

一类不确定复杂网络的滑模追踪同步*

柳爽 吕翎[†] 李钢

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2012年1月15日收到; 2012年2月9日收到修改稿)

针对一类参量未知的混沌系统构成结构不确定的网络, 选择了适当的滑模面, 通过对未知参量的识别和滑模控制器的设计, 最终实现了整个网络对外部信号的追踪同步. 仿真结果表明, 网络中所有的状态变量同步追踪了外部输入信号的轨迹, 验证了该同步方法的有效性.

关键词: 复杂网络, 参量识别, 滑模面, 追踪同步

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

1 引言

自 Emelyanov^[1] 提出了一种滑模控制 (sliding mode control, SMC) 方法以来, 滑模控制的相关理论研究及其在实际中所显现的应用潜力逐步引起了人们的广泛关注^[2-8]. 各国学者先后投入到滑模控制的相关研究中, 使得滑模控制理论得到了进一步完善, 研究范围也由最初的规范空间扩展到了更一般的状态空间^[9-13].

滑模控制亦称之为变结构控制, 它是指在滑模控制器的作用下, 受控系统进入了一种高频切换的状态, 迫使其在预先设定的滑模面上持续运动, 最终沿着该滑模面收敛到预期的滑动模态, 从而达到控制的目的. 滑模控制的优势在于系统的稳定性仅取决于滑模面及其参量的设定, 对外界噪声干扰和参量扰动具有鲁棒性, 并具有快速响应、物理实现简单等优点. 正是这种优良特性使得滑模控制理论能普遍适用于线性或非线性系统、连续或离散系统、确定或不确定系统, 并在电力、航空航天、信息通讯以及自动控制等领域得到了推广应用, 许多有价值的研究成果相继被报道, 其中利用滑模控制进行两个系统之间的追踪同步成为该研究领域的热点问题^[14-18]. 1977年, Utkin^[19] 研究了异

结构系统之间的滑模控制问题, 标志着滑模控制的研究对象由同结构系统扩展到异结构系统之间的同步; 在此之后, Sarpturk 等^[20] 提出了一种有关离散系统的变结构控制方案, 验证了滑模控制理论不仅适用于连续系统, 也适用于离散系统; 1998年, Bartolini 等^[21] 对二阶系统的滑模控制问题进行了相关讨论, 使运用滑模控制法对二阶系统的同步研究更加深入; 最近, Roopaci 等^[22] 研究了一类混沌系统的自适应滑模同步规律, 使滑模控制理论的适用性得到了进一步的完善. 这些重要的成果为人们进一步进行滑模控制的理论以及应用研究奠定了良好的工作基础.

迄今为止, 已报道的研究工作基本上是关于两个系统之间的滑模追踪同步问题, 而自然界中存在着大量的具有相互关联的系统, 这些系统通过相互间的耦合作用构成了复杂网络. 与两个系统之间的滑模追踪同步相比较, 有关网络滑模追踪同步的报道还相对较少, 因此有关复杂网络滑模追踪同步的研究是十分必要的. 另外, 在追踪同步的实际过程中, 网络中节点数目繁多, 连接方式多样, 耦合强度未知, 系统参量不确定等因素均可能存在, 因此, 研究不确定网络与信号之间的追踪同步问题是一项具有实际意义的工作.

本文以物理中常见的双涡卷电路构成的复杂

* 辽宁省自然科学基金(批准号: 20082147) 和辽宁省教育厅创新团队计划(批准号: 2008T108) 资助的课题.

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

网络为例, 在网络节点混沌系统中的参量和网络耦合强度均未知的情形下, 利用滑模控制法研究了不确定网络与外部输入信号之间的追踪同步问题. 根据实际需要, 外部输入信号的形式可以为常信号、线性信号、非线性信号、周期信号以及混沌信号等等. 本文仿真模拟了电路网络与正弦信号、Lorenz 系统产生的混沌信号之间追踪同步的过程. 结果表明, 此方法适用于任意结构的不确定网络, 具有一定的普适性.

