

# 四能级量子制冷循环\*

何弦 何济洲<sup>†</sup> 肖宇玲

(南昌大学物理系, 南昌 330031)

(2011年11月24日收到; 2011年12月28日收到修改稿)

本文提出以两个 qubit 量子纠缠系统为工质的四能级制冷循环模型, 基于量子热力学第一定律和热纠缠概念, 分析了在循环中系统与外界交换的热量、输入功、制冷系数等热力学参数与量子纠缠之间的关系, 结果表明: 制冷系数等高线图是环状曲线, 随纠缠比  $r$  增加而非单调变化; 当相互作用常数  $J$  比较小时, 量子制冷机运行区间在  $c_1 > c_2$ , 当增加  $J$  值时, 制冷机运行区间在  $c_1 > c_2$  和  $c_1 < c_2$  两个区域; 最大制冷系数  $\epsilon_{\max}$  随  $J$  值增大而增加.

**关键词:** 量子纠缠, 制冷循环, 不可逆热力学

**PACS:** 03.65.Ud, 07.20.Pe, 05.70.Ln

## 1 引言

用量子体系作为工质构建量子热力学循环的研究已经开展多年, 一般研究的工质有量子气体<sup>[1,2]</sup>、自旋 1/2 系统<sup>[3-6]</sup>、谐振子系统<sup>[7-12]</sup>和势阱中的微观粒子<sup>[13]</sup>, 等等. 近年来, 随着量子力学、量子信息科学的不断发展, 量子热力学循环的研究拓展到了更广泛的领域. 比如, 2001 年 Scully 等人提出了利用量子负熵和量子相干, 实现从单一热源吸热完全转化为有用功的方案<sup>[14,15]</sup>; 2004 年 Kieu 证明了二能级系统在非平衡状态下可以释放出比平衡态下更多的功<sup>[16]</sup>.

量子纠缠是量子力学中的特殊现象, 在量子信息科学中有重要的地位<sup>[17-22]</sup>. 将量子纠缠系统作为工质来构建不同的量子热力学循环, 分析量子纠缠对热力学量的影响, 是近年来量子热力学循环研究的热点. 2007 年 Zhang 等人提出了一种以与外场相互作用的二量子比特一维各向同性的自旋  $-1/2$  海森堡链作为工质的热机<sup>[23]</sup>; Wang 等人研究了腔场中光场与二能级系统相互作用的纠缠量子热机<sup>[24]</sup>; Zhang 探讨了具有 D-M 相互作用的

两个自旋各向异性系统纠缠量子热机<sup>[25]</sup>; Thomas 等人分析了两自旋系统相互作用的耦合量子 Otto 热机<sup>[26]</sup>. 但是, 大部分前人的工作只是集中在纠缠量子热机的研究, 对纠缠量子制冷循环的研究比较少.

本文提出以两个 qubit 量子纠缠系统为工质的四能级制冷循环模型, 分析了在循环中系统与外界交换的热量、输入功、制冷系数等热力学参数与量子纠缠之间的关系, 并说明纠缠的量子制冷循环的制冷系数仍然小于卡诺制冷系数.

## 2 制冷循环模型

人们知道, 二量子比特一维各向同性的自旋 1/2 的海森堡 Hxx 链与外磁场  $B$  相互作用的哈密顿量为<sup>[17,18]</sup>

$$H = J(\sigma^1 \cdot \sigma^2 + \sigma^2 \cdot \sigma^1) + B(\sigma_z^1 + \sigma_z^2), \quad (1)$$

其中  $\sigma^j = (\sigma_x^j, \sigma_y^j, \sigma_z^j)$  是第  $i$  个自旋的泡利矩阵,  $J$  是相互作用常数,  $J > 0$  和  $J < 0$  分别表示反铁磁体和铁磁体,  $B$  是沿  $Z$  方向的磁场. 哈密顿量  $H$  的

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11065008 和 11174118) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: hjzhou@ncu.edu.cn

四个本征值为

$$\begin{aligned} E_1 &= -6J, & E_2 &= 2J - 2B, \\ E_3 &= 2J, & E_4 &= 2J + 2B. \end{aligned} \quad (2)$$

在基矢  $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$  空间, 密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho &= p_1 |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-| + p_2 |00\rangle \langle 00| \\ &+ p_3 |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + p_4 |11\rangle \langle 11|, \end{aligned} \quad (3)$$

