

单模激光系统随机共振的模拟研究

杨明[†] 李香莲 吴大进

(华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

(2011年11月15日收到; 2012年2月3日收到修改稿)

用数值模拟方法对具有调制信号的单模激光系统进行了研究, 分析了在阈值附近和远离阈值两种工作方式下的输出信噪比、输出信号功率、背景噪声功率, 并与线性化近似结果进行了对比. 研究发现, 激光在阈值附近工作时, 输出信噪比会随着量子噪声的增大出现随机共振现象, 这一现象不要求泵噪声与量子噪声存在关联, 但噪声之间的关联会进一步增大信噪比; 在远离阈值时, 只有噪声间存在关联时才会发生随机共振现象. 研究还发现噪声也会影响输出信号的功率.

关键词: 随机共振, 信噪比, 输出信号, 背景噪声

PACS: 05.40.-a, 42.60.Mi

1 引言

自1981年邦济提出随机共振概念以来, 有关随机共振的理论与实验研究已经扩展到很多领域^[1]. 激光系统中的随机共振现象同样引起人们的极大关注, 这是因为作为信息的载体, 激光可以用来在光纤甚至空间中传递信息. 而在这种信息传递过程中, 噪声是不可避免的, 因为即使是在理论上, 激光系统中的噪声也是无法消除的. 因此如何使噪声的影响减到最小, 甚至反过来利用噪声, 就显得很重要. 随机共振现象的出现为优化激光输出信噪比提供了理论依据, 人们甚至可以适当地加大输入噪声强度来获得最佳的输出信噪比. 另一方面, 有关激光系统随机共振的研究预言, 激光在单稳工作状态下也会出现随机共振, 这突破了早期关于随机共振的三个必备条件(双稳态、周期信号、噪声)的限制^[1], 使人们从理论上认识到随机共振产生的机理可能是多样的. 多年的研究中, 人们尝试了很多模型, 在不同情况下分析了噪声对激光输出信噪比的影响, 得到了一些有趣的结论^[2-6]. 但我们发现, 到目前为止的研究多是利用线性化近似方法^[7], 而该方法存在这样一些局限性: 首先, 线性化仅适用于噪声强度以及信号强度远远小于稳态

光强的情形, 对于乘性噪声或乘性信号, 因为噪声和信号的实际强度会受到光强的影响, 以至于这一近似的适用范围大受限制; 另外, 线性化是将瞬时光强在确定论的光强稳定点周围做微扰展开的, 当泵噪声与量子噪声之间存在关联时, 光强分布函数的极值会随着关联强度的不同而变化, 一般与确定论的光强稳定点不同, 因此会导致展开的误差变大. 基于以上两点, 本文主要采用数值模拟方法来研究激光系统的随机共振现象, 同时作为对照, 我们也给出了线性化近似的结果. 本文研究的模型是单模激光损失模型, 而信号采用强度调制信号. 研究发现, 激光在阈值附近和远离阈值两种工作状态下均可以出现随机共振现象. 在阈值附近时, 输出信噪比会随着量子噪声的增大出现一个峰值, 这个随机共振的出现不要求噪声之间关联, 但噪声之间的关联会进一步增大信噪比; 在远离阈值时, 只有噪声间存在关联时才会发生随机共振现象. 本文还发现噪声也会影响输出信号的功率.

2 模型

本文研究的模型为激光损失模型^[7]:

$$\frac{d}{dt}I = 2aI - 2AI^2 + q + BI \cos(\omega_0 t)$$

[†] E-mail: yangming@hust.edu.cn

$$+ 2I\xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t), \quad (1)$$

其中, I 为激光光强, a 为净增益系数, A 为自饱和系数, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别为泵噪声和量子噪声, 这里假定 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 均为高斯白噪声, 其强度分别为 d 和 q , 对应斯特拉托诺维奇解释^[8]. $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质为

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= d\delta(t-t'), \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= q\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= 2\lambda\sqrt{dq}\delta(t-t'). \end{aligned}$$