2 同步原理

设一个任意结构的复杂网络有 N 个节点, 节点的状态方程是参量未知的混沌系统. 其中第 i 个节点系统的状态变量是 $\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$, 单个节点在不考虑耦合作用时所满足的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

将状态方程 (1) 进行适当的分离

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t)) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_i(t))\boldsymbol{\delta}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

这里 $\boldsymbol{\delta}_i \in \mathbb{R}^m$ 是第 i 个节点混沌系统的未知参量.

考虑耦合作用时, 由 N 个参量未知的混沌系统 (2) 作为节点构成的复杂网络具有下列形式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = & \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_i(t))\boldsymbol{\delta}_i + \boldsymbol{\sigma}_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) \\ & + \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连接网络各节点的耦合函数, $\boldsymbol{\sigma}_i$ 为网络的未知耦合强度, a_{ij} 是表示网络拓扑结构的耦合矩阵元. $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$ 是施加在网络第 i 个节点上的滑模控制器.

考虑网络对外部输入信号的追踪同步问题. 设任意给定的外部输入信号为 $\mathbf{r}(t)$, 则网络的第 i 个节点与此信号之间对应变量的误差为

$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{r}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

进一步得到误差的时间演化方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) = & \dot{\mathbf{x}}_i(t) - \dot{\mathbf{r}}(t) \\ = & \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_i(t)) - \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_i(t))\boldsymbol{\delta}_i \end{aligned}$$

$$+ \boldsymbol{\sigma}_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) + \mathbf{u}_i. \quad (5)$$

定义网络节点与外部输入信号之间的滑模面

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i = & \mathbf{e}_i(t) + \int_0^t c_i \mathbf{e}_i(\tau) d\tau \\ (i = & 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (6)$$

这里 c_i 为滑模面常量.

根据滑模控制理论, 当发生滑模运动时需满足如下条件:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{e}_i(t) + \int_0^t c_i \mathbf{e}_i(\tau) d\tau = 0, \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{e}}_i(t) + c_i \mathbf{e}_i(t) = 0. \quad (8)$$

由方程 (8) 得

$$\dot{\mathbf{e}}_i(t) = -c_i \mathbf{e}_i(t). \quad (9)$$

显然, 当选取常量 $c_i > 0$ 时, (9) 式渐近稳定, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_i(t)\| = 0$.

进一步构造网络的 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\delta}_i)^T P_i (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\delta}_i) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\sigma}_i)^T K_i (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\sigma}_i), \end{aligned} \quad (10)$$

上式中 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 代表网络节点混沌系统中未知参量 $\boldsymbol{\delta}_i$ 的识别量, $\boldsymbol{\beta}_i$ 代表网络中未知耦合强度 $\boldsymbol{\sigma}_i$ 的识别量, P_i, K_i 是大于零的常量.

(10) 式的导数可以表示成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i + \sum_{i=1}^N \dot{\boldsymbol{\lambda}}_i^T P_i (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\delta}_i) \\ & + \sum_{i=1}^N \dot{\boldsymbol{\beta}}_i^T K_i (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\sigma}_i) \\ = & \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T [\dot{\mathbf{e}}_i(t) + c_i \mathbf{e}_i(t)] + \sum_{i=1}^N \dot{\boldsymbol{\lambda}}_i^T P_i (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\delta}_i) \\ & + \sum_{i=1}^N \dot{\boldsymbol{\beta}}_i^T K_i (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\sigma}_i) \\ = & \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T [\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_i(t)) - \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_i(t))\boldsymbol{\delta}_i \\ & + \boldsymbol{\sigma}_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) + \mathbf{u}_i + c_i \mathbf{e}_i(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N \dot{\lambda}_i^T P_i (\lambda_i - \delta_i) \\
 & + \sum_{i=1}^N \dot{\beta}_i^T K_i (\beta_i - \sigma_i). \tag{11}
 \end{aligned}$$

设计滑模控制器

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_i = & -\Gamma(\mathbf{x}_i(t)) + \dot{\mathbf{r}}(t) - \Phi(\mathbf{x}_i(t))\lambda_i \\
 & - \beta_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) - c_i \mathbf{e}_i(t) \\
 & - \eta_i \text{sign}(\mathbf{s}_i^T), \tag{12}
 \end{aligned}$$

其中 η_i 为调控参量.

