

旋转致密双星的引力波特征*

王玉诏 伍歆[†] 钟双英

(南昌大学物理系, 南昌 330031)

(2011年12月12日收到; 2012年2月2日收到修改稿)

研究了轨道和旋转效果到 2.5 阶后牛顿旋转致密双星拉格朗日动力学与引力波的关系, 分析了有序和混沌轨道的引力波特征. 发现当加速度不考虑辐射项时, 有序双星系统辐射的引力波具有周期或拟周期的特征, 而混沌双星系统辐射的引力波却具有明显的混沌特征. 当加速度含有辐射项贡献时, 双星必会出现并合现象. 此时, 原保守有序双星系统需较长时间才能完成并合过程, 引力波形在双星并合前仍保留拟周期的基本特点; 然而, 原保守混沌双星系统仅在较短时间内就会并合, 但因并合时间太短, 无法获取足够的动力学信息导致引力波形的特征不易分辨.

关键词: 引力波, 后牛顿近似, 旋转致密双星, 混沌

PACS: 04.30.-w, 04.25.Nx, 04.70.-s, 05.45.-a

1 引言

脉冲双星 PSR 1913+16 轨道变化的观测只能作为爱因斯坦广义相对论所预言的引力波存在的间接依据, 然而直至目前科学家还不能直接从实验室中找到引力波存在的确凿证据. 大质量、高速运动的天体则成为科学家首选的天然引力波源, 它们主要分为爆发型引力波和连续性引力波两种. 前者属于脉冲引力波, 是由一些非周期性的质量系统在质量四极矩发生变化时产生的, 如在超新星爆发与中子星和黑洞等致密星的形成阶段都会有脉冲引力波产生; 后者意味连续引力辐射, 是由一些周期性物质系统的质量四极矩发生变化产生的, 如致密天体、双星系统的四极矩发生周期变化时都会连续引力波辐射. 也就是说, 这两种引力波本质上都是因时空度规畸变, 即天体质量四极矩发生变化的传播而产生的. 脉冲引力波具有很大的随机性, 不利于探测, 故理论上更聚焦于连续引力波的研究. 致密双星系统的运动状态是最为确定的, 具备作为天然连续引力波源的有利条件. 因此, 致密双星系统的动力学演化与引力波辐射成为科学家们当前研究的新热点.

实验物理和理论物理学领域都十分关注引力波的研究. 实验物理致力于激光干涉引力波观测站 (LIGO) 等引力波探测计划, 着手对引力波进行实验检测验证. 理论物理需要建立高精度的引力波理论模板, 便于匹配和处理实验观测资料及解释观测现象. 考虑到后牛顿近似是获得高精度理论模块的主要途径, 许多研究者从事旋转致密双星后牛顿动力学模型和后牛顿引力波形^[1-4]的建立工作. 例如, Kidder^[1] 利用后牛顿展开讨论了相对坐标系内加速度方程近似到 2.5PN 阶 (即 2.5 阶后牛顿), 而旋转进动方程近似到 1.5PN 阶的轨旋耦合和旋转 - 旋转耦合对致密双星系统动力学的影响及其对引力波辐射的影响. Will 等^[2] 利用后牛顿展开和质量四极矩也推导出 2PN 阶的引力波形. 随后, Tagoshi 等^[5] 利用后牛顿度规在质心坐标系下导出广义相对论旋转致密双星系统的 2.5PN 阶演化方程. Faye 等^[6] 在相对坐标系和质心坐标系内分别给出高阶轨旋耦合的运动方程和高阶旋转作用的旋转进动方程. 他们还进一步分析了黑洞二体的引力辐射效应^[7]. 这些理论模型是从谐和坐标下的拉格朗日动力学出发建立的, 当然, 也可从 Arnowitt-Deser-Misner (ADM) 坐标下的哈密顿动力学^[8,9] 来建立, 它们将为引力波的探测提供较

* 国家自然科学基金 (批准号: 10873007, 11173012, 11178002, 11165011) 和南昌大学创新团队项目资助的课题.

[†] E-mail: xwu@ncu.edu.cn

为精确的理论模板. 另一方面, 引力波是源于天体质量四极矩辐射产生的, 而四极矩主要由双星演化的状态量 (如坐标和速度) 确定, 故双星演化的有序和混沌动力学信息会在引力波中得到体现. 鉴于此, 许多文章涉及引力波与混沌的关系研究 [10–15]. 天体的混沌运动可望借助引力波进行观测, 但同时给引力波数据中的噪声剔除带来麻烦. 于是, 混沌研究成为相对论天体物理的有趣课题. 曾经一度存在旋转致密双星混沌与否的争议 [16–20], 但这些争议现已澄清 [21–26], 认为旋转效果对双星演化有重要影响, 是诱导混沌的重要因素. 其他相对论引力系统的混沌现象亦受到关注 [27–31].

除了文献 [10–14] 研究了引力波与有序和混沌动力学的关系外, 近来文献 [15] 探讨了 2PN 阶旋转致密双星哈密顿系统的引力波形与轨道类型之间的关系. 然而, 这些研究结果大都来源于保守系统情形, 很少或基本上不涉及 2.5PN 阶引力辐射项对双星演化的影响. 事实上, 引力波的传播本身就是能量的一种传播形式. 显然, 致密双星系统在辐射引力波过程中会伴随着能量损耗. 所以, 在研究致密双星演化的过程中考虑耗散项将更符合实际一些. 基于此, 文献 [32] 分析了三黑洞含引力辐射项的后牛顿哈密顿系统的引力波特征, 但是没有考虑旋转效果的作用, 更没有探讨混沌对引力波的影响. 为了弥补这些工作的不足, 本文的主要目的就是考察轨道和旋转效果均展开到 2.5 阶的后牛顿拉格朗日旋转致密双星系统 [6] 所辐射的引力波特征.

2 旋转致密双星的后牛顿演化方程

在谐和坐标下质量分别为 m_1 和 m_2 且 $m_1 \geq m_2$ 的两致密旋转天体的相对运动方程可由拉格朗日日后牛顿构型表为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_{\text{PN}}^{(1)} + \mathbf{a}_{\text{SO}}^{(1.5)} + \mathbf{a}_{\text{PN}}^{(2)} + \mathbf{a}_{\text{SS}}^{(2)} + \mathbf{a}_{\text{SO}}^{(2.5)} + \mathbf{a}_{\text{RR}}^{(2.5)}, \quad (1)$$