此处,  $|\Psi_{\pm}\rangle = (|10\rangle \pm |01\rangle)/\sqrt{2}$  代表最大纠缠 Bell 态. 当四能级系统处于温度为  $T$  的热平衡态时, 系统各能级概率为 ( $k = 1$ )

$$p_i = \frac{e^{-E_i/T}}{\sum_i e^{-E_i/T}}, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (4)$$

因此, (3) 式可以写为

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \times \begin{pmatrix} e^{-\frac{2B}{T}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 + e^{8J/T}}{2} & \frac{1 - e^{8J/T}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - e^{8J/T}}{2} & \frac{1 + e^{8J/T}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2B}{T}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中  $Z = \text{Tr}[\exp(-H/kT)]$  是配分函数. 两个自旋之间的纠缠表示为

$$\begin{aligned} E &= - \left( \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2} \right) \log_2 \left( \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2} \right) \\ &- \left( \frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{2} \right) \log_2 \left( \frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $c$  表示 concurrence,

$$c = \max \left( \frac{e^{8J/T} - 3}{Z}, 0 \right). \quad (7)$$

显然,  $c$  的大小可以表示两个自旋之间的纠缠程度. 当  $J \leq 0$  时, concurrence 为零. 因此, 我们只研究  $J > 0$  的情况, 根据 (7) 式, 只有当  $J$  满足  $e^{8J/kT} > 3$  的条件时, 即  $J > 0.1373T$  时才有纠缠.

对有限能级的量子系统其哈密顿量可表示为

$$H = \sum_i E_i |i\rangle \langle i|, \quad (8)$$

$|i\rangle$  是指系统第  $i$  个本征态,  $E_i$  是与之相对应的本征能量. 哈密顿量的期望值为

$$U = \langle H \rangle = \sum_i p_i E_i, \quad (9)$$

$p_i$  表示系统处在第  $i$  个本征态的概率. 对 (9) 式微分, 得

$$dU = \sum_i (E_i dp_i + p_i dE_i). \quad (10)$$

将 (10) 式与热力学第一定律相比较,

$$dU = \bar{d}Q + \bar{d}W, \quad (11)$$

存在如下关系:

$$\bar{d}Q = \sum_i E_i dp_i, \quad (12)$$

$$\bar{d}W = \sum_i p_i dE_i. \quad (13)$$

因此, (10) 式就是热力学第一定律的量子表达形式 [16]. 从中可知, 各量子态上占有概率发生变化, 引起热交换; 各态本征能级发生变化, 引起系统做功.

我们以上述纠缠的四能级量子系统作为工质, 构造量子纠缠 Otto 制冷循环模型, 具体的四个过程如图 1 所示, 假设相互作用常数  $J$  在整个循环中保持不变, 区别于前人研究的纠缠量子循环模型 [18-20], 该循环从实验的角度来说, 更容易实现, 因为整个循环中只是改变外磁场.

在过程 1, 工质开始时每个本征态的概率是  $p_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 与热源  $T_1$  接触一段时间后, 每个能级的概率从  $p_{i0}$  变到了  $p_{i1}$ , 此时各能级大小保持  $E_{i1}$  不变, 同时外磁场保持为  $B_1$ . 在此过程中只有占有概率发生变化, 因此, 仅有热量交换, 设热量大小为  $Q_1$ .

在过程 2, 工质与热源分开, 经历一个量子绝热过程, 能级从  $E_{i1}$  变为  $E_{i2}$ , 根据量子绝热原理, 各量子态的概率保持不变 [27], 同时外磁场从  $B_1$  变为  $B_2$ . 因此, 此过程中仅有做功而无热交换.

在过程 3, 工质与热源  $T_2$  接触一段时间后, 每个本征态的概率从  $p_{i1}$  变为  $p_{i2}$  ( $p_{i2} = p_{i0}$ ), 此时系统各本征能级保持  $E_{i2}$  不变, 同时外磁场保持为  $B_2$ . 在此过程中只有热量交换, 设热量大小为  $Q_2$ .

在过程 4, 工质与低温热源分开, 经历一个量子绝热过程, 能级从  $E_{i2}$  变为  $E_{i1}$ , 同时外磁场从  $B_2$

变为了  $B_1$ . 此过程中仅有作功而无热交换.