(11) 式可以表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \left[\Gamma(\mathbf{x}_i(t)) - \dot{\mathbf{r}}(t) + \Phi(\mathbf{x}_i(t))\delta_i \right. \\
 & \left. + \sigma_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) + \mathbf{u}_i + c_i \mathbf{e}_i(t) \right] \\
 & + \sum_{i=1}^N \dot{\lambda}_i^T P_i (\lambda_i - \delta_i) + \sum_{i=1}^N \dot{\beta}_i^T K_i (\beta_i - \sigma_i) \\
 = & \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \left[\Phi(\mathbf{x}_i(t))(\delta_i - \lambda_i) \right. \\
 & \left. + (\sigma_i - \beta_i) \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) - \eta_i \text{sign}(\mathbf{s}_i^T) \right] \\
 & + \sum_{i=1}^N \dot{\lambda}_i^T P_i (\lambda_i - \delta_i) \\
 & + \sum_{i=1}^N \dot{\beta}_i^T K_i (\beta_i - \sigma_i). \tag{13}
 \end{aligned}$$

定义网络未知参量和耦合强度的识别律

$$\dot{\lambda}_i = P_i^{-1} \Phi(\mathbf{x}_i(t))^T \mathbf{s}_i, \tag{14}$$

$$\dot{\beta}_i = K_i^{-1} \left[(\sigma_i - \beta_i) \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) (\sigma_i - \beta_i)^{-1} \right]^T \mathbf{s}_i. \tag{15}$$

考虑到 (14) 和 (15) 式, (13) 式可以简化为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T (-\eta_i \text{sign}(\mathbf{s}_i^T)) \\
 = & - \sum_{i=1}^N \eta_i |\mathbf{s}_i^T|. \tag{16}
 \end{aligned}$$

选择调控参量 $\eta_i > 0$, 则 $\dot{V}(t) < 0$. 根据稳定性定理 [23], 网络的追踪同步得以实现, 这意味着复杂网络的所有节点均追踪到给定的外部输入信号.

3 仿真模拟

以典型的最近邻网络为例, 仿真电路网络中信号的追踪同步过程. 最近邻网络的耦合矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

我们选择一类双涡卷混沌电路作为节点构成网络. 单个节点在不考虑耦合作用时所满足的状态方程具有下列形式 [24]

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\rho(x + y + z) + \varepsilon f(x), \end{cases} \tag{18}$$

其中 ρ, ε 是系统的参量, $f(x)$ 是系统的内部函数,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > k, \\ \frac{1}{k}x & -k \leq x \leq k, \\ -1 & x < -k. \end{cases}$$

判定系统动力学特征的有效方法是计算其最大 Lyapunov 指数. 我们取系统初始值 $x = -0.5, y = -0.6, z = 0.1$, 电路参量值 $\rho = 0.5, k = 0.7$, 计算最大 Lyapunov 指数随参量 ε 的演化关系如图 1 所示. 在最大 Lyapunov 指数大于零的区域取参量 $\varepsilon = 0.8$, 系统存在如图 2 所示的双涡卷混沌吸引子.

仿真模拟网络追踪同步时, 取网络的节点数 $N = 3$, 连接网络各节点的耦合函数取单变量, 并假设作为网络节点的双涡卷混沌电路中参量 $\rho_i (i = 1, 2, 3)$ 未知, 三个双涡卷混沌电路系统按 (3) 式的连接构成复杂网络.

首先我们以周期振荡的正弦函数作为外部输入信号, 仿真模拟网络与这个目标信号之间的追踪同步.

