

三个耦合腔系统中的纠缠特性*

卢道明[†]

(武夷学院电子工程系, 武夷山 354300)

(2011年12月22日收到; 2012年1月2日收到修改稿)

本文研究将三个二能级原子分别囚禁在耦合腔 A, B 和 C 中, 腔中原子与腔场发生共振相互作用的情况。采用 Negativity 熵度量两子系统间的纠缠, 通过数值计算给出了两个原子之间和两个腔场之间的纠缠演化。讨论了腔场间的耦合强度对纠缠特性的影响。研究结果表明: 原子间的纠缠与腔场间的耦合系数间存在非线性关系。另一方面, 相邻腔场腔 A 和腔 B 间, 以及腔 B 和腔 C 间的纠缠随腔场间的耦合系数增大而减弱, 但非相邻腔场腔 A 和腔 C 间的纠缠却随腔场间的耦合系数增大而增强。

关键词: 量子光学, 二能级原子, 耦合腔, 量子纠缠

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv.

1 引言

量子纠缠是量子力学最显著的特性之一。它在验证量子力学基本原理方面具有重要的作用, 它也是量子隐形传态、量子编码、量子纠错和量子计算等量子信息工程的重要基础。纠缠态制备、度量和保持已成为量子信息处理的关键问题, 引起了人们广泛关注。例如 Zheng 提出了在热腔中产生多能级原子纠缠态^[1], Xu 等给出了利用腔 QED 产生两个三能级原子纠缠态的方案^[2]。在纠缠度量方面, 张英杰等人研究了多光子 Tavis-Cummings 模型中两原子纠缠演化^[3], Wu 等人研究了两运动原子与单模场相互作用系统中原子间的纠缠^[4], 本人讨论了原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性^[5]。另一方面, 因为腔 QED 技术是实现多比特纠缠、量子信息处理和量子计算等最有前途的技术之一。至今, 人们已提出了许多利用腔 QED 技术进行量子态制备和传送的方案。例如 Zheng 等给出了利用腔 QED 技术产生两原子纠缠态和进行量子信息处理的有效方案^[6], Yang 建议了传送两原子纠缠态的方案^[7]。近年来, 由于耦合腔 QED 系统中分离

原子与各自的腔耦合, 同时腔与腔之间通过特定方式的耦合更有利于实现对单个原子的操控, 避免了单个腔中操控多个原子有可能导致的相互干扰带来的影响。因此, 耦合腔 QED 系统引起了人们的广泛关注^[8–20]。例如 Ye 等提出了一种利用耦合腔系统产生两原子纠缠态的方案^[18], Song 等给出了产生连续变量纠缠态的方案^[20], Xiao 等研究了光纤耦合腔系统中两原子间的纠缠转移^[21]。本人研究了 Λ 形和 V 形三能级原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性^[22]。但对原子与三个耦合腔相互作用系统的研究尚未见报道。本文考虑将三个二能级原子分别囚禁在三个耦合腔中, 并且原子与腔场发生共振相互作用的情况。采用 Negativity 熵来度量两子系统间的纠缠, 利用数值计算方法给出了系统中两个原子之间和两个腔场之间纠缠的演化。

2 系统态矢的演化

我们研究如图 1 所示的系统。三个二能级原子(原子 1、原子 2 和原子 3)分别囚禁在耦合腔 A, B 和 C 中, 并且原子与腔场发生共振相互作用。在

* 福建省自然科学基金(批准号: 2011J01018)资助的课题。

† E-mail: daominglu79@hotmail.com.

旋波近似下, 在相互作用表象中系统的哈密顿为

$$\begin{aligned} H_I = & f_1(a_A s_1^+ + a_A^+ s_1^-) + f_2(a_B s_2^+ + a_B^+ s_2^-) \\ & + f_3(a_C s_3^+ + a_C^+ s_3^-) + J_1(a_A a_B^+ \\ & + a_A^+ a_B) + J_2(a_B a_C^+ + a_B^+ a_C), \end{aligned} \quad (1)$$

式中 a_L^\pm , a_L ($L = A, B, C$) 分别表示腔场的产生和湮没算符, s_i^+ 和 s_i^- ($i = 1, 2, 3$) 为第 i 个原子的跃迁算符. f_i ($i = 1, 2, 3$) 表示第 i 个腔中原子与腔场的耦合系数, J_i ($i = 1, 2$) 表示两个腔之间的耦合系数. 定义系统总激发数算符 $\hat{N} = \sum_{i=1}^3 |e\rangle_i \langle e| + a_A^+ a_A + a_B^+ a_B + a_C^+ a_C$, 因 $[\hat{N}, H_I] = 0$, 所以在系统演化过程中总激发数守恒. $|e\rangle_i$ 和 $|g\rangle_i$ ($i = 1, 2, 3$) 分别表示原子的激发态和基态.