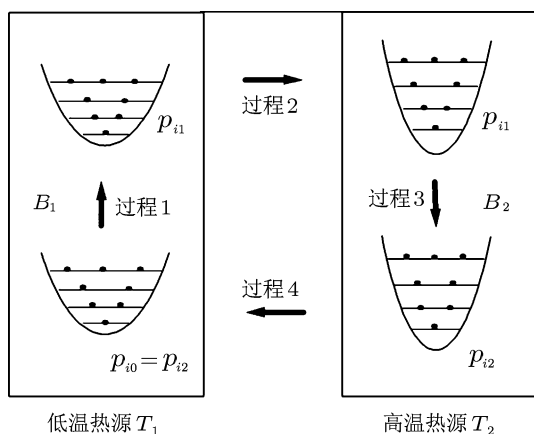


图1 两个 qubit 量子纠缠系统为工质的四能级制冷循环模型

根据 (2) 式, 可得在两个热交换过程中的本征能量为

$$\begin{aligned} E_{11} &= -6J, & E_{21} &= 2J - 2B_1, & E_{31} &= 2J, \\ E_{41} &= 2J + 2B_1, & E_{12} &= -6J, & E_{22} &= 2J - 2B_2, \\ E_{32} &= 2J, & E_{42} &= 2J + 2B_2, \end{aligned} \quad (14)$$

相应的占用概率为

$$\begin{aligned} p_{11} &= e^{8J/T_1}/Z_1, & p_{21} &= e^{2B_1/T_1}/Z_1, \\ p_{31} &= 1/Z_1, & p_{41} &= e^{-2B_1/T_1}/Z_1, \end{aligned} \quad (15)$$

和

$$\begin{aligned} p_{12} &= e^{8J/T_2}/Z_2, & p_{22} &= e^{2B_2/T_2}/Z_2, \\ p_{32} &= 1/Z_2, & p_{42} &= e^{-2B_2/T_2}/Z_2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中配分函数  $Z_i = 1 + e^{8J/T_i} + e^{2B_i/T_i} + e^{-2B_i/T_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

根据 (12) 式, 在过程 1 和 3 中热交换分别为

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_i E_{i1}(p_{i1} - p_{i2}) = 8J(p_{12} - p_{11}) \\ &\quad + 2B_1(p_{22} - p_{21} + p_{41} - p_{42}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \sum_i E_{i2}(p_{i2} - p_{i1}) = -8J(p_{12} - p_{11}) \\ &\quad - 2B_2(p_{22} - p_{21} + p_{41} - p_{42}). \end{aligned} \quad (18)$$

假设  $T_1 < T_2$ , 则有  $Q_1 > 0$  且  $Q_2 < 0$ . 制冷循环的输入功为

$$\begin{aligned} W &= -(Q_1 + Q_2) \\ &= 2(B_2 - B_1)(p_{22} - p_{21} + p_{41} - p_{42}). \end{aligned} \quad (19)$$

制冷系数 (COP) 为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{Q_1}{W} \\ &= \frac{8J(p_{12} - p_{11}) + 2B_1(p_{22} - p_{21} + p_{41} - p_{42})}{2(B_2 - B_1)(p_{22} - p_{21} + p_{41} - p_{42})}. \end{aligned} \quad (20)$$

过程 1 和 3 中纠缠相关的 concurrence 分别为  $c_1$  和  $c_2$ ,

$$c_1 = \begin{cases} 0, & e^{8J/kT_1} \leq 3, \\ \frac{e^{8J/kT_1} - 3}{1 + e^{-2B_1/kT_1} + e^{2B_1/kT_1} + e^{8J/kT_1}}, & e^{8J/kT_1} > 3, \end{cases} \quad (21)$$

$$c_2 = \begin{cases} 0, & e^{8J/kT_2} \leq 3, \\ \frac{e^{8J/kT_2} - 3}{1 + e^{-2B_2/kT_2} + e^{2B_2/kT_2} + e^{8J/kT_2}}, & e^{8J/kT_2} > 3. \end{cases} \quad (22)$$