其中, λ 为关联强度, 它的取值范围可由施瓦茨不等式求得. 在上面的情况中 $-1 \leq \lambda \leq 1$, 但本文仅讨论负关联情况 ($-1 \leq \lambda \leq 0$), 因为研究中我们发现, 对于本文的模型, 正关联情况下得不到令人感兴趣的结论. 在方程 (1) 中同时考虑了一个输入的周期信号 $B \cos(\omega_0 t)$, B 为信号强度, ω_0 为信号频率. 这个信号的输入方式本质上是对光强的调制, 有两种方式实现: 一种是可以使增益系数呈周期变化, 例如在半导体激光器的抽运中加上周期电压; 另一种可能的方法是使损耗因子呈周期变化, 这可以通过在腔中加入声光晶体或电光晶体来实现.

本文对方程 (1) 的模拟采用二阶龙格库塔方法^[7,9], 我们模拟了 500 个轨道, 时间步长 $\Delta t = 0.001$, 每个轨道选取光强达到稳定状态后的 32000 个时间点做傅里叶变换, 并进而求出功率谱密度, 同时对功率谱密度做系综平均, 得到平均功率谱密度 $S(\omega)$, 由此可以求出信噪比

$$\text{SNR} = 10 \lg(S/N), \quad (2)$$

其中 N 为信号频率处的背景噪声功率谱密度, 取 $S(\omega)$ 峰值 (ω_0 处) 附近的 100 个点做平均得到, S 为输出信号功率谱密度, 它由 $S(\omega_0)$ 值减去 N 求得.

3 结果和讨论

3.1 在阈值附近

当 a 较小时, 激光在阈值附近工作, 目前关于激光随机共振的理论研究并未涉及这一区域. 本节将讨论激光在该区域工作时信噪比随泵噪声与量子噪声的变化规律.

图 1 显示了激光输出信噪比随量子噪声强度 q 的变化曲线, 模拟结果显示, 即使噪声间不存在关

联 ($\lambda = 0$), 也会出现随机共振现象, 即在 q 较小时, 适当增大噪声强度, 信噪比是增加的, 并在一个特定的 q 值处, 信噪比达到最大值. 这个现象是以前的研究中没有预言过的, 在以前有关单模激光的研究中, 泵噪声与量子噪声关联是产生随机共振必不可少的条件. 对这一现象更进一步的分析见图 2, 图 2 中展示出了与图 1 相应的输出信号和背景噪声的功率谱密度. 应该说明的是, S 的曲线也可以反映信号功率的变化趋势, 因为信号功率可以表示为 $S \cdot \Delta\omega \cdot \Delta t$ ^[10], 其中, $\Delta\omega$ 为频率分辨率, 对于本文选取的模拟参数, $\Delta\omega = \pi/16$ Hz. 从图 2 可以看到, 当 $\lambda = 0$ 时, 随着噪声强度的增加, S 和 N 均增加, N 增加应该是意料中的事, 而 S 增加意味着噪声的能量部分转化为信号的能量, 这让我们看到噪声积极的一面, 同时也使随机共振的产生成为可能. 因为 N 与 S 两者增长趋势存在差异, 导致信噪比在一个适当的 q 值处达到峰值, 也就是出现随机共振现象. 图 1 中另两条曲线为泵噪声与量子噪声存在负关联的情况, 此时, 不仅有随机共振现象发生,

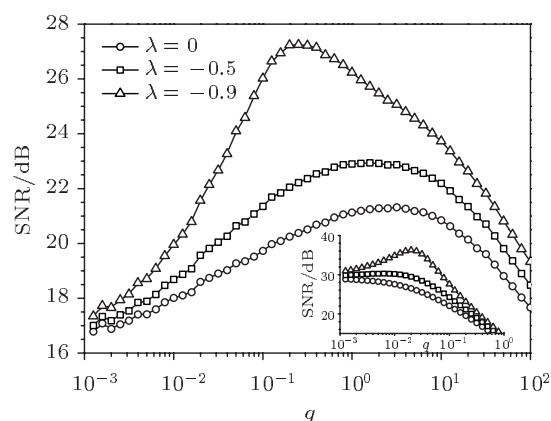


图 1 在阈值附近工作时, 信噪比随量子噪声强度 q 的变化 ($a = 0.05, A = 1, d = 0.5, B = 20, \omega_0 = 100\pi$), 内插图为线性化近似结果, 来自附录 (A4), (A5) 式