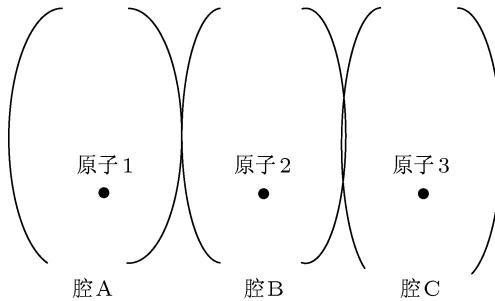


图 1 系统的示意图

假设初始时刻系统的激发数等于 1. 那么, 在演化过程中, 系统将保留在以 $|\varphi_1\rangle = |egg\rangle_{123}|000\rangle_{ABC}$, $|\varphi_2\rangle = |geg\rangle_{123}|000\rangle_{ABC}$, $|\varphi_3\rangle = |gge\rangle_{123}|000\rangle_{ABC}$, $|\varphi_4\rangle = |ggg\rangle_{123}|100\rangle_{ABC}$, $|\varphi_5\rangle = |ggg\rangle_{123}|010\rangle_{ABC}$, $|\varphi_6\rangle = |ggg\rangle_{123}|001\rangle_{ABC}$ 为基矢构成的子空间中. 在 $|\varphi_i\rangle$ 表示的状态中下标 1, 2, 3, A, B 和 C 分别表示对应原子和腔场的状态. 在这子空间中, 系统任意时刻的态矢可表示为

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle = & A|\varphi_1\rangle + B|\varphi_2\rangle + C|\varphi_3\rangle \\ & + D|\varphi_4\rangle + E|\varphi_5\rangle + F|\varphi_6\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

在相互作用绘景中, 系统的态矢演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle, \quad (3)$$

取 $\hbar = 1$. 设系统初始时刻处于 $|\varphi_1\rangle$ 态, 那么初始条件为: $A = 1, B = C = D = E = F = 0$. 为简单起见, 设 $f_1 = f_2 = f_3 = f, J_1 = J_2 = J$. 解方程 (3) 可得出

$$A = a \cos(\alpha t) + b \cos(\beta t) + \frac{1}{2} \cos(ft),$$

$$\begin{aligned} B = & -\frac{i}{J} \left[\frac{\alpha^2 - f^2}{\alpha} a \sin(\alpha t) + \frac{\beta^2 - f^2}{\beta} b \sin(\beta t) \right], \\ C = & a \cos(\alpha t) + b \cos(\beta t) - \frac{1}{2} \cos(ft), \\ D = & -\frac{i}{f} \left[a \alpha \sin(\alpha t) + b \beta \sin(\beta t) + \frac{f}{2} \sin(ft) \right], \\ E = & \frac{1}{fJ} [(\alpha^2 - f^2)a \cos(\alpha t) + (\beta^2 - f^2)b \cos(\beta t)], \\ F = & -\frac{i}{f} \left[a \alpha \sin(\alpha t) + b \beta \sin(\beta t) \right. \\ & \left. - \frac{f}{2} \sin(ft) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

式中,

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{f^2 + J^2 - P}, \\ \beta &= \sqrt{f^2 + J^2 + P}, \\ P &= J \sqrt{2f^2 + J^2}, \\ a &= \frac{P + J^2}{4P}, \\ b &= \frac{P - J^2}{4P}. \end{aligned}$$

3 原子与原子间纠缠的演化

在本文中, 我们采用 Negativity 熵, 即部分转置密度矩阵的负本征值来描述两子系统间的纠缠^[23], 即对于用密度矩阵 ρ 表示的两个子系统, ρ^T 表示 ρ 的部分转置矩阵, 若 λ_i 表示 ρ^T 的负本征值. 那么, 两子系统间的纠缠定义为

$$N = -2 \sum_i \lambda_i. \quad (5)$$

$N = 0$ 表示两子系统是分离的; $N = 1$ 表示两子系统处于最大纠缠态; $0 < N < 1$ 表示两子系统是纠缠的.

3.1 原子 1 与原子 2 间的纠缠

利用 (2) 式, 对原子 3、腔场 A、腔场 B 和腔场 C 的态求迹, 以 $|e\rangle_1|e\rangle_2$, $|e\rangle_1|g\rangle_2$, $|g\rangle_1|e\rangle_2$, $|g\rangle_1|g\rangle_2$ 为基矢, 可得到原子 1 和原子 2 构成的

系统的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A|^2 & AB^* & 0 \\ 0 & BA^* & |B|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

通过计算不难得出原子 1 和原子 2 间的纠缠量为

$$N_{12} = \sqrt{(|C|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2)^2 + 4|AB|^2} - (|C|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2). \quad (7)$$

利用(7)式, 可以计算出原子 1 和原子 2 间的纠缠量 N_{12} 随规范时间 ft 的演化。图 2 给出了当两个腔之间的耦合系数 J 分别取 $0.2f, 0.5f, 2f, 5f$ 时的计算结果。图 2(a), (b), (c), (d) 分别对应于 J 取 $0.2f, 0.5f, 2f, 5f$ 的情况。从图 2 中能够看出: 纠缠量 N_{12} 随时间作不规则振荡。当两个腔之间的耦合系数 J 较小时, N_{12} 随时间演化呈现出崩塌和恢复效应, 并且随 J 逐渐增大, 崩塌时间缩短, 当 J 大