### 3 基本热力学量与量子纠缠的关系

当  $J = 0$  时, 两个自旋粒子之间无量子纠缠, 则此制冷循环系数为  $\varepsilon_0 = \frac{B_1}{B_2 - B_1}$ . 考虑两自旋粒子间有相互纠缠的情况, 从 (21) 和 (22) 式可得

$$\cosh \frac{B_1}{T_1} = \frac{e^{8J/T_1}(1 - c_1) - 3 - c_1}{2c_1}, \quad (23)$$

$$\cosh \frac{B_2}{T_2} = \frac{e^{8J/T_2}(1 - c_2) - 3 - c_2}{2c_2}. \quad (24)$$

将 (14)—(16) 式代入 (17)—(20) 式, 则

$$Q_1 = 8J \left( \frac{e^{8J/T_2}}{Z_2} - \frac{e^{8J/T_1}}{Z_1} \right) + 2B_1 \left( \frac{e^{-2B_1/T_1} - e^{2B_1/T_1}}{Z_1} + \frac{e^{2B_2/T_2} - e^{-2B_2/T_2}}{Z_2} \right), \quad (25)$$

$$Q_2 = 8J \left( \frac{e^{8J/T_2}}{Z_2} - \frac{e^{8J/T_1}}{Z_1} \right) - 2B_2 \left( \frac{e^{-2B_1/T_1} - e^{2B_1/T_1}}{Z_1} + \frac{e^{2B_2/T_2} - e^{-2B_2/T_2}}{Z_2} \right), \quad (26)$$

$$W = 2(B_2 - B_1) \left( \frac{e^{-2B_1/T_1} - e^{2B_1/T_1}}{Z_1} + \frac{e^{2B_2/T_2} - e^{-2B_2/T_2}}{Z_2} \right), \quad (27)$$

$$\varepsilon = \frac{8J \left( \frac{e^{8J/T_2}}{Z_2} - \frac{e^{8J/T_1}}{Z_1} \right) + 2B_1 \left( \frac{e^{-2B_1/T_1} - e^{2B_1/T_1}}{Z_1} + \frac{e^{2B_2/T_2} - e^{-2B_2/T_2}}{Z_2} \right)}{2(B_2 - B_1) \left( \frac{e^{-2B_1/T_1} - e^{2B_1/T_1}}{Z_1} + \frac{e^{2B_2/T_2} - e^{-2B_2/T_2}}{Z_2} \right)}. \quad (28)$$

从 (23), (24) 式可以分别解出  $B_1$  和  $B_2$  作为  $c_1, c_2, T_1$ , 和  $T_2$  函数, 然后代入 (25)—(28) 式就可以获得基本热力学量  $Q_1, Q_2, W$ , 和  $\varepsilon$  作为  $c_1, c_2, T_1$ , 和  $T_2$  函数.

为了直观地考察纠缠对制冷循环的影响, 我们通过求数值解, 画出了  $Q_1, Q_2, W, \varepsilon$  等物理量随  $c_1, c_2$  变化的等高线图. 因为不满足  $Q_1 > 0, Q_2 < 0$  条件的情况都已经被排除了, 所以这些曲线都是不连续的. 另外, 我们定义  $r = c_1/c_2$  来衡量  $c_1$  和  $c_2$  之间的差异, 所有图中的对角虚线表示  $r = 1$  的情况.

从图 2—5 中可见, 当  $c_1$  或  $c_2$  其中任意一个固定时, 制冷循环中功  $W$  单调的随着  $r$  趋近于 1 而减小, 同时放热量  $Q_2$  随着  $r$  趋近于 1 而减小. 但是, 从低温热源的吸热  $Q_1$  和制冷系数  $\varepsilon$  是环状曲线, 这表明当  $c_1$  或  $c_2$  其中任意一个固定时, 这两个参数不会随着  $r$  增加而单调变化.

图 2 和图 3 可见, 当相互作用常数  $J$  比较小的时候, 所有的曲线都处于对角线  $r = 1$  以下的区域. 这表明, 只有当  $c_1 > c_2$  时量子制冷循环才有效, 显然, 当  $c_1 > c_2, W > 0$ , 外界对系统做功, 在此过程中热力学第二定律一直都满足.

