节点 N6 分别与节点 N5, N8, N12, N17, N19, N31, N36, N37, N53, N57, N60, N62, N77, N94, N107, N116, N120, N124, N129, N171, N183, N200 相连接, 节点间耦合通过变量 x 实现. 噪声强度取为 0.01 的高斯白噪声 $N(0, 1)$, $d = 3$ 即统一多项式的项数为 200×64 项, 取样点数为 3×10^4 , 估计得到 N6 的变量 x_6 与其他各节点的连接情况如图 7 所示. 由图可见, 共有 22 个节点与节点 N6 相连, 局部放大图表示 N6 节点的耦合非零项, 且耦合强度均为 1, 节点 N6 中变量 \dot{x}_6 的方程为 $\dot{x}_6 = 10y_6 - 10x_6$. 同理我们估计得到的 N6 中变量 \dot{y} 和 \dot{z} 的方程在允许误差内也与原方程相同, 利用压缩传感在此噪声强度下并不能估计出该结果. 新混沌系统的动力学方程与网络节点动力学方程是同结构的, 因此新混沌系统可以接入该网络.

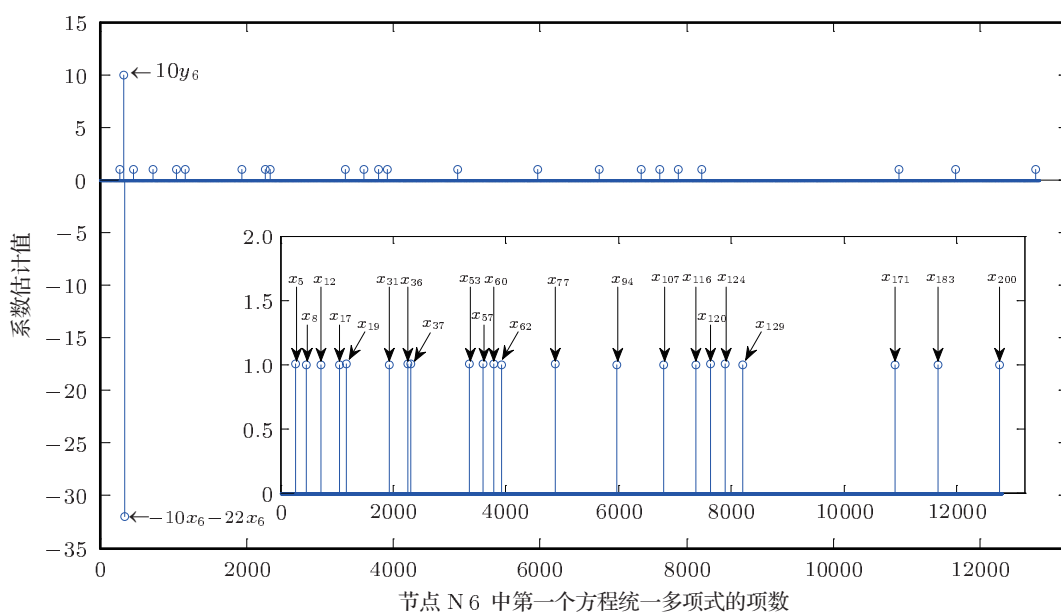


图 7 节点 N6 中 \dot{x} 所在方程和同 N6 耦合的节点耦合强度的估计结果

新的节点应该和网络中的哪些节点相连, 根据无标度特性, 应该优先连接那些度值比较大的点, 将网络中所有节点均通过该方法估计出与剩余其他节点的连接, 便得到了网络的拓扑结构, 同时可

以得到网络的邻接矩阵及每个节点的度, 将节点按度的大小排序, 得到我们要连接新节点的依据.

由于网络拓扑和节点动力学估计与单个 Lorenz 系统方程的估计方法类似, 噪声对估

计精度和收敛速度的影响也一致, 所以我们不再比较 CS 与 BCS 在网络估计上区别. 最后我们将新节点接入网络中度最大的前两个点, 对网络结构进行重新估计表明, 新节点接入正常.

需要说明的是, 如果两个节点完全同步, 则这两个节点是不可辨识的, 可以利用反同步控制使两节点去同步才能实现完全辨识. 我们对加权网络进行了仿真验证, 得到了与无权网络相同的结果. 相同估计指标下, 不同的动力学系统由于演化速度的不同估计所需要的数据长度也不同, 系统演化速度越慢估计所需的数据长度越长, 比如 Lorenz, Rössler 和 HR 神经元模型三者演化速度依次递减, 所需数据长度依次增加. 文中讨论的是自治系统, 如果系统含有非自治项, 比如达芬方程、FHN 神经元模型等, 可以采用文献 [30] 中更一般的统一结构形式.

5 结论

提出了基于稀疏贝叶斯学习的动力学方程估计方法, 将该方法推广到复杂网络的估计中, 实现了仅利用输出含噪声时间序列同时估计网络拓扑结构、节点动力学方程、耦合强度和耦合方向. 我们比较了该方法分别与最小二乘法和压缩传感对单个混沌系统估计收敛速度及估计误差的影响, 以及该方法和压缩传感在噪声环境下噪声强度分别对估计误差的影响, 利用该方法估计了无标度网络的拓扑结构、节点动力学方程和耦合强度. 结果表明, 基于稀疏贝叶斯学习的压缩传感方法克服了最小二乘法收敛速度慢、稳态误差大的缺点, 同时相对压缩传感方法对噪声有很强的鲁棒性; 在噪声环境下准确估计出了网络的拓扑结构、节点动力学方程和节点间耦合强度.

- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [3] Fang X L, Jiang Z L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 7330 (in Chinese) [方小玲, 姜宗来 2007 物理学报 **56** 7330]
- [4] Gao Z K, Jin N D 2009 *Phys. Rev. E* **79** 066303
- [5] Weng W G, Ni S J, Shen S F, Yuan H Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1938 (in Chinese) [翁文国, 倪顺江, 申世飞, 袁宏永 2007 物理学报 **56** 1938]
- [6] He M H, Zhang D M, Wang H Y, Li X G, Fang P J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5175 (in Chinese) [何敏华, 张端明, 王海艳, 李小刚, 方频捷 2010 物理学报 **59** 5175]
- [7] Gao Z K, Jin N D, Wang W X, Lai Y C 2010 *Phys. Rev. E* **82** 016210
- [8] Liu M X, Ruan J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2115
- [9] Pecora L M, Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
- [10] Jeong H, Tombor B, Albert R, Oltvai Z N, Barabasi A L 2000 *Nature* **407** 651
- [11] Guan X P, Peng H P, Li L X, Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26 (in Chinese) [关新平, 彭海朋, 李丽香, 王益群 2001 物理学报 **50** 26]
- [12] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元, 武相军 2006 物理学报 **55** 605]
- [13] Li J F, Li N, Cai L, Zhang B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7500 (in Chinese) [李建芬, 李农, 蔡理, 张斌 2008 物理学报 **57** 7500]
- [14] Wang X Y, Meng J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3780 (in Chinese) [王兴元, 孟娟 2009 物理学报 **58** 3780]
- [15] Huang D 2004 *Phys. Rev. E* **69** 067201
- [16] Chen S H, Lu J H 2002 *Phys. Lett. A* **299** 353
- [17] Dai D, Ma X K, Li F C, You Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2459 (in Chinese) [戴栋, 马西奎, 李富才, 尤勇 2002 物理学报 **51** 2459]
- [18] Gao F, Tong H Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 577 (in Chinese) [高飞, 童恒庆 2006 物理学报 **55** 577]
- [19] Li L X, Peng H P, Yang X Y, Wang X D 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 51 (in Chinese) [李丽香, 彭海朋, 杨义先, 王向东 2007 物理学报 **56** 51]
- [20] Alsing P M, Gavrielides A, Kovanis V 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1225
- [21] Kobravi H R, Erfanian A 2009 *Chaos* **19** 033111
- [22] Zhou J, Lu J 2007 *Physica A* **386** 481
- [23] Wu X Q 2008 *Physica A* **387** 997
- [24] Chen L, Lu J A, Tse C K 2009 *IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Express Briefs* **56** 310
- [25] Tang S X, Chen L, He Y G 2011 *Chin. Phys. B* **20** 110502
- [26] Yu D, Righero M, Kocarev L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 188701
- [27] Liu H, Lu J A, Lu J H, Hill D J 2009 *Automatica* **45** 1799
- [28] Gouesbet G, Letellier C 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4955
- [29] Lu J A, Lu J H, Xie J, Chen G R 2003 *Comput. Math. Appl.* **46** 1427
- [30] Bezruchko B P, Smirnov D A 2000 *Phys. Rev. E* **63** 016207
- [31] Wang W X, Yang R, Lai Y C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 154101
- [32] Wang W X, Yang R, Lai Y C, Kovanis V, Harrison M A F 2011 *EPL* **94** 48006
- [33] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289
- [34] Candès E 2006 *Proceedings of International Congress of Mathematicians* Madrid, Spain, August 22–30 2006 p1433
- [35] Candès E, Romberg J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 489
- [36] Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, Sun T, Kelly K F, Baraniuk R G 2008 *IEEE Signal Process. Magazine* **25** 83
- [37] Bajwa W, Haupt J, Sayeed A, Nowak R 2007 *IEEE Trans. Inform. Theory* **53** 3629

- [38] Berger C R, Wang Z H, Huang J Z, Zhou S L 2010 *IEEE Commun. Magazine* **48** 164
[39] Ji S H, Xue Y, Carin L 2008 *IEEE Trans. Signal Process.* **56** 2346

- [40] Tipping M E 2001 *J. Mach. Learn. Res.* **1** 211
[41] Candès E, Tao T 2005 *IEEE Trans. Inform. Theory* **51** 4203

Estimating topology of complex networks based on sparse Bayesian learning*

Hao Chong-Qing Wang Jiang[†] Deng Bin Wei Xi-Le

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(Received 13 July 2011; revised manuscript received 27 December 2011)

Abstract

We propose a method of estimating complex network topology with a noisy environment. Our method can estimate not only dynamical equation of the chaotic system and its parameters but also topology, the dynamical equation of each node, all the parameters, coupling direction and coupling strength of complex dynamical network composed of coupled unknown chaotic systems using only noisy time series. Estimating the system structure and parameter is regard as estimating the linear regression coefficients by reconstructing system with universal polynomial structure. Reconstruction algorithm of Bayesian compressive sensing is used for estimating the coefficients of regression polynomial. For the reconstruction from noisy time series we adopt relevance vector machine, namely we use sparse Bayesian learning to solve sparse undetermined linear equation to obtain the objects mentioned above. The Lorenz system and a scale free network composed of 200 Lorenz systems are provided to illustrate the efficiency. Simulation results show that our method improves the robust to noise compared with the compressive sensing and has fast convergence speed and tiny steady state error compared with the least square strategy.

Keywords: sparse Bayesian learning, Bayesian compressive sensing, topology estimation, complex networks

PACS: 89.75.Fb, 05.45.Tp

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61072012).

[†] E-mail: jiangwang@tju.edu.cn