于一定值后崩塌和恢复效应消失。另一方面, 随腔场间的耦合的增强, 纠缠量的平均值时而增大, 时而减小。例如 $J = 0.2f$ 时, $\bar{N}_{12} = 0.1197$; $J = 0.5f$ 时, $\bar{N}_{12} = 0.0912$; $J = 2f$ 时, $\bar{N}_{12} = 0.1229$; $J = 5f$ 时, $\bar{N}_{12} = 0.1713$ 。这表明原子 1 和原子 2 间的纠缠与腔场间的耦合系数间存在非线性关系。这一结果不同于两个耦合腔系统中原子间的纠缠演化^[5]。

3.2 原子 2 与原子 3 间的纠缠

同样利用(2)式, 对原子 1、腔场 A、腔场 B 和腔场 C 的态求迹, 以 $|e\rangle_2|e\rangle_3, |e\rangle_2|g\rangle_3, |g\rangle_2|e\rangle_3, |g\rangle_2|g\rangle_3$ 为基矢, 可得到原子 2 和原子 3 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |B|^2 & BC^* & 0 \\ 0 & CB^* & |C|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

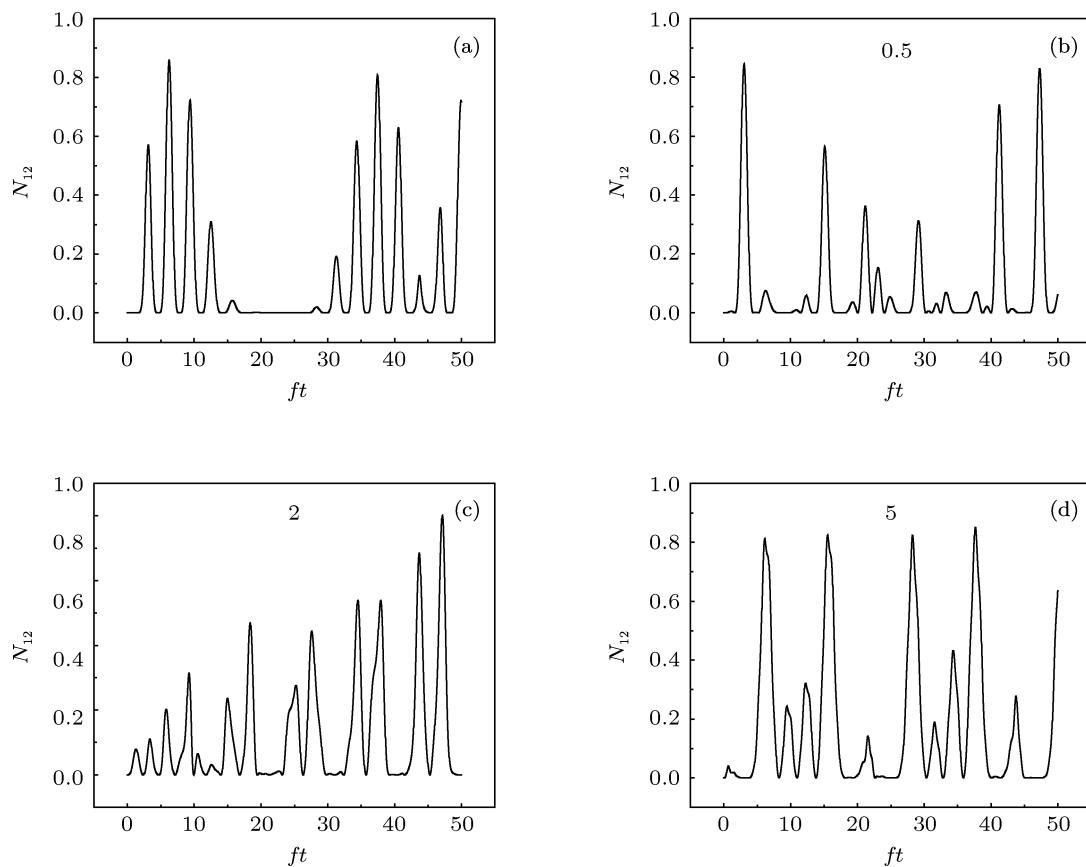


图 2 原子 1 与原子 2 间纠缠量 N_{12} 随规范时间 ft 的演化 (a) $J = 0.2f$; (b) $J = 0.5f$; (c) $J = 2.0f$; (d) $J = 5.0f$

原子 2 和原子 3 间的纠缠量为

$$N_{23} = \sqrt{(|A|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2)^2 + 4|CB|^2} - (|A|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2). \quad (9)$$

图 3 给出了 J 分别取定值 $0.2f$, $0.5f$, $2f$, $5f$ 时, 纠缠量 N_{23} 随规范时间 ft 的演化。从图 3 可以看出, 纠缠量 N_{23} 的演化类似于纠缠量 N_{12} 的演化。纠缠量 N_{23} 与腔场间的耦合系数间仍然存在非线性关系。例如 $J = 0.2f$ 时, 纠缠量平均值 $\bar{N}_{23} = 0.1060$; $J = 0.5f$ 时, $\bar{N}_{23} = 0.0776$; $J = 2f$ 时, $\bar{N}_{23} = 0.1733$; $J = 5f$ 时, $\bar{N}_{23} = 0.1834$ 。进一步研究表明, 原子 1 和原子 3 间的纠缠演化与原子 2 和原子 3 间的纠缠演化有类似的演化规律。