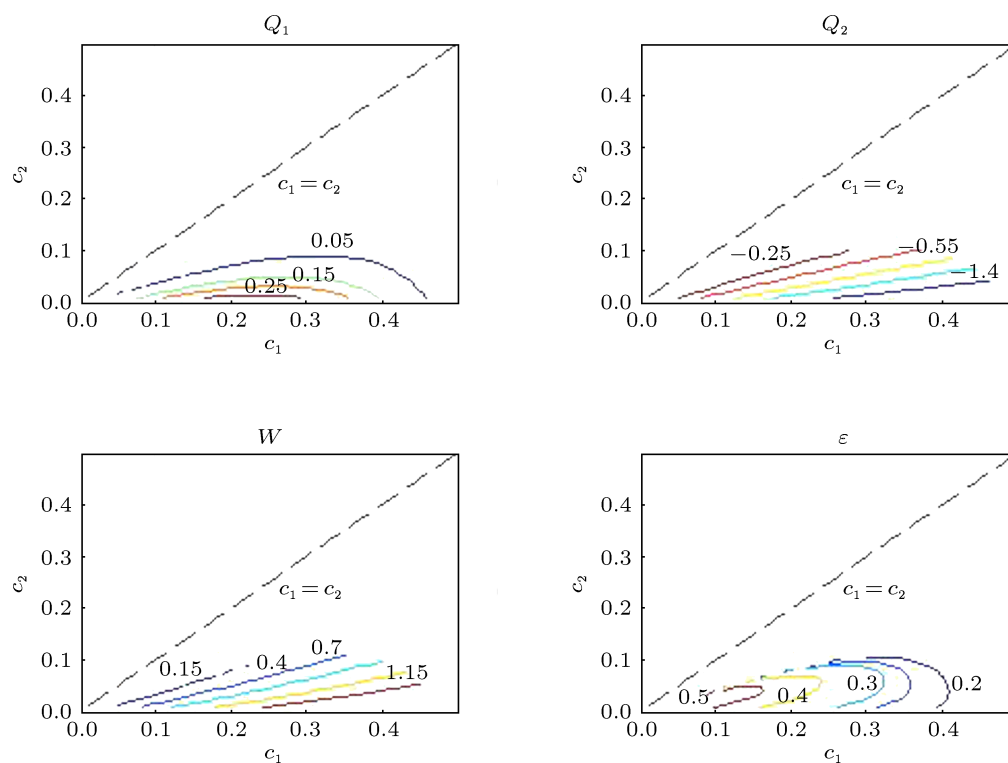


图 2 热交换量、输入功与制冷系数随着纠缠度变化的等高线图, 给定  $T_1 = 1, T_2 = 2, J = 0.5$

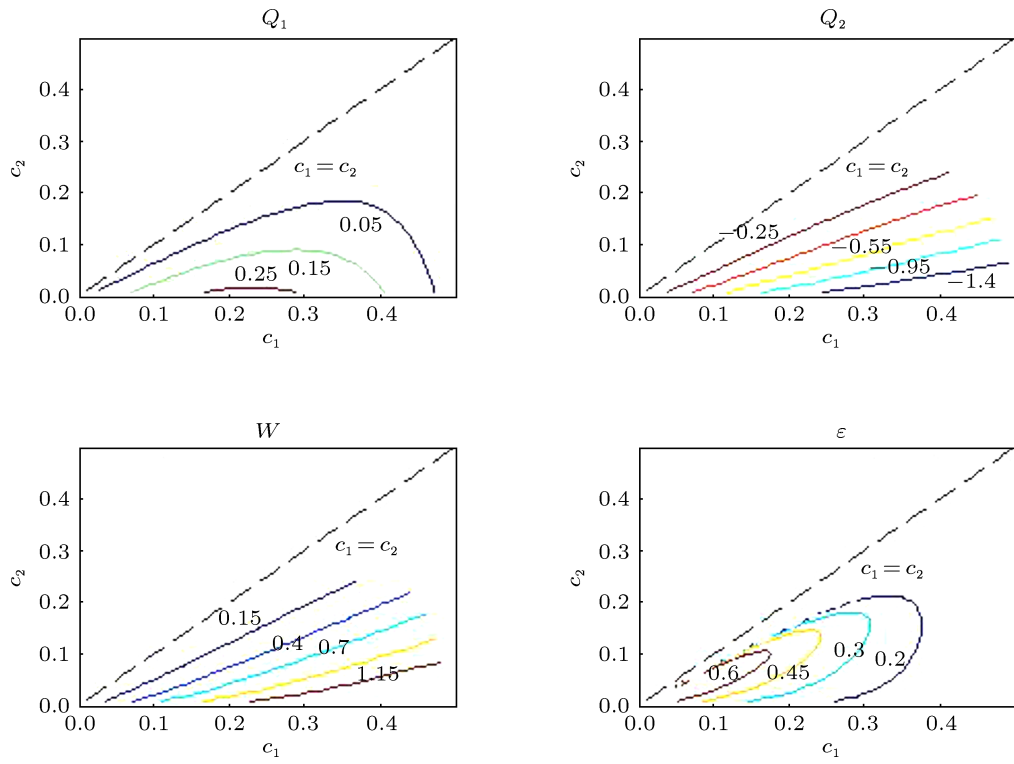


图3 热交换量、输入功与制冷系数随着纠缠度变化的等高线图, 给定  $T_1 = 1, T_2 = 2, J = 1$

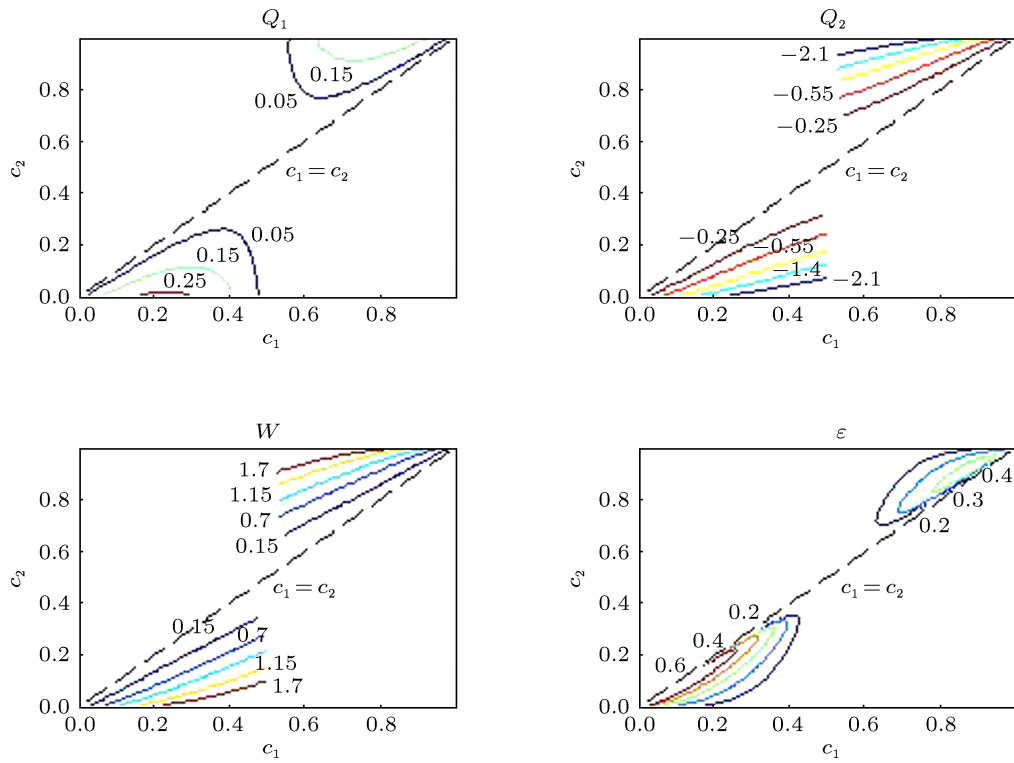


图4 热交换量、输入功与制冷系数随着纠缠度变化的等高线图, 给定  $T_1 = 1, T_2 = 2, J = 1.5$

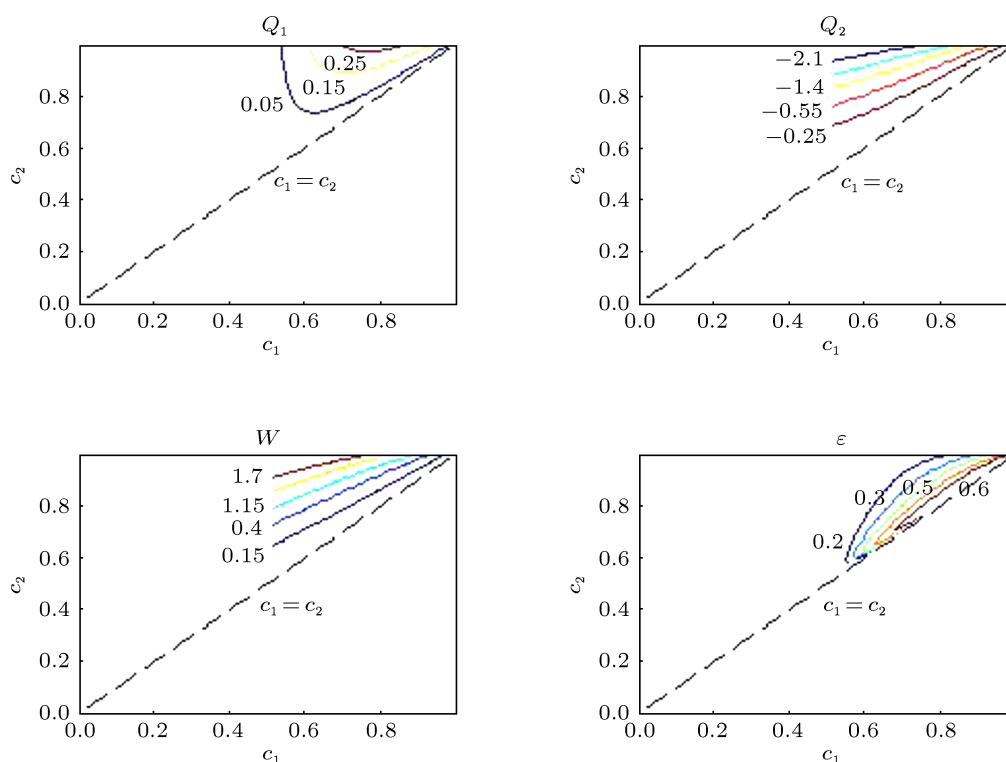


图5 热交换量、输入功与制冷系数随着纠缠度变化的等高线图, 给定  $T_1 = 1, T_2 = 2, J = 2.0$