上式加速度表达中, 上标表示后牛顿展开的阶数, 下标分别表示牛顿项 (N)、轨道后牛顿项 (PN)、轨道与旋转耦合项 (SO)、旋转与旋转耦合项 (SS) 及引力辐射项 (RR). 文献 [1] 提供了关于加速度中所有轨道项的详细表达式, 具体如下:

$$\mathbf{a}_N = -\frac{M}{r^2} \mathbf{n}, \quad (2)$$

$$\mathbf{a}_{\text{PN}}^{(1)} = -\frac{M}{r^2} \left\{ \mathbf{n} \left[(1 + 3\eta)v^2 - (4 + 2\eta)\frac{M}{r} - \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2 \right] - (4 - 2\eta)\dot{r}\mathbf{v} \right\}, \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_{\text{PN}}^{(2)} = -\frac{M}{r^2} \left\{ \mathbf{n} \left[\frac{3}{4}(12 + 29\eta)\left(\frac{M}{r}\right)^2 + (3\eta - 4\eta^2)v^4 + \frac{15}{8}(\eta - 3\eta^2)\dot{r}^4 \right] - \frac{3}{2}(3\eta - 4\eta^2)v^2\dot{r}^2 - \frac{1}{2}(13\eta - 4\eta^2)\frac{M}{r}v^2 - (2 + 25\eta + 2\eta^2)\frac{M}{r}\dot{r}^2 \right] - \frac{1}{2}\dot{r}\mathbf{v} \left[(15\eta + 4\eta^2)v^2 - (4 + 41\eta + 8\eta^2)\frac{M}{r} - 3(3\eta + 2\eta^2)\dot{r}^2 \right] \right\}, \quad (4)$$

$$\mathbf{a}_{\text{RR}}^{(2.5)} = \frac{8}{5}\eta\frac{M^2}{r^3} \left[\dot{r}\mathbf{n} \left(\frac{2}{3}\frac{M}{r} - 25\dot{r}^2 + 18v^2 \right) + \mathbf{v} \left(15\dot{r}^2 - 6v^2 + 2\frac{m}{r} \right) \right], \quad (5)$$

这里, $M = m_1 + m_2$ 为二体的总质量; 其他质量参数约定为 $\delta m = m_1 - m_2$, $\nu = \delta m/M$, $\eta = (1 - \nu^2)/4$ 及 $\mu = m_1 m_2/M$; 二体的质量比 $\beta = m_2/m_1$; 此外, \mathbf{x} 和 \mathbf{v} 分别是 m_1 与 m_2 的相对坐标和相对速度; $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ 表示单位径矢, 其中 $r = |\mathbf{x}|$, $\dot{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$. 文中所有的距离和时间都用 M 来测量, 于是速度便成为一个无量纲量. 引力常数 G 和光速 c 都取为 1.

还应当注意每一体又有它本身的旋转, 用变量 $\mathbf{S}_b = \chi_b m_b^2 \hat{\mathbf{S}}_b$ ($b = 1, 2$) 来表示, 其中 $\hat{\mathbf{S}}_b$ 为无量纲的单位旋转矢量, 无量纲自旋参数 χ_b 取值在 $[0, 1]$ 之间. 同时, 我们还约定

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2, \quad (6)$$

$$\mathbf{\Delta} = 2[\mathbf{S}_2/(1 - \nu) - \mathbf{S}_1/(1 + \nu)], \quad (7)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{v} + \mathbf{\Delta}. \quad (8)$$

于是, 旋转对轨道加速度的贡献依次为

$$\mathbf{a}_{\text{SO}}^{(1.5)} = \frac{1}{r^3} \left\{ 6\mathbf{n}[(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot (2\mathbf{S} + \nu\mathbf{\Delta})] - [\mathbf{v} \times (7\mathbf{S} + 3\nu\mathbf{\Delta})] + 3\dot{r}[\mathbf{n} \times (3\mathbf{S} + \nu\mathbf{\Delta})] \right\}, \quad (9)$$

$$\mathbf{a}_{\text{SS}}^{(2)} = -\frac{3}{\mu r^4} \left[\mathbf{n}(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_2)\mathbf{S}_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_1)\mathbf{S}_2 - 5\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_2) \right], \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{\text{SO}}^{2.5} = & \frac{1}{r^3} \left\{ \mathbf{n} \left[\mathbf{S} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \left(-30\eta\dot{r}^2 + 24\eta v^2 - \frac{M}{r}(38 + 25\eta) \right) + \nu \boldsymbol{\Delta} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \left(-15\eta\dot{r}^2 + 12\eta v^2 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{M}{2r}(36 + 29\eta) \right) \right] + \dot{r} \mathbf{v} [9\mathbf{S} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v})(-1 + \eta) + 3\nu \boldsymbol{\Delta} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v})(-1 + 2\eta)] + \mathbf{n} \times \mathbf{v} \left[3\dot{r}(-1 + \eta) \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{8M}{r} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} - \nu \left(\frac{4M}{r} \eta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Delta} + 3\dot{r} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Delta} \right) \right] + \dot{r} \mathbf{n} \times \mathbf{S} \left[-\frac{45}{2} \eta \dot{r}^2 + 21\eta v^2 - \frac{5M}{r}(5 + 3\eta) \right] \right. \\
 & \left. + \nu \dot{r} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\Delta} \left[-15\eta \dot{r}^2 + 12\eta v^2 - \frac{M}{2r}(18 + 17\eta) \right] + \mathbf{v} \times \mathbf{S} \left[\frac{33}{2} \eta \dot{r}^2 + \frac{3M}{r}(7 + 3\eta) - 14\eta v^2 \right] \right. \\
 & \left. + \nu \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Delta} \left[9\eta \dot{r}^2 - 7\eta v^2 + \frac{9M}{2r}(2 + \eta) \right] \right\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

(9) 和 (10) 式能从文献 [1] 中找到, 而文献 [6] 提供了 (11) 式, 表示 1PN 阶轨道项与 1.5PN 阶轨道项的耦合, 具有 2.5PN 阶精度.

另一方面, 两个旋转变量的演化方程可以写成

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \boldsymbol{\Pi}_1 \times \mathbf{S}_1 + \boldsymbol{\Upsilon}_1^{2\text{PN}}, \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_2 = \boldsymbol{\Pi}_2 \times \mathbf{S}_2 + \boldsymbol{\Upsilon}_2^{2\text{PN}}, \quad (13)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Pi}_1 = \frac{1}{r^3} \left[\frac{\mathbf{L}_N}{2}(4 + 3\beta) - \mathbf{S}_2 + 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_2) \mathbf{n} \right], \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_2 = \frac{1}{r^3} \left[\frac{\mathbf{L}_N}{2} \left(4 + \frac{3}{\beta} \right) - \mathbf{S}_1 + 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_1) \mathbf{n} \right], \quad (15)$$

式中 $\mathbf{L}_N = \mu(\mathbf{x} \times \mathbf{v})$ 相当于牛顿轨道角动量. 此外, $\boldsymbol{\Pi}_b \times \mathbf{S}_b$ 中第一项表示由旋转 - 轨道耦合引起的进动项, 具有 1PN 阶精度; 第二项和第三项是由旋转 - 旋转耦合项引起的, 具有 1.5PN 阶精度. 这些表达可从文献 [1] 中查到. 文献 [6] 给出了 (12) 和 (13) 式中的第二项, 即旋转轨道耦合在旋转进动方程中的 2PN 阶项, $\boldsymbol{\Upsilon}_1^{2\text{PN}}$ 和 $\boldsymbol{\Upsilon}_2^{2\text{PN}}$. 它们的表达式为