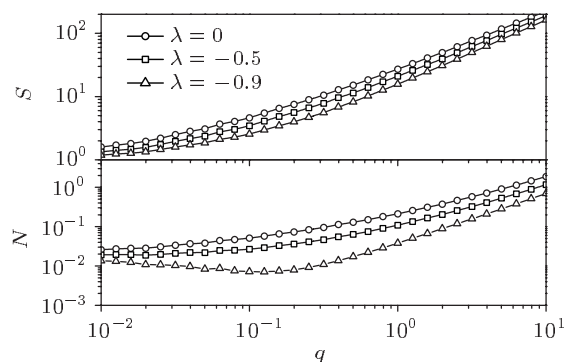


图 2 在阈值附近工作时, S 与 N 随量子噪声强度 q 的变化曲线 ($a = 0.05, A = 1, d = 0.5, B = 20, \omega_0 = 100\pi$)

而且随着关联强度的加强 ($|\lambda|$ 增加), 信噪比曲线会整体提升, 也就是说负关联会加大信噪比. 更进一步的分析仍见图 2, 噪声之间的关联会导致两个明显的变化: 一个是 S 较无关联时有微弱的减小, 另一个是 N 较无关联时显著减小. 后者是由于两个关联噪声之间部分抵消造成的, 我们称之为噪声之间的抑制效应. 关联强度越大 ($|\lambda|$ 增加), 这个抑制效应越显著, 同时, 对于不同的噪声强度 q , 噪声之间的抑制程度是不一样的, 这导致在强关联情况下 ($\lambda = -0.9$), N 不再随 q 单调增加, 而是会在一个合适的 q 值处出现一个极小值. 比较起来, 关联导致的 N 的减小 (比 S) 更为显著, 因此两个变化总体的结果是信噪比比无关联的情况要大, 同时随着负关联的加强而增加. 强关联 ($\lambda = -0.9$) 时, 抑制效应成为产生随机共振的主导因素, 信噪比的峰值几乎就出现在 N 的极小处.

信噪比随泵噪声强度 d 的变化情况则略有不同. 从图 3 可以看到, 只有噪声之间存在关联时, 才有随机共振发生, 不存在关联时, 没有随机共振发生. 同样, 随着负关联的加强 ($|\lambda|$ 增加) 信噪比增加.

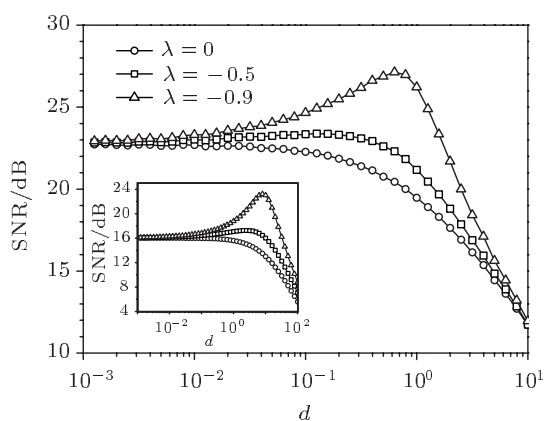


图 3 在阈值附近工作时, 信噪比随泵噪声强度 d 的变化曲线 ($a = 0.05, A = 1, q = 0.5, B = 20, \omega_0 = 100\pi$), 内插图为线性化近似结果, 来自附录 (A4), (A5) 式

为了对比起见, 在图 1 和图 3 的内插图中画出了同样参数下线性化近似的结果 (根据附录 (A4), (A5) 式), 很明显, 线性化近似的结果不能令人满意. 首先, 图 1 和图 3 均显示, 从定量的角度来看, 线性化近似误差很大, 例如, 在图 3 中, $\lambda = -0.9$ 时, 信噪比峰值位置与模拟结果相差一个量级; 其次, 按照线性化近似的预言, 在噪声无关联情况下是不会发生随机共振的, 在这一点上线性化近似从定性上也是失败的 (图 1). 这都说明, 线性化近似在阈值时是失效的. 究其原因, 是因为此时稳态光强

较小, 与此相比, 噪声强度以及信号强度并不能认为是小量.