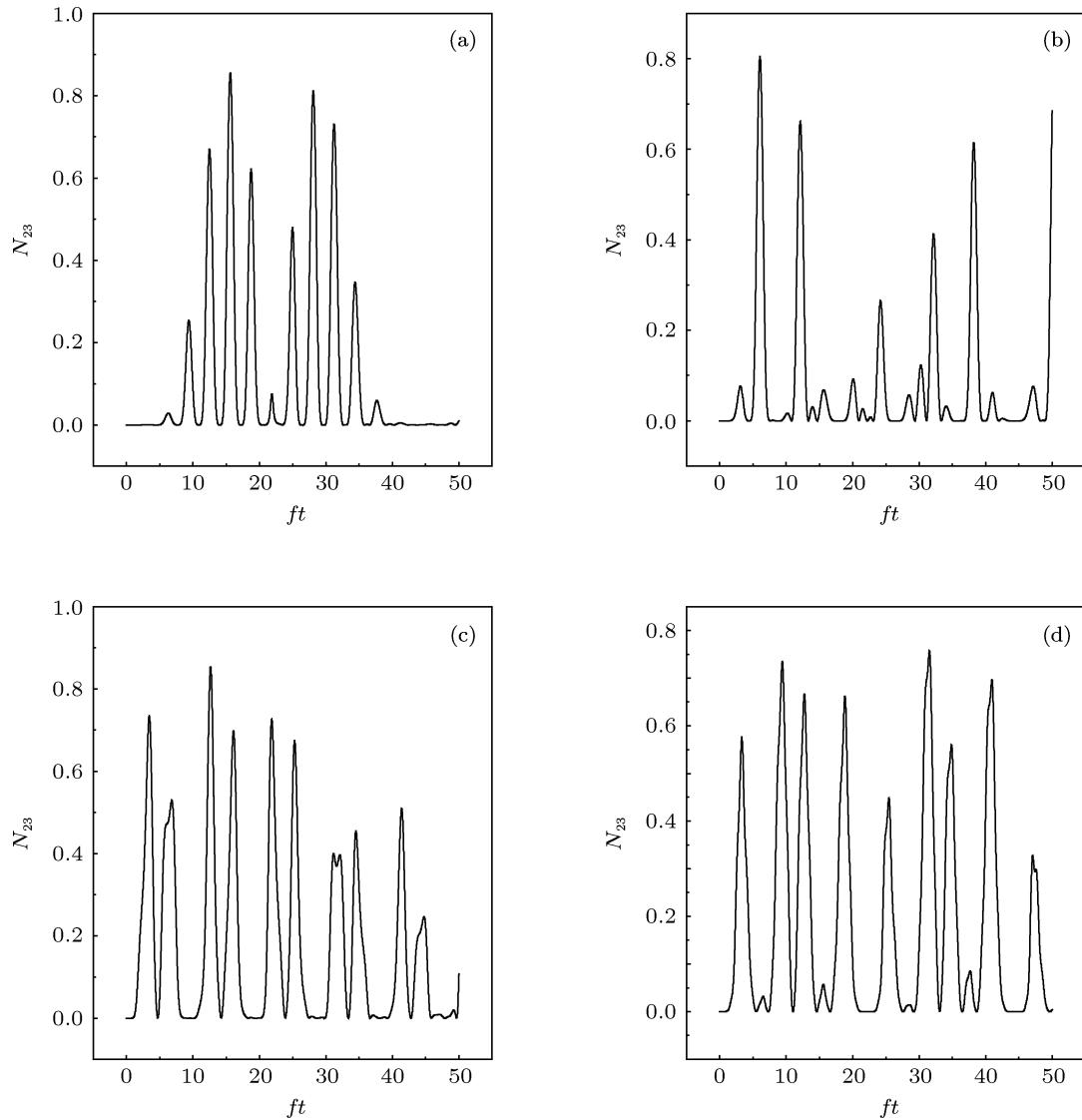


图 3 原子 2 与原子 3 间纠缠量 N_{23} 随规范时间 ft 的演化 (a) $J = 0.2f$; (b) $J = 0.5f$; (c) $J = 2.0f$; (d) $J = 5.0f$

4 腔场与腔场间纠缠的演化

4.1 腔场 A 和腔场 B 间的纠缠

两腔场间的纠缠仍然采用 Negativity 熵来描述。利用(2)式, 对原子 1、原子 2、原子 3 和腔场 C 的态求迹, 以 $|1\rangle_A|1\rangle_B$, $|1\rangle_A|0\rangle_B$, $|0\rangle_A|1\rangle_B$, $|0\rangle_A|0\rangle_B$ 为基矢, 可得到腔 A 和腔 B 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |D|^2 & DE^* & 0 \\ 0 & ED^* & |D|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |F|^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

通过计算可得到腔 A 和腔 B 间的纠缠量为

$$N_{AB} = \sqrt{(|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |F|^2)^2 + 4|DE|^2} - (|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |F|^2). \quad (11)$$

通过数值计算, 纠缠量 N_{AB} 的演化展示在图 4 中。图中 (a), (b), (c), (d) 分别对应于 J 取 $0.2f$, $0.5f$, $2f$, $5f$ 的情况。从图 4 中可以看出; 纠缠量 N_{AB} 随时间作不规则振荡。当两个腔之间的耦合系数 J 较小时, N_{AB} 随时间演化同样呈现出崩塌和恢复效应, 并且随 J 逐渐增大, 崩塌时间缩短, J 大于一定值后崩塌和恢复效应消失。另一方面, 随腔场间的耦合的增强, 振荡频率加快, 纠缠量的平均值减小。例如 $J = 0.2f$ 时, $\bar{N}_{AB} = 0.1151$; $J = 0.5f$ 时, $\bar{N}_{AB} = 0.0775$; $J = 2f$ 时, $\bar{N}_{AB} = 0.0184$; $J = 5f$ 时, $\bar{N}_{AB} = 0.0302$ 。这表明随腔场间的耦合系数增

大, 腔 A 和腔 B 间的纠缠减弱。这一结果与两个耦合腔系统中腔场间的纠缠演化一致 [5]。

4.2 腔场 B 和腔场 C 间的纠缠

同样利用 (2) 式, 对原子 1、原子 2、原子 3 和腔场 A 的态求迹, 以 $|1\rangle_B|1\rangle_C$, $|1\rangle_B|0\rangle_C$, $|0\rangle_B|1\rangle_C$, $|0\rangle_B|0\rangle_C$ 为基矢, 可得到腔 B 和腔 C 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |E|^2 & EF^* & 0 \\ 0 & FE^* & |F|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

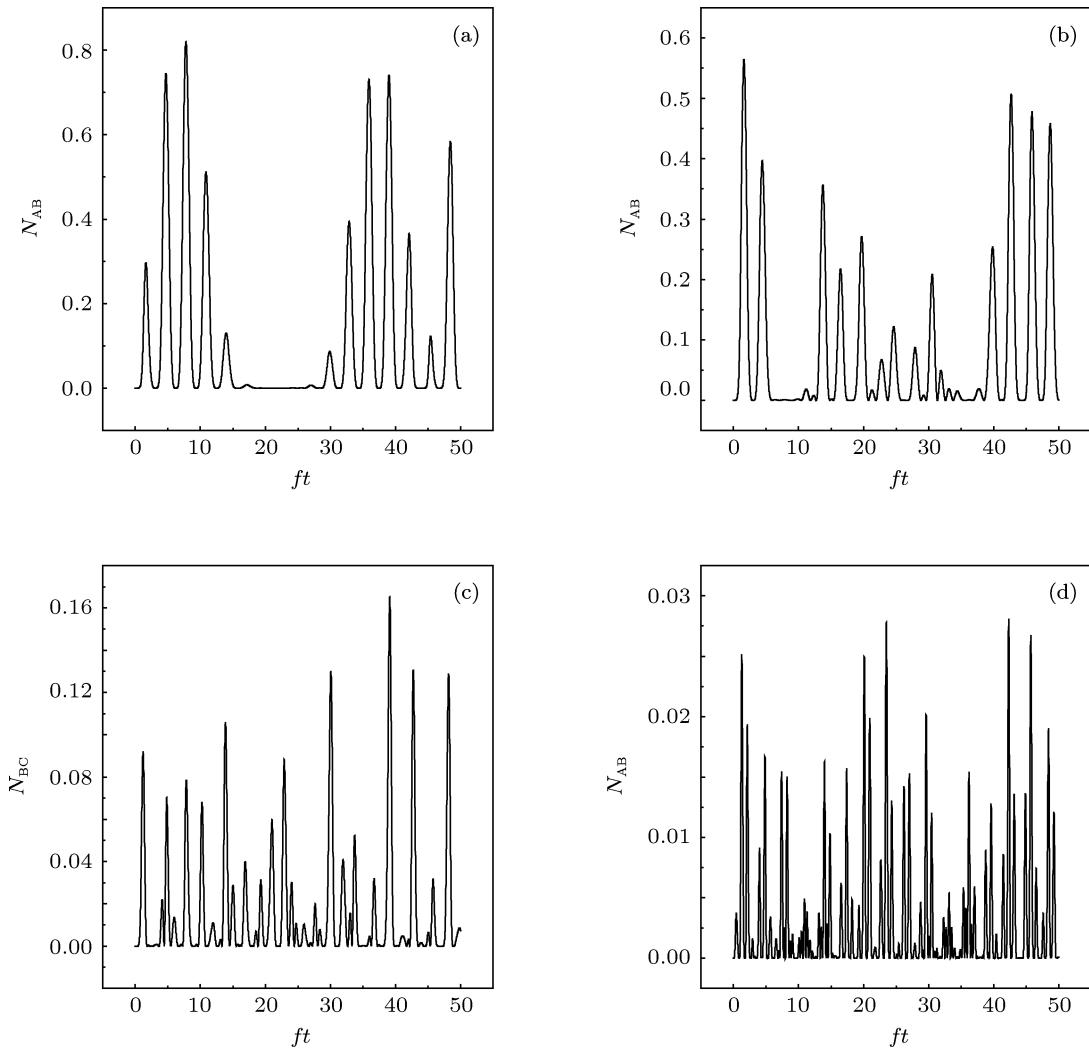


图 4 腔场 A 和腔场 B 间纠缠量 N_{AB} 随规范时间 ft 的演化 (a) $J = 0.2f$; (b) $J = 0.5f$; (c) $J = 2.0f$; (d) $J = 5.0f$

腔 B 和腔 C 间的纠缠量为

$$N_{BC} = (\sqrt{(|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2)^2 + 4|EF|^2} - (|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2)). \quad (13)$$

图 5 给出了 J 分别取定值 $0.2f, 0.5f, 2f, 5f$ 时, 纠缠量 N_{BC} 随规范时间 ft 的演化. 从图 5 可以看出, 纠缠量 N_{BC} 的演化类似于纠缠量 N_{AB} 的演化. 随腔场间的耦合的增强, 振荡频率加快, 曲线的峰值和重心下移, 纠缠量的平均值减小. 这表明随腔场间的耦合系数增大, 腔 B 和腔 C 间的纠缠减弱.

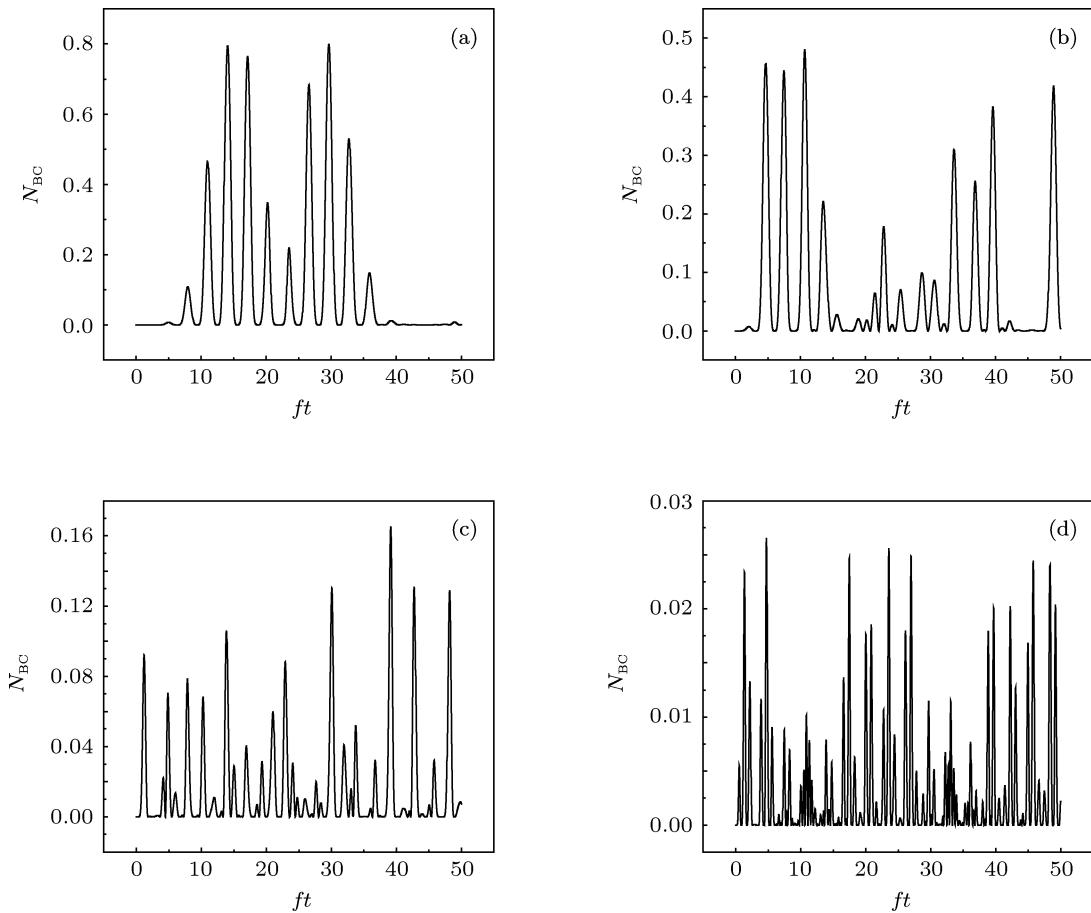


图 5 腔场 B 和腔场 C 间纠缠量 N_{BC} 随规范时间 ft 的演化 (a) $J = 0.2f$; (b) $J = 0.5f$; (c) $J = 2.0f$; (d) $J = 5.0f$

通过计算可得到腔 A 和腔 C 间的纠缠量为

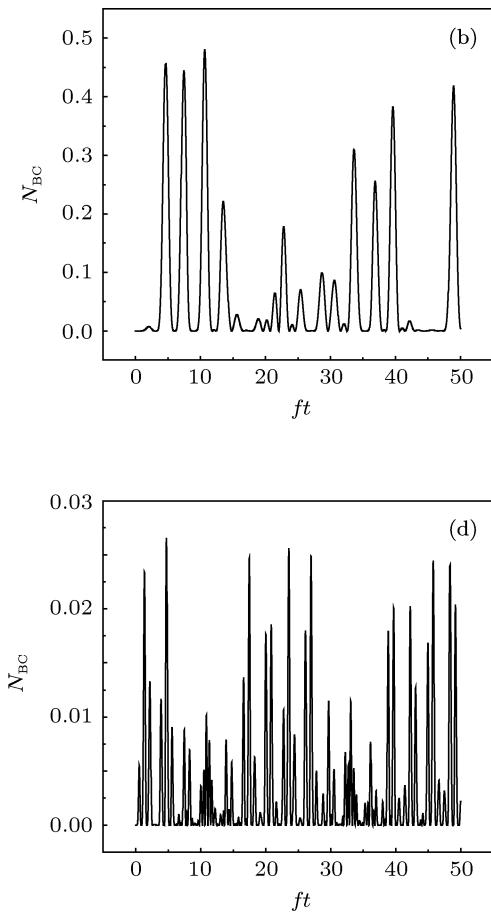
$$N_{AC} = (\sqrt{(|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |E|^2)^2 + 4|DF|^2} - (|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |E|^2)). \quad (15)$$

腔 A 与腔 C 间的纠缠量 N_{AC} 的演化, 如图 6 所示. 从图 6 中可以看出: 纠缠量 N_{AC} 随规范时间 ft 的演化不同于 N_{AB} 和 N_{BC} 的演化. 随腔

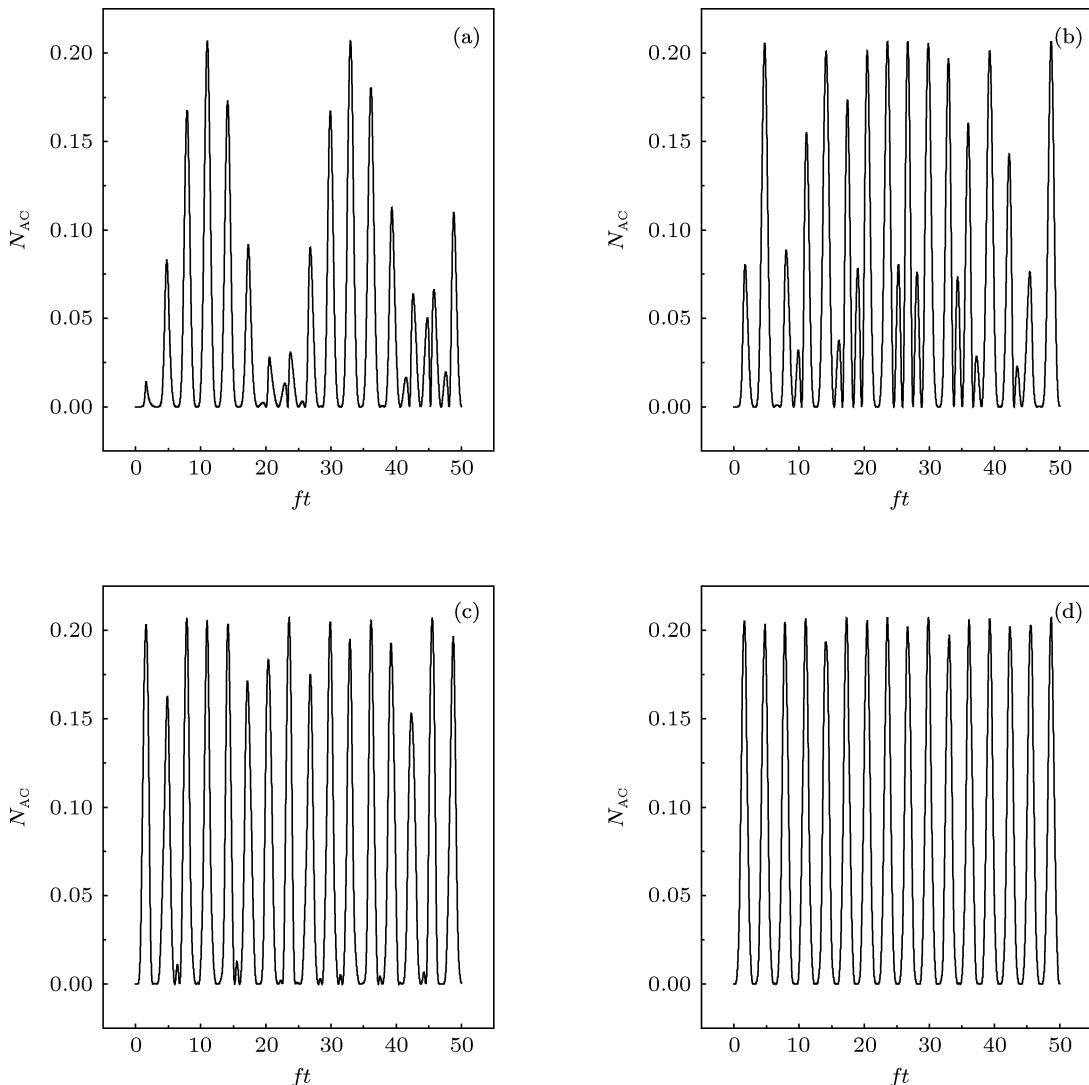
4.3 腔场 A 和腔场 C 间的纠缠

利用 (2) 式, 对原子 1、原子 2、原子 3 和腔场 B 的态求迹, 以 $|1\rangle_A|1\rangle_C, |1\rangle_A|0\rangle_C, |0\rangle_A|1\rangle_C, |0\rangle_A|0\rangle_C$ 为基矢, 可得到腔 A 和腔 C 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |D|^2 & DF^* & 0 \\ 0 & FD^* & |F|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |E|^2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$



场间的耦合的增强, N_{AC} 随规范时间 ft 的演化的周期性逐渐增强. 另一方面, 随腔场间的耦合的增强, 曲线重心上移和纠缠量的平均值增大. 例如, $J = 0.2f$ 时, $\bar{N}_{AC} = 0.0370$; $J = 0.5f$ 时, $\bar{N}_{AC} = 0.0582$; $J = 2f$ 时, $\bar{N}_{AC} = 0.0638$; $J = 5f$ 时, $\bar{N}_{AC} = 0.0704$. 这表明随腔场间的耦合的增强, 腔场 A 与腔场 C 间的纠缠增强.

图 6 腔场 A 和腔场 C 间纠缠量 N_{AC} 随规范时间 ft 的演化 (a) $J = 0.2f$; (b) $J=0.5f$; (c) $J = 2.0f$; (d) $J = 5.0f$

5 结 论

本文考虑将三个二能级原子分别囚禁在三个耦合腔 A, B 和 C 中, 每个原子与各自的腔场发生共振相互作用的情况. 在相互作用绘景中, 通过解薛定谔方程给出了激发数为 1 时系统态矢的演化. 利用 Negativity 熵来描述两个子系统间的纠缠. 为了研究耦合腔的耦合系数的变化对两个子系统间纠缠演化的影响, 通过数值计算给出了耦合腔的耦

合系数取不同定值时两个子系统间纠缠随规范时间 ft 的演化曲线. 研究结果表明: 原子间的纠缠与腔场间的耦合系数间存在非线性关系. 这一结果不同于两个耦合腔系统中原子间的纠缠演化. 另一方面, 随腔场间的耦合系数增大, 相邻腔场腔 A 和腔 B 间, 以及腔 B 和腔 C 间的纠缠减弱, 这一结果与两个耦合腔系统中腔场间的纠缠演化一致. 但非相邻腔场腔 A 和腔 C 间的纠缠却随腔场间的耦合系数增大而增强.

- [1] Zheng S B 2003 *Phys. Rev. A* **68** 035801
- [2] Zuo X B, Pahlke K, Mathis W 2003 *Phys. Rev. A* **67** 044301
- [3] Zhang Y J, Zhou Y, Xia Y J 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 21 (in Chinese) [张英杰, 周原, 夏云杰 2008 物理学报 **57** 21]

- [4] Wu C Fang M F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020309
- [5] Lu D M 2011 *Acta. Phys. Sin.* **60** 090302 (in Chinese) [卢道明

- 2011 物理学报 **60** 090302]
- [6] Zheng S B, Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
 - [7] Yang Z B 2007 *Chin. Phys.* **16** 329
 - [8] Zheng S B, Yang Z B, Xia Y 2010 *Phys. Rev. A* **81** 015804
 - [9] Yin Z Q, Li F L 2007 *Phys. Rev. A* **75** 012324
 - [10] Zhang B 2010 *Optics Communications* **283** 196
 - [11] Li Wen-An 2010 *Optics Communications* **283** 2978
 - [12] Ogden C D, Irish E K, Kim M S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063805
 - [13] Liao C G, Yang Z B, Luo C L 2011 *Optics Communications* **284** 1920
 - [14] Hartmann M J, Brandao F G S L, Plenio M B 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 160501
 - [15] Zheng S B, Yang C P, Nori F 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042327
 - [16] Zhang Y Q, Hu Z D, Xu J B 2011 *Int. J. Theor. Phys.* **50** 2438
 - [17] Pellizzari T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 5242
 - [18] Ye S Y, Zhong Z R, Zheng S B 2008 *Phys. Rev. A* **77** 014303
 - [19] Ciccarello F 2011 *Phys. Rev. A* **83** 043802
 - [20] Song J, Sun X D, Xia Y 2011 *Phys. Rev. A* **83** 052309
 - [21] Xiao X, Fang M F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4695
 - [22] Lu D M 2011 *Acta. Phys. Sin.* **60** 120303 (in Chinese) [卢道明 2011 物理学报 **60** 120303]
 - [23] Zou Y 2009 *Chin. J. Quantum Electronics* **26** 69 (in Chinese) [邹艳 2009 量子电子学报 **26** 69]

Entanglement properties in the system of atoms interacting with three coupled cavities*

Lu Dao-Ming[†]

(Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China)

(Received 22 December 2011; revised manuscript received 2 January 2012)

Abstract

The entanglement dynamics of the system composed of three two-level atoms resonantly interacting with three coupled cavities is investigated in this paper. The influence of coupling constant between cavities on the entanglement between atoms and that between cavities are discussed. The results obtained using the numerical method show that the entanglement between atoms has a nonlinear relation with increase of the cavity-cavity coupling coefficient. On the other hand, the entanglement between cavity A and cavity B and the entanglement between cavity B and cavity C weaken with the increase of the coupling constant between cavities, but the entanglement between cavity A and cavity C strengthens with the increase of cavity-cavity coupling coefficient.

Keywords: quantum optics, two-level atom, coupling cavities, quantum entanglement

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv.

* Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province (Grant No. 2011J01018).

† E-mail: daominglu79@hotmail.com