设定外部输入信号

$$r(t) = \sin t. \quad (19)$$

不失一般性地让网络各节点双涡卷混沌电路状态方程中的第一个状态变量 x_i 追踪这个目标信号, 则状态变量 x_i 与信号 $r(t)$ 的误差为

$$e_i = x_i - r(t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20)$$

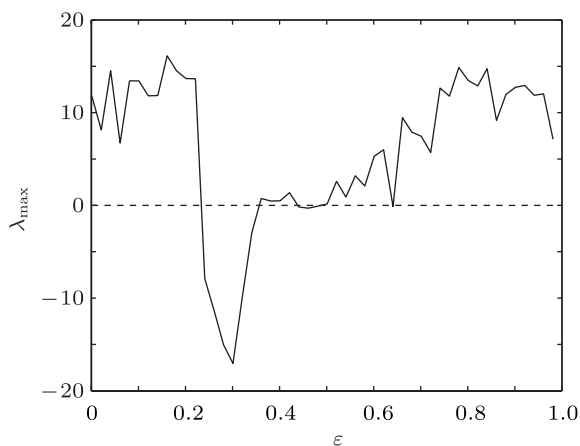


图1 最大 Lyapunov 指数随参量 ε 的演化

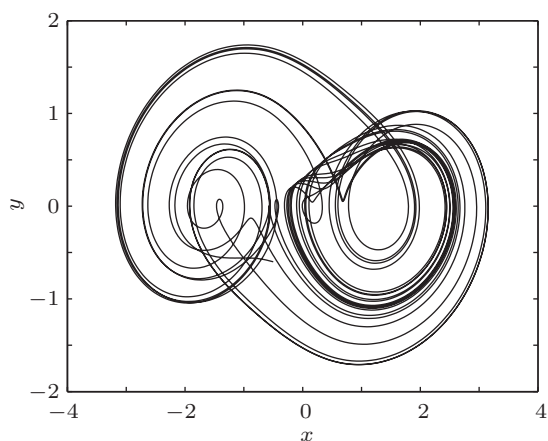


图2 双涡卷混沌吸引子

选择滑模面

$$s_i = e_i + \int_0^t c_i e_i(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, 3). \quad (21)$$

滑模控制器的形式满足 (12) 式, 网络节点状态方程中的未知参量由相应的识别律 (14) 式所替代, 网络连接中的未知耦合强度由相应的识别律 (15) 式确定, 选取参量 $K_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$),

$P_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$). 滑模面常量取 $c_1 = 1, c_2 = 1.5, c_3 = 0.5$. 调控参量取 $\eta_1 = 1, \eta_2 = 1.5, \eta_3 = 1.8$. 仿真模拟网络与正弦信号之间追踪同步的过程. 节点与正弦信号之间对应变量的误差、滑模面以及网络节点状态变量随时间的演化规律如图 3—5 所示.