3.2 远离阈值

当 a 较大时, 激光远离阈值工作. 因为在噪声强度较小时, 该区域的激光方程可以做线性化近似, 因此目前关于激光系统随机共振的研究集中于这一区域. 但即便是这个区域, 模拟研究仍可以展示出一些线性化近似所不能预言的结果.

由图 4 和图 5 可知, 在远离阈值时, 信噪比随泵噪声和量子噪声的变化呈现相似的性质: 当噪声之间没有关联时, 信噪比随噪声强度的增大单调减小, 没有随机共振现象发生, 而当噪声之间存在关联时, 信噪比会随着噪声强度的增大先增大后减小, 出现随机共振现象, 并且信噪比峰值的高度随着关联强度的增大 ($|\lambda|$ 增加) 而增高.

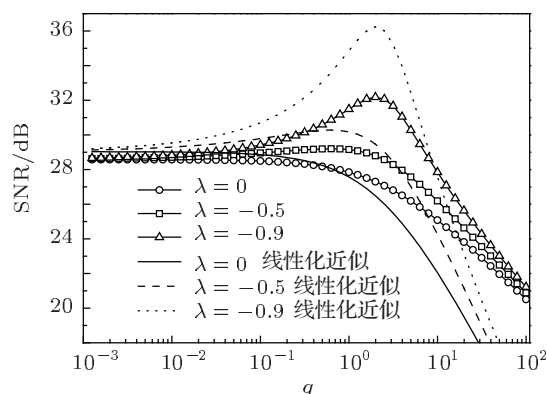


图 4 远离阈值工作时, 信噪比随量子噪声强度 q 的变化曲线 ($a = 5, A = 1, d = 0.5, B = 20, \omega_0 = 100\pi$), 其中线性化近似结果来自附录 (A4), (A5) 式

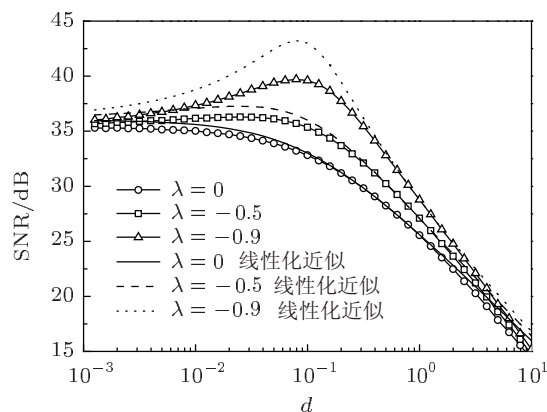


图 5 远离阈值工作时, 信噪比随泵噪声强度 d 的变化曲线 ($a = 5, A = 1, q = 0.5, B = 20, \omega_0 = 100\pi$), 其中线性化近似结果来自附录 (A4), (A5) 式

同时,从图4和图5还可看出,在定性上,线性化近似与模拟结果可以得到相同的结论,并且当噪声强度较小时,线性化近似的结果在定量上也与模拟结果符合得较好,但当量子噪声强度 q 较大(图4)和关联较强时(图4,图5),信噪比明显偏离模拟结果.深入的分析显示出模拟结果与线性化近似更大的不同.以量子噪声为例,当量子噪声变化时, S 与 N 的变化情况显示于图6,可以看出,不管噪声间有无关联,随着量子噪声强度的增大 S 都是增大的,而按照线性化近似理论,噪声强度对输出功率是没有影响的(见附录(A3)).

另外,从图6中我们还发现,与近阈值情况不同,噪声关联强度的增大($|\lambda|$ 增加)会导致 S 的增大,同时 N 随着关联强度的增大具有较明显的减小,两者共同导致在关联加强时信噪比增大.

泵噪声变化时, S 和 N 的变化情况与图6类似,在此不详述.

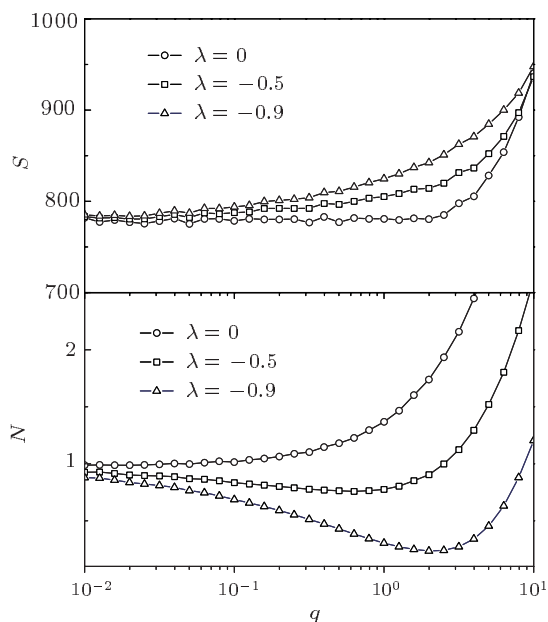


图6 远离阈值工作时, S 与 N 随量子噪声强度 q 的变化曲线($a = 5, A = 1, d = 0.5, B = 20, \omega_0 = 100\pi$)

4 结论

本文研究了光强被周期信号调制的激光系统,研究表明:

1) 在阈值附近,即便泵噪声与量子噪声无关联,信噪比随量子噪声强度的增大也会出现随机共振现象,但两噪声之间的关联会导致信噪比的增大;不管噪声间有无关联,量子噪声强度增大时,输出功率均增大;

2) 在阈值附近,当泵噪声与量子噪声无关联时,信噪比随着泵噪声强度增大不会出现随机共振现象;当两噪声之间存在关联时,信噪比随泵噪声的增大会出现随机共振现象;

3) 远离阈值情况,当泵噪声与量子噪声无关联时,泵噪声与量子噪声强度增大均会导致输出功率增大,但均不会出现随机共振现象;只有当两噪声之间存在关联时,才有随机共振现象发生;

4) 在阈值附近,数值模拟的结果和线性化近似所得结果无论从定量上还是定性上都很不一致,表明在近阈值时线性化近似不再有效;在远离阈值时,如果噪声比较弱,或者两噪声之间的关联强度比较小,则数值模拟的结果和线性化近似所得结果很接近,可以相互印证,否则偏差较大.

同时我们发现,在本文研究的系统中,两种因素可导致随机共振的出现:一种是当噪声增强时,信号功率增大;另一种是当噪声存在关联时,噪声间的抑制效应会减小背景噪声的功率,这种抑制效应通常会导致在合适的噪声强度处背景噪声的功率谱密度出现一个极小值.本文所发现的随机共振现象均伴随着上面这两种因素,或同时出现,或其中一个起作用.另外,本文的研究对象是单稳系统,所发现的在噪声之间没有关联的情况下的随机共振现象,应该是单稳系统随机共振的又一个新的类型.因为从势场的形式来看,它是不对称的单稳势场,同时在一端($I = 0$)是有边界的,从对噪声的依赖关系方面来看,它不要求噪声之间具有相互关联,从信号角度来看,我们研究的是乘性信号,这几方面与已有的有关研究都不完全相同^[3,11-13],其内在机理有必要做进一步的深入研究.

附录 A

为了便于说明本文的结果与线性化结果的相同与不同之处,在本文的有关图形中我们也给出了线性化近似结果,有关公式简要说明如下.

令

$$I = I_0 + \delta I, \quad (\text{A1})$$

其中 $I_0 = a/A$ 为稳态光强,当噪声强度以及信号强度远远小于稳态光强时,可以认为 $I_0 \gg \delta I$,此时将(A1)代入方程(1),并仅保留至 δI 的一阶项,可以得到线性化后的方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta I = & -2a\delta I + q + BI_0 \cos(\omega_0 t) \\ & + 2I_0 \xi(t) + 2\sqrt{I_0} \eta(t), \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

解上面方程, 并考虑 (A1) 式, 可以得到光强的功率谱密度函数^[14]

$$S_L(\omega) = \frac{B^2 I_0^2}{2(\omega^2 + 4a^2)} \delta(\omega - \Omega) + \frac{4d \cdot I_0^2 + 8\lambda\sqrt{d} \cdot q I_0^{3/2} + 4q \cdot I_0}{\omega^2 + 4a^2}, \quad (\text{A3})$$

其中, $\frac{B^2 I_0^2}{2(\omega^2 + 4a^2)}$ 为信号功率, 它与噪声的特性 (强度、关联强度) 无关, 这是线性系统的特点, 它说明噪声与信号没有耦合, (A3) 式右边最后一项表示噪声功率. 进一步可以

得到信噪比

$$R = 10 \lg \frac{B^2 I_0^2}{8d \cdot I_0^2 + 16\lambda\sqrt{d} \cdot q I_0^{3/2} + 8q \cdot I_0}, \quad (\text{A4})$$

由于这里采用的是信号的总功率, 因此 R 与 SNR 不同^[8], 它们的换算关系为

$$\text{SNR} = R - 10 \lg \Delta\omega, \quad (\text{A5})$$

其中, $\Delta\omega$ 为频率分辨率, 对于本文选取的模拟参数, $\Delta\omega = \pi/16$ Hz.

-
- [1] Gammaltoni L, Haggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [2] Zhang L Y, Cao L, Wu D J, Wang J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 25
- [3] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese) [张良英, 曹力, 吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]
- [4] Zhang L Y, Jin G X, Cao L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044207 (in Chinese) [张良英, 金国祥, 曹力 2011 物理学报 **60** 044207]
- [5] Chen D Y, Wang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 102 (in Chinese) [陈德彝, 王忠龙 2009 物理学报 **58** 102]
- [6] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0952
- [7] Hernández-García E, Toral R, San Miguel M 1990 *Phys. Rev. A* **42** 6823
- [8] Gardiner C 1983 *Handbook of Stochastic Processes* (Berlin: Springer-Verlag) p86
- [9] Honeycutt R L 1992 *Phys. Rev. A* **45** 600
- [10] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. E* **39** 4854
- [11] Evstigneev M, Pankov V, Prince R H 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 2595
- [12] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2003 物理学报 **52** 2712]
- [13] Agudov N V, Krichigin A V, Valenti D, Spagnolo B 2010 *Phys. Rev. E* **81** 051123
- [14] Góra P F 2005 *Physica A* **354** 153

Simulation study on the stochastic resonance of single-mode laser system

Yang Ming[†] Li Xiang-Lian Wu Da-Jin

(School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

(Received 15 November 2011; revised manuscript received 3 February 2012)

Abstract

Single-mode laser systems with modulated signals are studied by the method of numerical simulation. The signal-to-noise ratio, the output signal power, and the background noise power are analyzed near and far from the threshold. It is found that when the laser works near the threshold, the signal-to-noise ratio is present and the behavior of stochastic resonance takes place as the quantum noise increases, no matter whether the quantum noise is correlated with the pump noise. The correlation between the two noises, however, will increase the signal-to-noise ratio. And when the laser works far from the threshold, only when the two noises are correlated can the behavior of stochastic resonance appear. It is also found that the output signal power can be influenced by the noises. What is more, the simulation results are compared with those obtained by the method of linear approximation.

Keywords: stochastic resonance, signal-to-noise ratio, output signal power, background noise power

PACS: 05.40.-a, 42.60.Mi

[†] E-mail: yangming@hust.edu.cn