当增加  $J$  的值, 制冷系数也不断增加, 但始终小于卡诺制冷系数  $\epsilon_c = T_1/(T_2 - T_1)$ . 从图 4 和图 5 可见, 当相互作用常数增大到某些值的时候, 比如  $J = 1.5$  及以上, 我们看到制冷循环发生在  $c_1 > c_2$  和  $c_1 < c_2$  两个区域, 但是  $J$  值增加到大于或等于 2.0 时, 制冷循环的区域变为只有  $c_1 < c_2$  这个区域.

#### 4 最大制冷系数

我们选择了几个具有代表性的  $J$  值, 如  $J = 1.0, 1.5,$  和  $2.0$ , 来分析制冷循环的最大制冷系数. 保持  $T_1 = 1$  不变, 通过数值求解得到了最大制冷系数  $\epsilon_{\max}$  随  $T_2$  的变化曲线, 如图 6 所示. 从图中可见, 在  $J$  值固定情况下最大制冷系数  $\epsilon_{\max}$  随  $T_2$  的增加而单调减小. 另外, 若  $T_2$  固定, 最大制冷系数  $\epsilon_{\max}$  随  $J$  值增大而增加, 逐渐接近卡诺制冷系数但不会超过卡诺制冷系数  $\epsilon_c = T_1/(T_2 - T_1)$ .

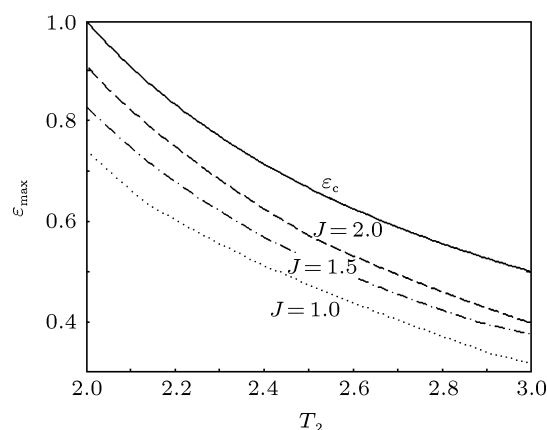


图6 最大制冷系数  $\epsilon_{\max}$  随着  $T_2$  的变化, 给定  $T_1 = 1, J = 1.0, 1.5, 2.0$

#### 5 结论

本文提出了一个基于量子纠缠相互作用的制冷循环模型, 工质是有纠缠相互作用的两个 qubit 系统, 工作在两个热源之间. 通过数值计算, 获得了基本热力学量随纠缠度的变化关系. 我们发现: 1) 当相互作用常数  $J$  比较小时, 量子制冷机运行区