$$\boldsymbol{\Upsilon}_1^{2\text{PN}} = \frac{1}{2}(1 + \nu) \mathbf{T}_S^{2\text{PN}} - \eta \mathbf{V}_S^{2\text{PN}}, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}_2^{2\text{PN}} = \frac{1}{2}(1 - \nu) \mathbf{T}_S^{2\text{PN}} + \eta \mathbf{V}_S^{2\text{PN}}, \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_S^{2\text{PN}} = & \frac{M}{2r^2} \eta \left\{ \mathbf{n} \left[\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \left(-2v^2 + 3\dot{r}^2 - 6\eta\dot{r}^2 + (7 - 8\eta) \frac{M}{r} \right) - \frac{14M}{r} \dot{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} - \nu \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Delta} \eta \left(3\dot{r} + \frac{4M}{r} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{M}{2r} \nu \dot{r} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Delta} (4 - \eta) \right] + \mathbf{v} \left[\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \left(2v^2 - 4\eta v^2 - 3\dot{r}^2 + \frac{5}{2} \eta \dot{r}^2 + (4 - 6\eta) \frac{M}{r} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2\dot{r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} (1 - 3\eta) + \frac{1}{2} \nu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Delta} \left(-3\eta v^2 + 6\eta \dot{r}^2 - (2 + 7\eta) \frac{M}{r} \right) - 3\nu \dot{r} \eta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Delta} \right] \right. \\
 & \left. + \dot{r} \mathbf{S} \left[v^2 - 2\eta v^2 - \frac{3}{2} \dot{r}^2 + 3\eta \dot{r}^2 - (1 - 2\eta) \frac{M}{r} \right] + \nu \dot{r} \boldsymbol{\Delta} \left[-\eta v^2 + \frac{3}{2} \eta \dot{r}^2 - (1 - \eta) \frac{M}{r} \right] \right\}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_S^{2\text{PN}} = & \frac{M}{r^2} \left\{ \mathbf{n} \left[\eta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Delta} \left(-2v^2 + 6\eta \dot{r}^2 + (3 + 8\eta) \frac{M}{r} \right) + \frac{M}{r} \dot{r} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Delta} \left(2 - \frac{45}{2} \eta + 2\eta^2 \right) - \nu \eta \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \left(3\dot{r}^2 + \frac{4M}{r} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2M}{r} \nu \dot{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} (4 - \eta) \right] + \mathbf{v} \left[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Delta} \left(\frac{1}{2} \eta v^2 + 2\eta^2 \dot{r}^2 - \frac{9}{2} \eta^2 \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{9}{2} \eta - 8\eta^2 \right) \frac{M}{r} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \dot{r} \eta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Delta} (-1 + 6\eta) - 3\nu \dot{r} \eta \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} + \nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \left(-\frac{3}{2} \eta v^2 + 3\eta \dot{r}^2 - \left(1 + \frac{7}{2} \eta \right) \frac{M}{r} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \boldsymbol{\Delta} \eta \dot{r} \left[2\eta^2 v^2 - 3\eta \dot{r}^2 - (1 - 4\eta + 2\eta^2) \frac{M}{r} \right] + \nu \dot{r} \mathbf{S} \left[-\eta v^2 + \frac{3}{2} \eta \dot{r}^2 - (1 - \eta) \frac{M}{r} \right] \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

应当注意上述所有的求导都是关于坐标时间 t 的. 这里所考虑的模型不同于 Kidder 模型 [1] 在于运动方程加入 2.5PN 阶轨道耦合项 (即 (1) 式右边第六项) 和旋转进动方程引入 2PN 阶轨道相互作用项 (即 (16) 式与 (17) 式). 还应该指出 (1) 式中如不含 2.5PN 阶辐射项 (即式 (1) 右边第 7 项), 所考虑的系统是保守的. 在这种情况下, 保守系统存在运动积分, 如用后牛顿展开表示的总能量和总角动量积分. 既然这些积分是用后牛顿近似展开表示的,

因此, 它们仅仅在这阶后牛顿精度下可视为守恒量, 不能认为是严格意义的守恒量. 但保守哈密顿构型却有严格意义的运动积分存在. 这是拉格朗日构型与哈密顿构型的典型区别. 由于这一差异, 对于同一个物理问题的两种不同动力学方程描述可能会产生完全不同的有序和混沌动力学现象 [21, 24]. 如果 (1) 式不考虑 2PN 阶旋转 - 旋转耦合项和 2.5PN 阶辐射项以及旋转进动方程不含 2PN 阶轨道相互作用项, 那么 2.5PN 阶轨道耦合项加剧拉格朗日动

力学的混沌程度^[33],但它却使哈密顿动力学仍然保持可积性,根本不会出现混沌^[34].

双星系统在动力学演化进程中会辐射引力波,下面介绍该拉格朗日动力学所产生的引力波机理.

3 引力波形

旋转致密双星系统的引力波辐射由对称横向无迹张量 h^{ij} 来确定. 引力波的两个基本偏振态 h_+ 和 h_\times 分别为

$$h_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j) h^{ij}, \quad (20)$$

$$h_\times = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j + \mathbf{p}_j \mathbf{q}_i) h^{ij}, \quad (21)$$

式中 \mathbf{p} 沿着轨道平面与地平线的交线, \mathbf{q} 由下式确定

$$\mathbf{q} = \mathbf{N} \times \mathbf{p}, \quad (22)$$

其中, \mathbf{N} 为观测者位置向量, $i, j = 1, 2, 3$ 分别表示 x, y, z 方向分量且上下相同指标为爱因斯坦求和记号. 波形 h^{ij} 的后牛顿近似展开为

$$\begin{aligned} h^{ij} = & \frac{2\eta M}{D} [\tilde{Q}^{ij} + P^{0.5} Q^{ij} + PQ^{ij} + PQ_{\text{SO}}^{ij} \\ & + P^{1.5} Q^{ij} + P^{1.5} Q_{\text{SO}}^{ij} + P^2 Q^{ij} \\ & + P^2 Q_{\text{SO}}^{ij} + P^2 Q_{\text{SS}}^{ij}]_{\text{TT}}, \end{aligned} \quad (23)$$

上标数字仍表示后牛顿阶数,下标仍表示对引力波形贡献的来源, D 表示观测者和引力波源之间的距离. 式中各项表达如下^[1]:

$$\tilde{Q}^{ij} = 2(\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j - \frac{M}{r} \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} P^{0.5} Q^{ij} = & \nu \left\{ 3(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) \frac{M}{r} [2\mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)} - \dot{r} \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j] \right. \\ & \left. + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) \left[\frac{M}{r} \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j - 2\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \right] \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} PQ^{ij} = & \frac{1}{3} \left\{ (1 - 3\eta) \left[(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^2 \frac{M}{r} \left[(3v^2 - 15\dot{r}^2 + 7\frac{M}{r}) \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j + 30\dot{r} \mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)} - 14\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \right] + 4(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) \right. \right. \\ & \times \frac{M}{r} [12\dot{r} \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j - 32\mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)}] + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v})^2 [6\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j - 2\frac{M}{r} \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j] \left. \right] + \left[3(1 - 3\eta)v^2 - 2(2 - 3\eta)\frac{M}{r} \right] \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \\ & \left. + 4\frac{M}{r} \dot{r} (5 + 3\eta) \mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)} + \frac{M}{r} \left[3(1 - 3\eta)\dot{r}^2 - (10 + 3\eta)v^2 + 29\frac{M}{r} \right] \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$PQ_{\text{SO}}^{ij} = \frac{2}{r^2} (\boldsymbol{\Delta} \times \mathbf{N})^{(i} \mathbf{n}^{j)}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} P^{1.5} Q^{ij} = & \nu (1 - 2\eta) \left\{ (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^3 \frac{M}{r} \left[\frac{5}{4} (3v^2 - 7\dot{r}^2 + 6\frac{M}{r}) \dot{r}^2 \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j - \frac{17}{2} \dot{r} \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j - \frac{1}{6} (21v^2 - 105\dot{r}^2 + 44\frac{M}{r}) \mathbf{n}^i \mathbf{v}^j \right] \right. \\ & + \frac{1}{4} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^2 (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) \frac{M}{r} [58\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j + (45\dot{r}^2 - 9v^2 - 28\frac{M}{r}) \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j - 108\dot{r} \mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)}] + \frac{3}{2} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v})^2 \\ & \times \frac{M}{r} [10\mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)} - 3\dot{r} \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j] + \frac{1}{2} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v})^3 \left(\frac{M}{r} \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j - 4\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \right) \left. \right\} + \frac{1}{12} \nu (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) \frac{M}{r} \left\{ 2\mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)} \left[\dot{r}^2 (63 \right. \right. \\ & \left. \left. + 54\eta) - \frac{M}{r} (128 - 36\eta) + v^2 (33 - 18\eta) \right] + \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j \dot{r} \left[\dot{r}^2 (15 - 90\eta) - v^2 (63 - 54\eta) \right] \right. \\ & \left. + \frac{M}{r} (242 - 24\eta) \right\} - \dot{r} \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j (186 + 24\eta) \left. \right\} + \nu (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \left[\frac{M}{r} (3 - 8\eta) - 2v^2 (1 - 5\eta) \right] \right. \\ & \left. - \mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)} \frac{M}{r} \dot{r} (7 + 4\eta) - \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j \frac{M}{r} \left[\frac{3}{4} (1 - 2\eta) \dot{r}^2 + \frac{1}{3} (26 - 3\eta) \frac{M}{r} - \frac{1}{4} (7 - 2\eta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} P^{1.5} Q_{\text{SO}}^{ij} = & \frac{2}{r^2} \left\{ \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j [(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot (12\mathbf{S} + 6\nu\boldsymbol{\Delta})] - \mathbf{n}^{(i} [\mathbf{v} \times (9\mathbf{S} + 5\nu\boldsymbol{\Delta})]^{j)} \right. \\ & \left. + [3\dot{r}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v})][(\mathbf{S} + \nu\boldsymbol{\Delta}) \times \mathbf{N}] \mathbf{n}^{(i} \mathbf{n}^{j)} - \mathbf{v}^{(i} [\mathbf{n} \times (2\mathbf{S} + 2\nu\boldsymbol{\Delta})]^{j)} \right. \\ & \left. + \dot{r} \mathbf{n}^{(i} [\mathbf{n} \times (12\mathbf{S} + 2\nu\boldsymbol{\Delta})]^{j)} - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})[(\mathbf{S} + \nu\boldsymbol{\Delta}) \times \mathbf{N}]^{(i} \mathbf{v}^{j)} \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} P^2 Q^{ij} = & \frac{1}{60} (1 - 5\eta + 5\eta^2) \left\{ 24(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v})^4 \left(5\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j - \frac{M}{r} \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j \right) + \frac{M}{r} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^4 \left[2 \left(175\frac{M}{r} - 465\dot{r}^2 + 93v^2 \right) \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \right. \right. \\ & \left. \left. + 30\dot{r} \left(63\dot{r}^2 - 50\frac{M}{r} - 27v^2 \right) \mathbf{n}^{(i} \mathbf{v}^{j)} + \left(1155\frac{M}{r} \dot{r}^2 - 172 \left(\frac{M}{r} \right)^2 - 945\dot{r}^4 - 159\frac{M}{r} v^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 630\dot{r}^2 v^2 - 45v^4 \right) \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j \right] + 24\frac{M}{r} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^3 (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) \left[87\dot{r} \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j + 5\dot{r} \left(14\dot{r}^2 - 15\frac{M}{r} - 6v^2 \right) \mathbf{n}^i \mathbf{n}^j \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 16\left(5\frac{M}{r} - 10\dot{r}^2 + 2v^2\right)\mathbf{n}^{(i}\mathbf{v}^j)} + 288\frac{M}{r}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v})^3[\dot{r}\mathbf{n}^i\mathbf{n}^j - 4\mathbf{n}^{(i}\mathbf{v}^j)] \\
 & + 24\frac{M}{r}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})^2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v})^2\left\{\left[35\frac{M}{r} - 45\dot{r}^2 + 9v^2\right]\mathbf{n}^i\mathbf{n}^j - 76\mathbf{v}^i\mathbf{v}^j + 126\dot{r}\mathbf{n}^{(i}\mathbf{v}^j)}\right\} \\
 & + \frac{1}{15}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v})^2\left\{\left[5(25 - 78\eta + 12\eta^2)\frac{M}{r} - (18 - 65\eta + 45\eta^2)v^2 + 9(1 - 5\eta + 5\eta^2)\dot{r}^2\right]\frac{M}{r}\mathbf{n}^i\mathbf{n}^j\right. \\
 & + 3\left[5(1 - 9\eta + 21\eta^2)v^2 - 2(4 - 25\eta + 45\eta^2)\frac{M}{r}\right]\mathbf{v}^i\mathbf{v}^j + 18(6 - 15\eta - 10\eta^2)\frac{M}{r}\dot{r}\mathbf{n}^{(i}\mathbf{v}^j)} \\
 & + \frac{1}{15}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v})\frac{M}{r}\left\{\left[3(36 - 145\eta + 150\eta^2)v^2 - 5(127 - 392\eta + 36\eta^2)\frac{M}{r}\right.\right. \\
 & - 15(2 - 15\eta + 30\eta^2)\dot{r}^2]\dot{r}\mathbf{n}^i\mathbf{n}^j + (98 - 295\eta + 30\eta^2)\dot{r}\mathbf{v}^i\mathbf{v}^j + 2\left[5(66 - 221\eta + 96\eta^2)\frac{M}{r}\right. \\
 & - 9(18 - 45\eta + 40\eta^2)\dot{r}^2 - (66 - 265\eta + 360\eta^2)v^2]\mathbf{n}^{(i}\mathbf{v}^j)}\left. + \frac{1}{60}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})^2\frac{M}{r}\right. \\
 & \times \left\{\left[3(33 - 130\eta + 150\eta^2)v^4 + 150(1 - 10\eta + 30\eta^2)\dot{r}^4 + 15(181 - 572\eta + 84\eta^2)\frac{M}{r}\dot{r}^2\right.\right. \\
 & - (131 - 770\eta + 930\eta^2)\frac{M}{r}v^2 - 60(9 - 40\eta + 60\eta^2)v^2\dot{r}^2 - 8(131 - 390\eta + 30\eta^2) \\
 & \times \left(\frac{M}{r}\right)^2\left. + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}) + 4\left[(12 + 5\eta - 315\eta^2)v^2 - 9(39 - 115\eta - 35\eta^2)\dot{r}^2 + 5(29 - 104\eta\right.\right. \\
 & + 84\eta^2)\frac{M}{r}\left. + 4\left[15(18 - 40\eta - 75\eta^2)\dot{r}^2 - 5(197 - 640\eta + 180\eta^2)\frac{M}{r}\right.\right. \\
 & + 3(21 - 130\eta + 375\eta^2)v^2]\dot{r}\mathbf{n}^{(i}\mathbf{v}^j)}\left. + \frac{1}{60}\left\{\left[(467 + 780\eta - 120\eta^2)\frac{M}{r}v^2\right.\right. \\
 & - 15(61 - 96\eta + 48\eta^2)\frac{M}{r}\dot{r}^2 - (144 - 265\eta - 135\eta^2)v^4 + 6(24 - 95\eta + 75\eta^2)v^2\dot{r}^2\right. \\
 & - 2(642 + 545\eta)\left(\frac{M}{r}\right)^2 - 45(1 - 5\eta + 5\eta^2)\dot{r}^4\left. + \frac{M}{r}\mathbf{n}^i\mathbf{n}^j + \left[4(69 + 10\eta - 135\eta^2)\frac{M}{r}v^2\right.\right. \\
 & - 12(3 + 60\eta + 25\eta^2)\frac{M}{r}\dot{r}^2 + 45(1 - 7\eta + 13\eta^2)v^4 - 10(56 + 165\eta - 12\eta^2)\left(\frac{M}{r}\right)^2\left. + \mathbf{v}^i\mathbf{v}^j\right. \\
 & \left. + 4\left[2(36 - 5\eta - 75\eta^2)v^2 - 6(7 - 15\eta - 15\eta^2)\dot{r}^2 + 5(35 + 45\eta + 36\eta^2)\frac{M}{r}\right]\frac{M}{r}\dot{r}\mathbf{n}^{(i}\mathbf{v}^j)}\right\}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$P^2 Q_{SS}^{ij} = -\frac{6}{\mu r^3}\left\{\mathbf{n}^i\mathbf{n}^j[(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2) - 5(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_1)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_2)] + 2\mathbf{n}^{(i}\mathbf{S}_1^j)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_2) + 2\mathbf{n}^{(i}\mathbf{S}_2^j)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_1)}\right\}. \quad (31)$$