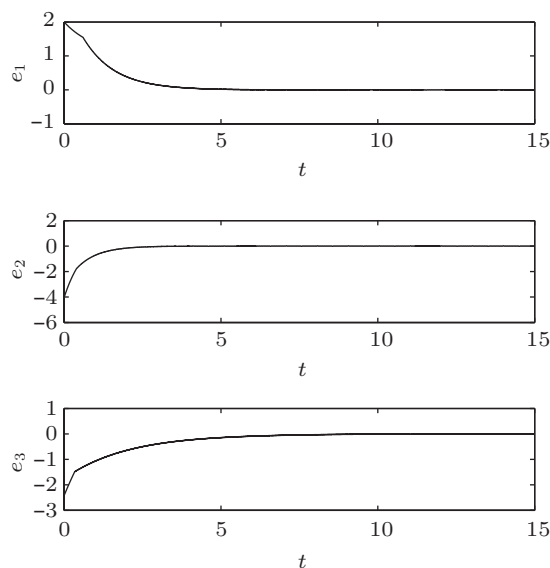


图3 误差变量 e_i 随时间的演化

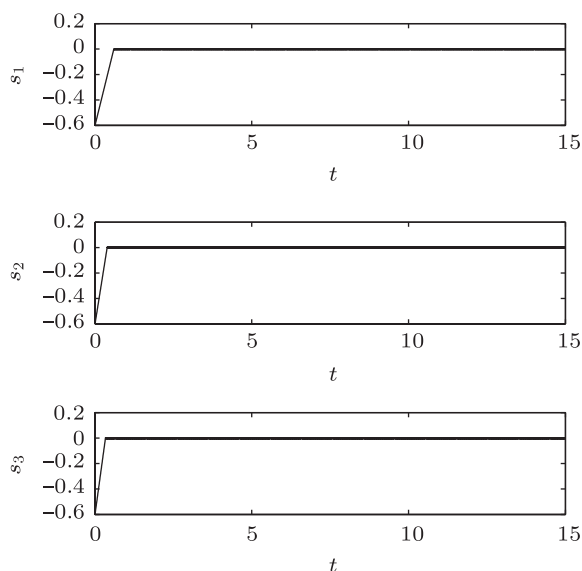


图4 滑模面 s_i 随时间的演化

由图 3—5 不难发现, 经过短暂的时间演化, 相应的误差变量以及滑模面迅速地趋于零, 网络所有节点严格追踪同步于正弦输入信号的轨迹, 网络的追踪同步得以实现.

另外,选择 Lorenz 系统产生的混沌信号作为外部输入信号 [25]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(y - x), \\ \dot{y} = x(b - z) - y, \\ \dot{z} = xy - cz, \end{cases} \quad (22)$$

其中当系统初始值取 $x = -1, y = 1, z = 0$, 参量 $\mu = 10, b = 28, c = 8/3$ 时,系统产生如图 6 所示的混沌信号.

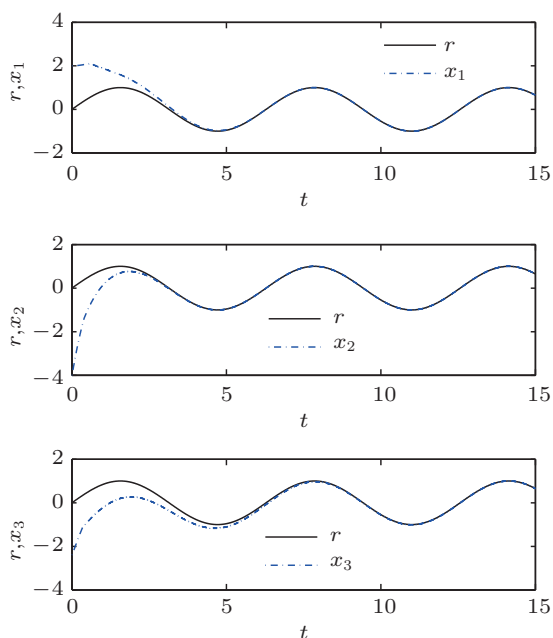


图 5 状态变量随时间的演化

设定网络节点状态方程中的状态变量与 Lorenz 系统产生的混沌信号的误差

$$\begin{cases} e_{i1} = x_i - x, \\ e_{i2} = y_i - y \\ e_{i3} = z_i - z. \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (23)$$

选择滑模面

$$s_{ij} = e_{ij} + \int_0^t c_i e_{ij}(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3). \quad (24)$$

滑模控制器的形式满足 (12) 式, 网络节点状态方程中的未知参量仍由相应的识别律 (14) 式所替代, 网络连接中的未知耦合强度仍由相应的识别律 (15) 式确定, 并且保持其他所有参量数值的选取不变, 仿真模拟网络和 Lorenz 系统产生的混沌信号

之间的追踪同步过程. 误差、滑模面以及各状态变量随时间的演化规律如图 7—9 所示.

由仿真结果可以看出, 经过短暂的时间演化, 网络各节点严格地追踪了 Lorenz 系统产生的混沌信号的轨迹, 误差变量以及滑模面随时间的演化均迅速地趋于零, 说明该同步方法是有效的.