间在  $c_1 > c_2$ ; 当增加  $J$  的值, 制冷机运行区间在  $c_1 > c_2$  和  $c_1 < c_2$  两个区域. 2) 最大制冷系数  $\varepsilon_{\max}$  随高温热源温度  $T_2$  的增加而单调减小;

若  $T_2$  固定, 最大制冷系数  $\varepsilon_{\max}$  随  $J$  值增大而增加. 3) 量子纠缠制冷循环的制冷系数仍然小于卡诺制冷系数.

- 
- [1] Sisman A, Saygin H 2001 *Appl. Energ.* **68** 367  
[2] Saygin H, Sisman A 2001 *J. Appl. Phys.* **90** 3086  
[3] He J Z, Chen J C, Hua B 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036145  
[4] Wu F, Chen L G, Sun F R, Wu C H, Li Q 2006 *Phys. Rev. E* **73** 016103  
[5] He J Z, Xin Y, He X 2007 *Appl. Energ.* **84** 176  
[6] Wu F, Chen L, Wu S, Sun F 2006 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **39** 4731  
[7] Lin B H, Chen J C 2003 *Phys. Rev. E* **67** 046105  
[8] He J Z, He X, Tang W 2009 *Sci. Chin. Ser. G* **52** 1317  
[9] Wang J H, He J Z, Mao Z Y 2007 *Sci. Chin. Ser. G* **50** 163  
[10] Rezek Y, Kosloff R 2006 *New J. Phys.* **8** 83  
[11] Geva E, Kosloff R 1992 *J. Chem. Phys.* **97** 4398  
[12] Liu X, Chen L, Wu F, Sun F 2009 *Sci. Chin. Ser. G* **52** 1976  
[13] Bender C M, Brody D C, Meister B K 2000 *J. Phys. A* **33** 4427  
[14] Scully M O 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 220601  
[15] Scully M O, Zubairy M S, Agarwal G S, Walther H 2003 *Science* **299** 862  
[16] Kieu T D 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140403  
[17] Xi X Q, Chen W X, Hao S R, Yue R H 2002 *Phys. Lett. A* **300** 567  
[18] Wang X G 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012313  
[19] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245  
[20] Arnesen M C, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901  
[21] Guo Z, Yan L S, Pan W, Luo B and Xu M F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060301 (in Chinese) [郭振, 闫连山, 潘伟, 罗斌, 徐明峰 2011 物理学报 **60** 060301]  
[22] Lu D M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090302 (in Chinese) [卢道明 2011 物理学报 **60** 090302]  
[23] Zhang T, Liu W T, Chen P X, Li C Z 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062102  
[24] Wang H, Liu S Q, He J Z 2009 *Phys. Rev. E* **79** 041113  
[25] Zhang G F 2008 *Eur. Phys. J. D* **49** 123  
[26] Thomas G, Johal R S 2011 *Phys. Rev. E* **83** 031135  
[27] Messiah A 1999 *Quantum Mechanics* (Dover, New York)

# A four-level quantum refrigeration cycle\*

He Xian He Ji-Zhou<sup>†</sup> Xiao Yu-Ling

(Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

(Received 24 November 2011; revised manuscript received 28 December 2011)

## Abstract

A four-level entangled quantum refrigeration cycle working with a two-qubit entangled system is proposed in this paper. Based on the first law of quantum thermodynamics and the concept of thermal entanglement, the relation between the quantum entanglement and the several thermodynamic quantities such as the heat transfer, the input work and the coefficient of performance is analyzed. It is found that the isoline of the coefficient of performance is the loop line and it no longer monotonically changes with the ratio of entanglement; in a small exchange constant  $J$  the operation region of the refrigerator is  $c_1 > c_2$  and in a larger exchange constant  $J$  the operation region of the refrigerator may be  $c_1 > c_2$  or  $c_1 < c_2$ ; the maximal coefficient of performance increases as the exchange constant increases.

**Keywords:** quantum entanglement, quantum refrigeration cycle, irreversible thermodynamics

**PACS:** 03.65.Ud, 07.20.Pe, 05.70.Ln

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11065008 and 11174118).

<sup>†</sup> E-mail: hjzhou@ncu.edu.cn