(24) 式中 \tilde{Q}^{ij} 是标准的四极矩项. 此外, 还用到对称算符

$$\mathbf{y}^{(i}\mathbf{z}^j)} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}^i\mathbf{z}^j + \mathbf{y}^j\mathbf{z}^i). \quad (32)$$

本文选取 $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{N} = (0, \sin \pi/4, \cos \pi/4)$, 因此根据 (22) 式可求得

$$\mathbf{q} = \mathbf{N} \times \mathbf{p} = (0, -\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}). \quad (33)$$

现将上式及 \mathbf{p} 和 \mathbf{N} 的值分别代入 (20) 和 (21) 式并整理可得

$$h_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{h}^{xx} + \mathbf{h}^{yy}) - \frac{1}{4}(\mathbf{h}^{yy} + \mathbf{h}^{zz}), \quad (34)$$

$$h_\times = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{h}^{xz} - \mathbf{h}^{xy}). \quad (35)$$

可见, 引力波的 h_+ 和 h_\times 两态由观测者和系统四极矩及有关后牛顿展开确定, 其中四极矩起主要作

用. 由于四极矩及有关后牛顿项由系统的状态量来给定, 因此系统的动力学性质将会在引力波形得到体现. 下面根据轨道类型数值模拟一些引力波形.

4 引力波形的数值模拟

先考虑 (1) 式没有引力辐射项的保守拉格朗日系统中的有序和混沌轨道的引力波形特征, 再观察 (1) 式在有引力辐射项作用下的情形.

4.1 不含辐射项的引力波形

采用 Runge-Kutta-Fehlberg 8(9) 阶变步长方法对运动方程 (1) 与旋转进动方程 (12) 和 (13) 进行数值积分, 这个积分器能够为数值解提供较高精度.

选取质量比 $\beta = 1.4/10$ 且 $\chi_1 = \chi_2 = 1$. 初始

条件为 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (26M, 0, 0, 0, 17, 0)$, 两个初始旋转角为 $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. 图 1(a) 是 (1) 式不含引力辐射项的保守系统在 x - y 平面投影轨道情形. 该图除表明轨道限于有界区域内似乎不能反映轨道动力学

特征. 然而, 图 1(b) 的快速 Lyapunov 指标 (FLI) 就十分清晰地揭示了轨道的有序性. 这个指标随时间增长缓慢, 直至积分时间 $\tau = 10^5 M$ 时 FLI 的值不超过 6.0, 属于典型的有序轨道特性.

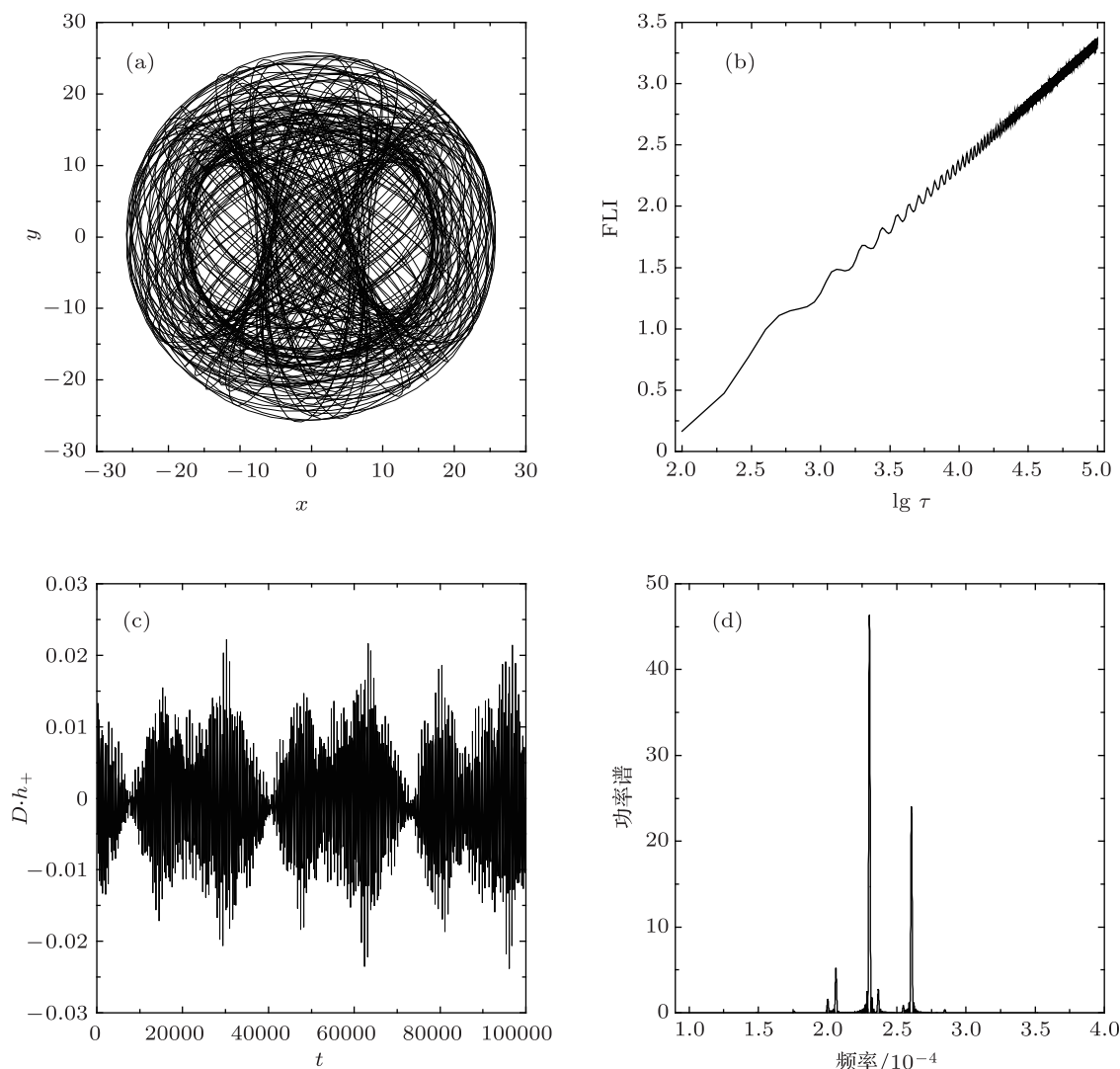


图 1 初始条件为 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (26M, 0, 0, 0, 17, 0)$ 且两个初始旋转角为 $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ 的保守有序双星系统 (a) x - y 平面投影轨道; (b) FLI; (c) $D \cdot h_+$ 波形; (d) $D \cdot h_+$ 波形的功率谱