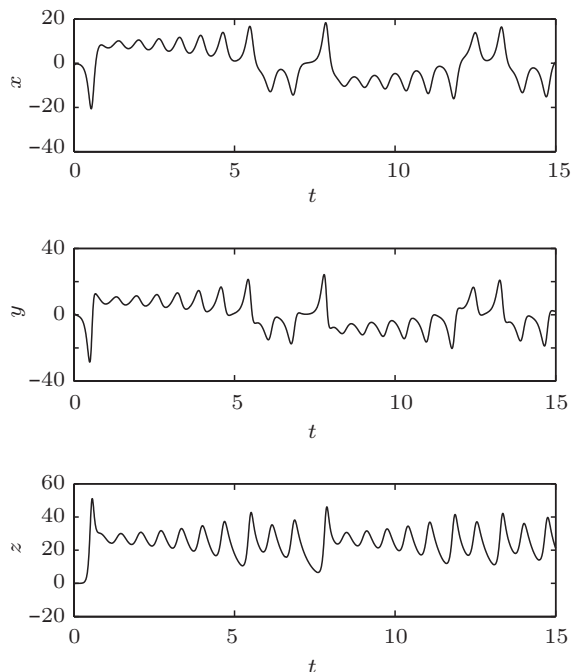


图 6 Lorenz 系统的混沌信号

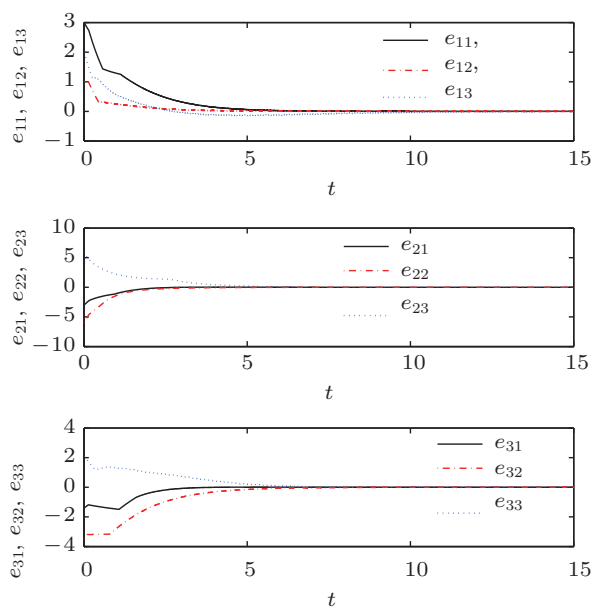


图 7 误差变量 e_{ij} 随时间的演化

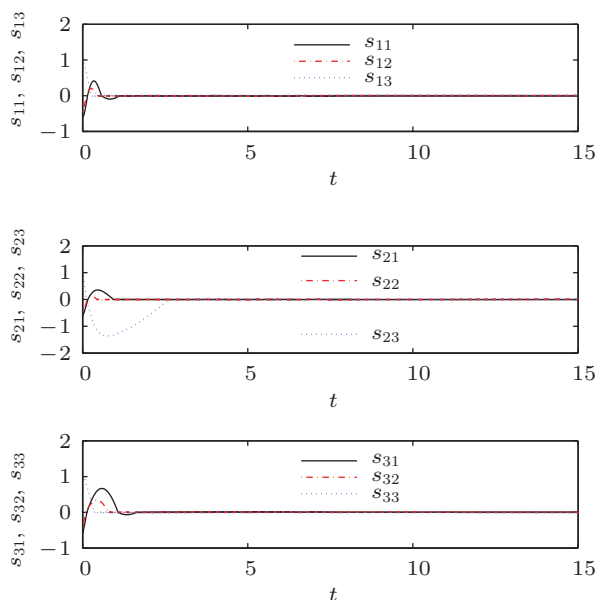
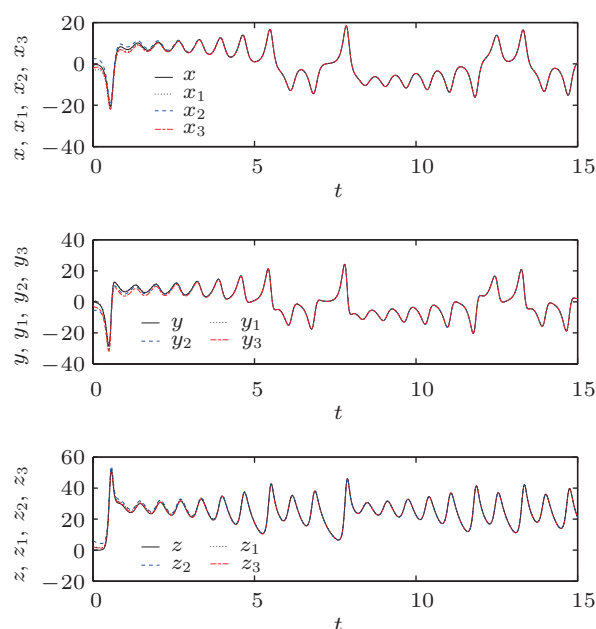
图8 滑模面 s_{ij} 随时间的演化