特别要指出的是, FLI 的计算是来源于广义相对论框架下与时空坐标选择无关即协变的两邻近轨道方法, 它是在广义协变的两邻近轨道的 Lyapunov 指数 [35] 和 Froeschle 等 [36] 的快速 Lyapunov 指标的基础上发展构造的. 尽管数值积分是在坐标为时间变量的相对坐标系内进行, 但是, 二体中的一体的动力学是在通常的质心坐标系内观测的, 也就是说观测者是在质心坐标系的原点来观测该体是否混沌, 实质就是观测者观测该体的 FLI 值变化. 这种方法需要知道质心坐标系下的 b 体的位置 \mathbf{y}_b 和速度 \mathbf{v}_b . 相对坐标 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ 和相对速

度 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 与质心系下每体的坐标之间关系 [6] 为

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \nu + \eta \nu \left(v^2 - \frac{M}{r} \right) \right] \mathbf{x} + \frac{\eta}{M} \boldsymbol{\Sigma}, \quad (36)$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \nu - \eta \nu \left(v^2 - \frac{M}{r} \right) \right] \mathbf{x} + \frac{\eta}{M} \boldsymbol{\Sigma}, \quad (37)$$

式中, \mathbf{y}_1 和 \mathbf{y}_2 分别对坐标时间 t 求导就可以得到质心系下每体的速度 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 . 此外, m_1 在质心坐标系下的后牛顿度规 $g_{\alpha\beta}$ 可在文献 [6] 中找到. 于是 m_1 的四速度 \mathbf{U} 就被确定. 在这个前提下, 很容

易得到观测者到体 m_1 的固有距离 [35]

$$\Delta L = \sqrt{\mathbf{H}_{\alpha\beta} \Delta \mathbf{y}_1^\alpha \Delta \mathbf{y}_1^\beta}, \quad (38)$$

式中 $\mathbf{H}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} + \mathbf{g}_{\alpha\lambda} \mathbf{g}_{\gamma\beta} \mathbf{U}^\lambda \mathbf{U}^\gamma$ (希腊指标从 0 取到 3, 依次表示 t, x, y 和 z 四分量; 上下相同指标为爱因斯坦求和记号) 是空间投影算符, $\Delta \mathbf{y}_1^\alpha$ 表示观测者和 m_1 相对观测者的偏差矢量. 同时, 通过数值计算可以求出 m_1 的固有时 τ . 利用固有距离和固有时, 弯曲空间中与时空坐标选择无关的 FLI 定义为

$$\text{FLI}(\tau) = \lg \frac{\Delta L(\tau)}{\Delta L(0)}, \quad (39)$$

式中 $\Delta L(0)$ 是初始时刻的固有距离, 其详细计算可见文献 [37]. 显然, 这种方法所确定的 FLI 不依赖于时空坐标的选取. 如果 FLI 随时间的对数呈代数式增长, 则有界轨道应该是拟周期的有序轨道; 如果 FLI 随时间的对数为指数式增长, 则有界轨道应该是混沌的. 这就意味着 FLI 随时间变化的快慢能够作为区分有序和混沌的标准. 在区分旋转致密双星系统的有序和混沌时, 这种 FLI 方法已被文献 [23] 证明比两邻近轨道的 Lyapunov 指数更灵敏和有效, 并已经在一些文献中得到很好的应

用 [38,39]. 至于其他混沌识别方法, 如 Melnikov 方法 [40] 和 0-1 指标法 [41] 等是否适合研究旋转致密双星混沌问题还有待检测.

下面来考察双星系统辐射引力波的两偏振态 h_+ 和 h_\times . 图 1(c) 是 $D \cdot h_+$ 波形 ($D \cdot h_\times$ 波形与其相似, 故不再画出), 该波形呈现拟周期变化. 图 1(d) 给出了此波形的离散谱线功率谱 (功率谱是将信号进行快速傅里叶变换列出的频率分布), 表明这个波形应该是拟周期的. 一般来说, 周期 (拟周期) 信号是离散谱线, 而混沌信号是连续谱线. 离散或连续谱线这一特点可以粗略地区分信号的有序或混沌性质.

如果轨道是混沌的, 那么引力波形有什么特征? 为探讨这一问题, 采用初始条件 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (5.7M, 0, 0, 0, 0.3982, 0)$ 和两个初始旋转角为 $\theta_1 = 1.25$ 和 $\theta_2 = 1.85$ 来继续进行数值实验. 图 2(a) 的 x - y 平面投影轨道与图 1(a) 的截然不同, 看起来比较杂乱; 图 2(b) 的随时间对数指数式增长 FLI 揭示该轨道确实混沌; 图 2(c) 的 $D \cdot h_+$ 波形呈现无规则性; 图 2(d) 的连续功率谱进一步表明此波形的混沌性.

总之, 图 1 和图 2 表明有序轨道的引力波形呈

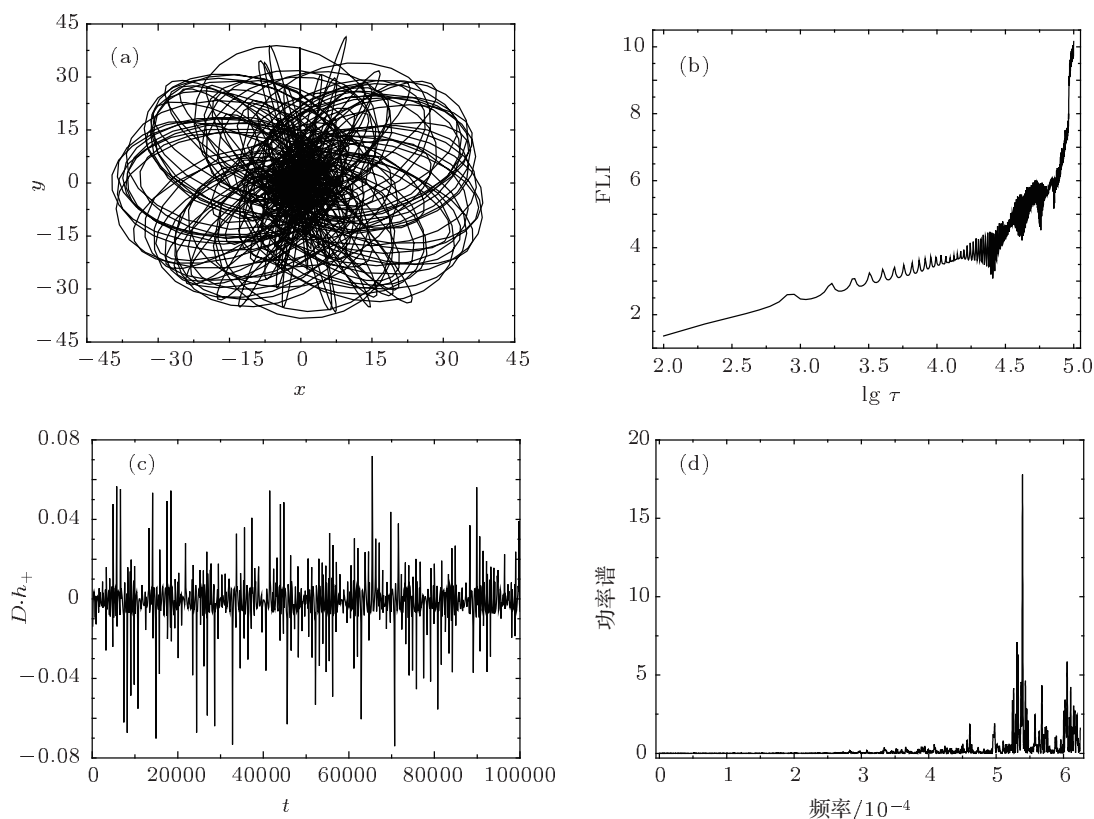


图 2 初始条件为 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (5.7M, 0, 0, 0, 0.3982, 0)$ 且两个初始旋转角为 $\theta_1 = 1.25$ 和 $\theta_2 = 1.85$ 的保守混沌双星系统 (a) x - y 平面投影轨道; (b) FLI; (c) $D \cdot h_+$ 波形; (d) $D \cdot h_+$ 波形的功率谱

拟周期变化, 而混沌轨道的引力波形仍为混沌. 这个结果应该是合理的, 因为 h^{ij} 由动力学状态量完全确定, 亦即 h^{ij} 必然含有混沌或有序等动力学信息. 下面观察 (1) 式含引力辐射项的耗散双星系统情形.

4.2 含辐射项的引力波形

当 (1) 式加入引力辐射项作用项时, 双星系统变为耗散系统. 仍以上面两条轨道作为对象研究它们辐射的引力波特征.

图 1(a) 的有序轨道在考虑辐射项时得到如图 3(a) 所示的 $x-y$ 平面投影轨道. 图 3(a) 轨道轮廓大体类似于图 1(a), 并且同样不易看出轨道的有序或混沌动力学信息. 含有辐射项与没有辐射项的显著差异在于该耗散系统经过时间 $3 \times 10^4 M$ 演化后落到坐标原点不再变化, 表明双星二体发生并合融为一体. 它辐射的引力波恰如其分地展示双星演化到并合这一过程, 详见图 3(b). 在双星并合前, 引力

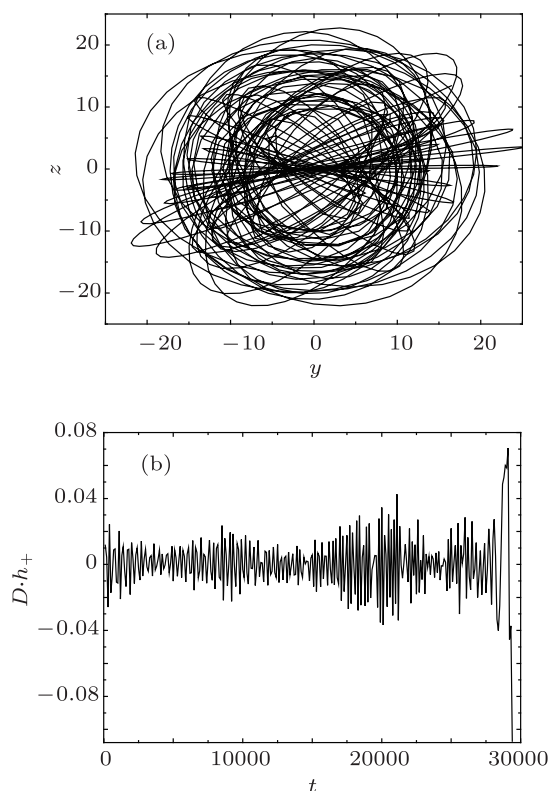


图 3 图 1 条件下在加入引力辐射作用项时保守有序双星系统的投影轨道和 $D \cdot h_+$ 波形 (a) $y-z$ 平面投影轨道; (b) $D \cdot h_+$ 波形

波形呈现拟周期的基本特点; 在双星并合瞬间, 引力波形出现了一个较大的幅值; 之后引力波形消失. 双星之所以发生并合是源于引力辐射并且释放辐射能而导致轨道半长径和偏心率逐步减小的缘故.

当图 2(a) 的混沌轨道加入辐射项时, 图 4(a) 的轨道构型发生了显著变化, 即经过大约 4 圈后半双星出现并合现象. 由于双星演化时间太短, 获取的轨道信息量太少, 故无法判断轨道动力学特征. 图 4(b) 的引力波形也印证了这一结果, 亦即双星并合前, 引力波的特征不清晰; 在双星并合瞬间, 引力波形仍然出现了一个较大的幅值; 之后引力波形消失.

图 3 和图 4 表明在考虑引力辐射作用项时, 原保守混沌双星系统比原保守有序双星系统将更快地导致并合过程. 如果双星并合时间较长, 引力波形的特征容易区分. 如果双星并合时间太短, 获取的动力学信息太少, 引力波形的特征无法分辨. 对于并合时间太短的耗散系统的有序和混沌动力学特征如何区分是目前国际上尚未解决的难题.

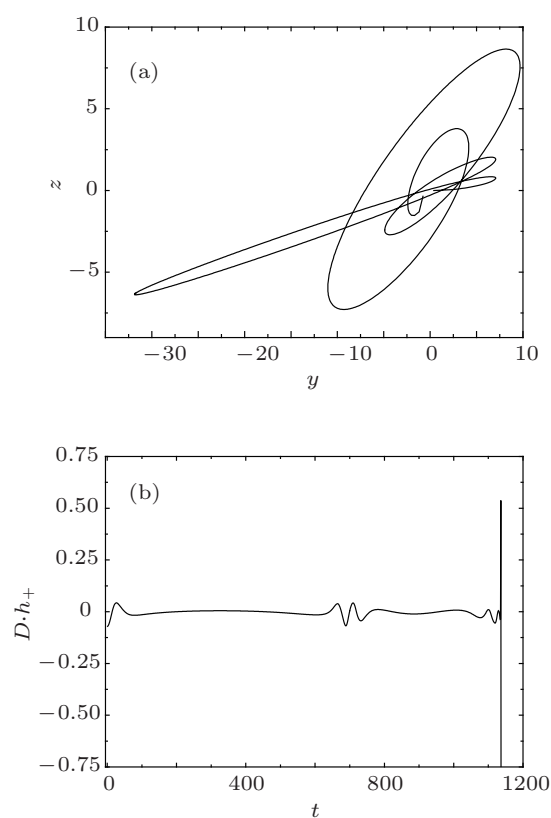


图 4 图 2 条件下在加入引力辐射作用项时保守有序双星系统的投影轨道和 $D \cdot h_+$ 波形 (a) $y-z$ 平面投影轨道; (b) $D \cdot h_+$ 波形

5 结论

后牛顿展开到 2.5 阶的旋转致密双星系统是非常复杂的广义相对论二体问题. 旋转对轨道加速度的贡献包含 1.5 阶和 2.5 阶轨旋耦合作用前两项以及 2 阶旋转与旋转耦合项, 并且旋转进动方程考虑到 2PN 阶. 这些高阶旋转效果大大增强了系统的非线性效应, 从而导致更为复杂的动力学结构. 本文探讨了双星系统辐射的引力波特征, 研究了引力波与轨道动力学的关系.

当加速度方程不考虑 2.5 阶辐射项时, 有序双星系统辐射的引力波具有周期或拟周期的特征; 混沌双星系统辐射的引力波具有混沌的特征. 当加速度方程加入 2.5 阶辐射项时, 因引力辐射释放能量使轨道半长径和偏心率逐步减小而最终导致双星并合. 原保守有序双星系统在辐射项存在时需较长时间才能完成并合过程. 引力波形在双星并合前仍

保留拟周期的基本特点, 但在双星并合瞬间却出现一个较大的幅值, 随后引力波形立刻消失. 然而, 原保守混沌双星系统当辐射项存在时只需较短时间就能发生并合, 但因双星并合时间太短, 无法获取足够的动力学信息使得引力波形的特征难以区分.

尽管文献 [42] 已证实质量相等且不旋转的双黑洞系统后牛顿近似引力波形的相与从 Einstein 场方程 (即严格的广义相对论) 所得引力波形的相在双黑洞并合前 14 圈内几乎保持一致, 但是双星系统动力学在双星并合的最后阶段最好采用严格的广义相对论处理, 因为这种后牛顿近似精度为 $(1/r)^{2.5}$ 阶, 故当双星距离 r 很小时后牛顿近似动力学与严格的广义相对论动力学一般会存在较大差异. 因此, 辐射项存在时耗散系统混沌的方法, 以及比较任意质量比的旋转致密双星后牛顿近似引力波形与严格的广义相对论所得引力波形的比较是今后研究的课题.

-
- [1] Kidder L E 1995 *Phys. Rev. D* **52** 821
 [2] Will C M, Wiseman A G 1996 *Phys. Rev. D* **54** 4813
 [3] Gopakumar A, Iyer B R 2002 *Phys. Rev. D* **65** 084011
 [4] Blanchet L, Faye G, Iyer B R, Sinha S 2008 *Class. Quant. Grav.* **25** 165003
 [5] Tagoshi H, Ohashi A, Owen B J 2001 *Phys. Rev. D* **63** 044006
 [6] Faye G, Blanchet L, Buonanno A 2006 *Phys. Rev. D* **74** 104033
 [7] Blanchet L, Buonanno A, Faye G 2006 *Phys. Rev. D* **74** 104034
 [8] Buonanno A, Chen Y, Damour T 2006 *Phys. Rev. D* **74** 104005
 [9] Hergt S, Schafer G 2008 *Phys. Rev. D* **78** 101503
 [10] Kokubun F 1998 *Phys. Rev. D* **57** 2610
 [11] Suzuki S, Maeda K I 1999 *Phys. Rev. D* **61** 024005
 [12] Kiuchi K, Maeda K I 2004 *Phys. Rev. D* **70** 064036
 [13] Kiuchi K, Koyama H, Maeda K I 2007 *Phys. Rev. D* **76** 024018
 [14] Wang Y, Wu X 2011 *Commun. Theor. Phys.* **56** 1045
 [15] Zhong S Y, Liu S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120401 (in Chinese)
 [钟双英, 刘崧 2012 物理学报 **61** 120401]
 [16] Levin J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3515
 [17] Schnittman J D, Rasio F A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 121101
 [18] Cornish N J, Levin J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 179001
 [19] Konigsdorffer C, Gopakumar A 2005 *Phys. Rev. D* **71** 024039
 [20] Hartl M D, Buonanno A 2005 *Phys. Rev. D* **71** 024027
 [21] Levin J 2006 *Phys. Rev. D* **74** 124027
 [22] Wu X, Xie Y 2007 *Phys. Rev. D* **76** 124004
 [23] Wu X, Xie Y 2008 *Phys. Rev. D* **77** 103012
 [24] Wu X, Xie Y 2010 *Phys. Rev. D* **81** 084045
 [25] Zhong S Y, Wu X 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104037
 [26] Zhong S Y, Wu X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090402 (in Chinese)
 [钟双英, 伍歆 2011 物理学报 **60** 090402]
 [27] Chen J H, Wang Y J 2003 *Chin. Phys.* **12** 836
 [28] Chen J H, Wang Y J 2004 *Chin. Phys.* **13** 583
 [29] Chen J H, Wang Y J 2005 *Chin. Phys.* **14** 1282
 [30] Chen J H, Wang Y J 2006 *Chin. Phys.* **15** 1705
 [31] Wang Y, Wu X 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050504
 [32] Galaviz P, Bruggmann 2011 *Phys. Rev. D* **83** 084013
 [33] Wang Y, Wu X 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 025010
 [34] Wu X, Zhong S Y 2011 *Gen. Relat. Gravit.* **43** 2185
 [35] Wu X, Huang T Y 2003 *Phys. Lett. A* **313** 77
 [36] Froeschle C, Lega E, Gonczi R 1997 *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **67** 41
 [37] Wu X, Huang T Y, Zhang H 2006 *Phys. Rev. D* **74** 083001
 [38] Li R, Wu X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7135 (in Chinese) [李荣, 伍歆 2010 物理学报 **59** 7135]
 [39] Li R, Wu X 2011 *Eur. Phys. J. Plus* **126** 73
 [40] Di G H, Xu Y, Xu W, Gu R C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020504 (in Chinese) [狄根虎, 许勇, 徐伟, 顾仁财 2011 物理学报 **60** 020504]
 [41] Sun K H, Liu X, Zhu C X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110510
 [42] Baker J G, van Meter J R, McWilliams S T, Centrella J, Kelly B J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 181101

Characterization of gravitational waves from spinning compact binaries*

Wang Yu-Zhao Wu Xin[†] Zhong Shuang-Ying

(*Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031, China*)

(Received 12 December 2011; revised manuscript received 2 February 2012)

Abstract

Some characterizations of gravitational waves emitted from the 2.5 post-Newtonian order Lagrangian dynamics of spinning compact binaries including the next-order spin-orbit contribution and the radiative reaction are detailed. The relationship between the regular and chaotic dynamics and the gravitational waveforms is also described. When the radiative reaction term does not appear in the equations of motion, the gravitational waves are periodic/quasi-periodic for an order conservative binary system, but they seem to be typically irregular for a chaotic one. On the other hand, the binary systems become dissipative and should coalesce if the radiative reaction term is added to the equations of motion. In the dissipative case, the original ordered conservative system can still give regular gravitational waveforms in such a long time before the occurrence of the merging orbits. However, the coalescence time of the binary system corresponding to its original chaotic conservative system is too short to obtain enough information about the characterization of the gravitational waveforms.

Keywords: gravitational waves, post-Newtonian approximations, spinning compact binaries, chaos

PACS: 04.30.-w, 04.25.Nx, 04.70.-s, 05.45.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10873007, 11173012, 11178002, 11165011) and the Program for Innovative Research Team of Nanchang University, China.

[†] E-mail: xwu@ncu.edu.cn