图9 状态变量随时间的演化

4 结论

研究了不确定网络与外部输入信号的追踪同步问题. 首先选择了适当的滑模面, 通过网络节点状态方程中未知参量和网络耦合强度的有效识别以及滑模控制器的共同作用, 使系统保持在预先设置的滑模面上运动, 最终实现了整个网络与外部

输入信号之间的追踪同步. 进一步以物理中常见的双涡卷电路构成的复杂网络作为实例进行了仿真分析. 结果表明, 经过短暂的时间演化, 网络所有节点状态方程中的状态变量严格追踪了正弦信号以及 Lorenz 系统产生的混沌信号, 相应的误差以及滑模面随时间的演化迅速地趋于零. 此同步方法适用于任意结构的不确定网络.

- [1] Emelyanov S V 1959 *Automat. Rem. Contr.* **20** 983
- [2] Qi D L, Yang J, Zhang J L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100506
- [3] Chen M, Jiang C S, Jiang B, Wu Q X 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **39** 1856
- [4] Zribi M, Smaoui N, Salim H 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **42** 3197
- [5] Wang H, Han Z Z, Xie Q Y, Zhang W 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **14** 2728
- [6] Vasegh N, Khellat F 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **42** 1054
- [7] Li M, Liu C X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100504
- [8] Tavazoei M S, Haeri M 2008 *Physica A* **387** 57
- [9] Haeri M, Tavazoei M S, Naseh M R 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **33** 1230
- [10] Vincent U E 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **37** 1065
- [11] Huang D 2004 *Phys. Rev. E* **69** 067201
- [12] Feng J W, He L, Xu C, Austin F, Wu G 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 2546
- [13] Li X C, Xu W, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4721 (in Chinese) [李秀春, 徐伟, 肖玉柱 2008 物理学报 **57** 4721]
- [14] Kalsi K, Lian J, Hui S, Žak S H 2010 *Automatica* **46** 347
- [15] Cai N, Jing Y, Zhang S 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 1613
- [16] Wang C C, Pai N S, Yau H T 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 741
- [17] Pai N S, Yau H T 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 133
- [18] Farivar F, Shoorehdeli M A, Nekoui M A, Teshnehlab M 2011 *Expert Syst. Appl.* **38** 4714
- [19] Utkin V 1977 *IEEE Trans. Automatic Control* **22** 212
- [20] Sarpturk S, Istefanopulos Y, Kaynak O 1987 *IEEE Trans. Automatic Control* **32** 930
- [21] Bartolini G, Ferrara A, Usani E 1998 *IEEE Trans. Automatic Control* **43** 241
- [22] Roopaei M, Sahraei B R, Lin T C 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 4158
- [23] Lü L 2000 *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Dalian: Dalian Publishing House) (in Chinese) [吕翎 2000 非线性动力学与混沌 (大连: 大连出版社)]
- [24] Kyprianidis I M, Volos Ch K, Stavrinos S G, Stouboulos I N, Anagnostopoulos A N 2010 *J. Eng. Sci. Tech. Rev.* **3** 41
- [25] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130

Sliding mode tracking synchronization of an uncertain complex network*

Liu Shuang Lü Ling[†] Li Gang

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 15 January 2012; revised manuscript received 9 February 2012)

Abstract

The problem of tracking synchronization for an uncertain complex network is proposed. By selecting an appropriate sliding surface, designing parameter identification laws and sliding mode controllers, the tracking synchronization between the network and output signal is achieved. The simulation results show that all the state variables in the network can track target orbit strictly, which shows that the method is effective.

Keywords: complex network, parameter identification, sliding surface, tracking synchronization

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn