

相干态的小波变换*

余海军[†] 杜建明 张秀兰

(淮南师范学院物理系, 淮南 232001)

(2012年1月11日收到; 2012年2月10日收到修改稿)

根据小波变换的量子力学机理, 通过选取不同的系数, 构造出两组新的母小波函数. 在此基础上, 利用正规乘积内积分技术, 推导出相干态和粒子数态的小波变换, 并数值模拟出它们的小波变换图谱.

关键词: 小波变换, 相干态, 粒子数态

PACS: 42.50.-p, 42.30.Kq

1 引言

小波变换是空间(时间)和频率的局部变换, 通过伸缩和平移等运算功能可对函数信号进行多尺度的细化分析, 在应用数学、物理学、计算机科学、信号与信息处理、图像处理、地震勘探等许多学科都有重要的科学意义和应用价值^[1]. 在数学上, 母函数 $\psi(x)$ 的基本小波函数 $\psi_{(\mu,s)}(x)$ 定义为 $\psi_{(\mu,s)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \psi\left(\frac{x-s}{\mu}\right)$, 式中 $\mu > 0$ 为伸缩参数, s 是平移参数, $s \in \mathbb{R}$. 信号函数 $f(x)$ 的小波变换定义为 $\psi_{(\mu,s)}(x)$ 和 $f(x)$ 的内积

$$W_{\psi} f(\mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^* \left(\frac{x-s}{\mu} \right) dx, \quad (1)$$

它是缩放后的母函数与信号函数的相关.

文献[2—5]从量子力学么正变换的观点, 改写了经典小波积分变换(1)式, 定义量子力学态矢量的小波变换为

$$\begin{aligned} W(\mu, s) &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \psi \left| \frac{x-s}{\mu} \right. \right\rangle \langle x|f \rangle dx \\ &= \langle \psi | U(\mu, s) | f \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\langle \psi |$ 是相对于给定母小波的态矢, $|f\rangle$ 是需要做变换的态矢, $|x\rangle$ 是坐标本征矢, $U(\mu, s)$ 是压缩平

移算符. 利用正规乘积内积分(IWOP)技术^[6-9], 可得 $U(\mu, s)$ 的正规乘积表示

$$\begin{aligned} U(\mu, s) &\equiv \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x-s}{\mu} \right\rangle \langle x| dx \\ &= (\operatorname{sech} \lambda)^{1/2} \exp \left[\frac{-s^2}{2(1+\mu^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{a}^+ 2}{2} \tanh \lambda - \frac{\mathbf{a}^+ s}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda \right] \\ &\quad : \exp [(\operatorname{sech} \lambda - 1) \mathbf{a}^+ \mathbf{a}] : \\ &\quad \times \exp \left[\frac{a^2}{2} \tanh \lambda + \frac{sa}{\sqrt{2}\mu} \operatorname{sech} \lambda \right], \end{aligned} \quad (3)$$

式中 \mathbf{a} 和 \mathbf{a}^+ 分别是光场的产生算符和湮没算符, 并满足 $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = 1$, $\mu = e^\lambda$, $\operatorname{sech} \lambda = 2\mu/(1+\mu^2)$, $\tanh \lambda = (\mu^2 - 1)/(\mu^2 + 1)$.

利用坐标和动量表象之间满足的傅里叶变换关系, 可以把数学上具有实参量 x 的母小波 $\psi(x)$ 满足的资格条件 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ 改写成 Dirac 符号表示形式^[2-9] $\langle p=0|\psi\rangle = 0$. 通过定义^[10] $|\psi\rangle = G(\mathbf{a}^+) |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathbf{a}^{+n} |0\rangle$, 给出构造母小波函数的系数条件

$$\langle p=0|\psi\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} g_{2m} \frac{(2m)!}{2^m m!} = 0. \quad (4)$$

* 安徽高校省级自然科学基金项目(批准号: KJ2011Z339, KJ2011Z359)和淮南师范学院自然科学基金项目(批准号: 2010LK08)资助的课题.

[†] E-mail: haijun20030@163.com

例如, 选取 (4) 式中的系数 $g_0 = 1, g_2 = 2, g_4 = 4, g_6 = -1$, 可得

$$|\psi_1\rangle = (1 + 2\mathbf{a}^{+2} + 4\mathbf{a}^{+4} - \mathbf{a}^{+6}) |0\rangle, \quad (5)$$

利用公式 $\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$, 式中 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, 得出母小波函数

$$\psi_1(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} (-8x^6 + 76x^4 - 134x^2 + 26) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

如图 1(a) 所示. 再如, 选取 (4) 式中的系数 $g_0 = -2, g_2 = -1, g_4 = 1$, 可得

$$|\psi_2\rangle = (-2 - \mathbf{a}^{+2} + \mathbf{a}^{+4}) |0\rangle, \quad (6)$$

此时母小波函数

$$\psi_2(x) = 2\pi^{-\frac{1}{4}} (2x^4 - 7x^2 + 1) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

如图 1(b) 所示.

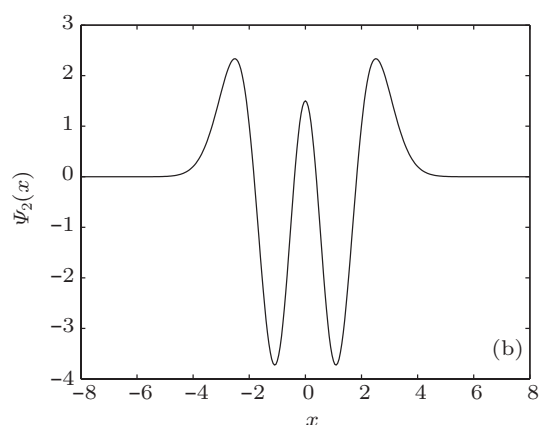
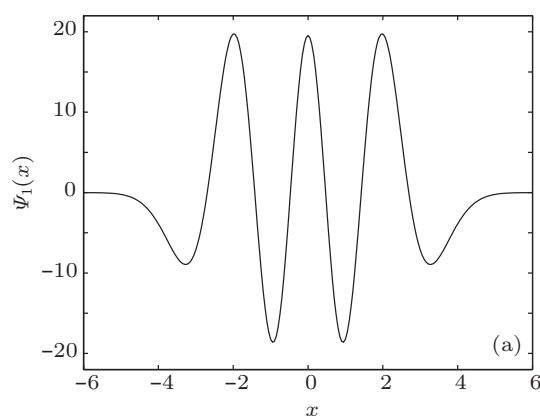


图 1 母小波函数图像 (a) $\psi_1(x)$; (b) $\psi_2(x)$

本文将在上面两组母小波函数下, 计算出量子

力学中相干态和粒子数态的小波变换, 并通过 Matlab 语言数值模拟, 绘出并分析相干态和粒子数态的小波变换图谱.

2 归一化相干态的小波变换

已知归一化相干态

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \mathbf{a}^{+n}}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{\mathbf{a}^+ z} |0\rangle,$$

又知相干态 $|z\rangle$ 是湮灭算符 \mathbf{a} 的本征态, $\mathbf{a}|z\rangle = z|z\rangle$ 由 (3) 式可以算出

$$\mathbf{U}(\mu, s)|z\rangle = A \exp\left[-\frac{\mathbf{a}^{+2}}{2} \tanh \lambda - \frac{\mathbf{a}^+ s}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda + \mathbf{a}^+ z \operatorname{sech} \lambda\right] |0\rangle, \quad (7)$$

式中

$$A = (\operatorname{sech} \lambda)^{1/2} \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} - \frac{s^2}{2(1+\mu^2)} + \frac{z^2}{2} \tanh \lambda + \frac{sz}{\sqrt{2}\mu} \operatorname{sech} \lambda\right].$$

选取

$$\psi_1(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} (-8x^6 + 76x^4 - 134x^2 + 26) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

分析该母小波函数下归一化相干态的小波变换. 利用算符公式

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}^n \exp[\varepsilon \mathbf{a}^{+2} + \sigma \mathbf{a}^+] \\ & = : \exp[\varepsilon \mathbf{a}^{+2} + \sigma \mathbf{a}^+] \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n! \varepsilon^k}{k! (n-2k)!} \\ & \quad (2\varepsilon \mathbf{a}^+ + \mathbf{a} + \sigma)^{n-2k} :, \end{aligned} \quad (8)$$

由 (5) 式和 (7) 式, 推导出相干态的小波变换为

$$\begin{aligned} & W(\mu, s) \\ & = \langle \psi_1 | \mathbf{U}(\mu, s) | z \rangle \\ & = A \langle 0 | (1 + 2\mathbf{a}^{+2} + 4\mathbf{a}^{+4} - \mathbf{a}^{+6}) \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{\mathbf{a}^{+2}}{2} \tanh \lambda - \frac{\mathbf{a}^+ s}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda + \mathbf{a}^+ z \operatorname{sech} \lambda\right] |0\rangle \\ & = A (1 - 2 \tanh \lambda + 12 \tanh^2 \lambda + 15 \tanh^3 \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ A(2 - 24 \tanh \lambda - 45 \tanh^2 \lambda) \\
 &\times \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 \operatorname{sech}^2 \lambda + A(4 + 15 \tanh \lambda) \\
 &\times \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^4 \operatorname{sech}^4 \lambda \\
 &- A \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^6 \operatorname{sech}^6 \lambda. \tag{9}
 \end{aligned}$$

为直观地观察,对(9)式利用 Matlab 语言数值模拟出了相干态下的小波变换谱随伸缩参数和平移参数的变化规律,如图 2—4 所示.纵向比较这三个图的实部(a)图部分(或虚部(b)图部分)可以看到, z 的取值增加,会形成更多的波峰,并向平移参

数 s 的正方向偏转;而随着压缩参数 μ 取值增大,峰值增大到一定程度后变得平稳.

3 粒子数态的小波变换

在上面工作的基础上,利用非归一化相干态 $|z\rangle = \exp[z\mathbf{a}^+]|0\rangle$,由(3)式可以算出

$$\begin{aligned}
 &U(\mu, s)|z\rangle \\
 &= B \exp \left[-\frac{\mathbf{a}^{+2}}{2} \tanh \lambda - \frac{\mathbf{a}^+ s}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{a}^+ z \operatorname{sech} \lambda \right] |0\rangle, \tag{10}
 \end{aligned}$$

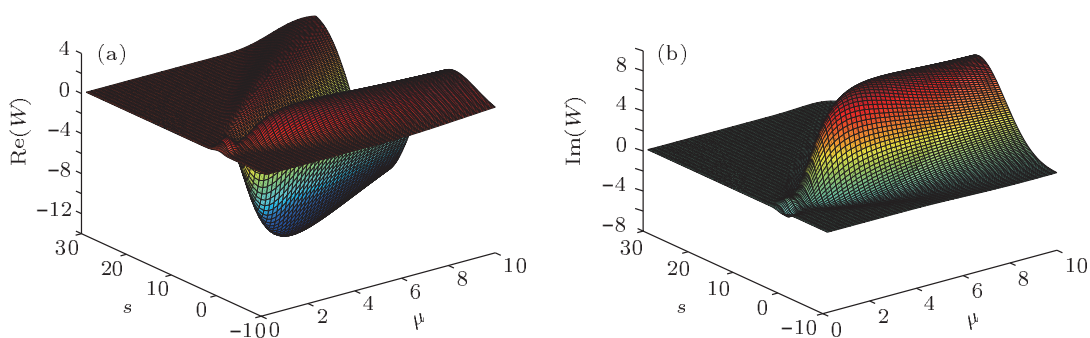


图 2 $z = 1 + i$ 时,相干态的小波变换谱 (a) 实部; (b) 虚部

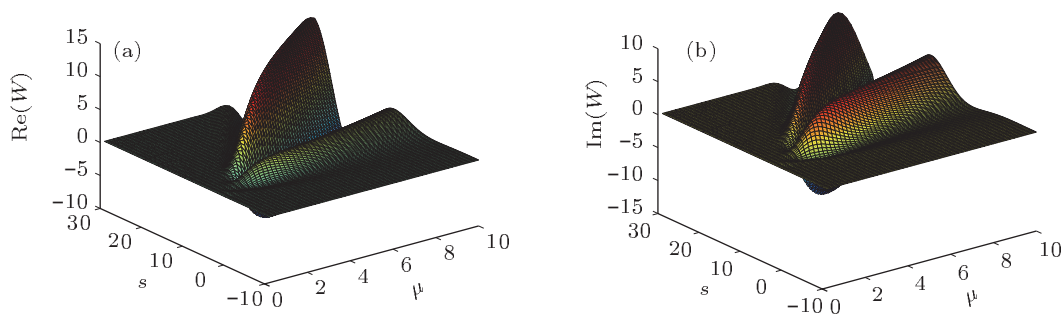


图 3 $z = 2 + 2i$ 时,相干态的小波变换谱 (a) 实部; (b) 虚部

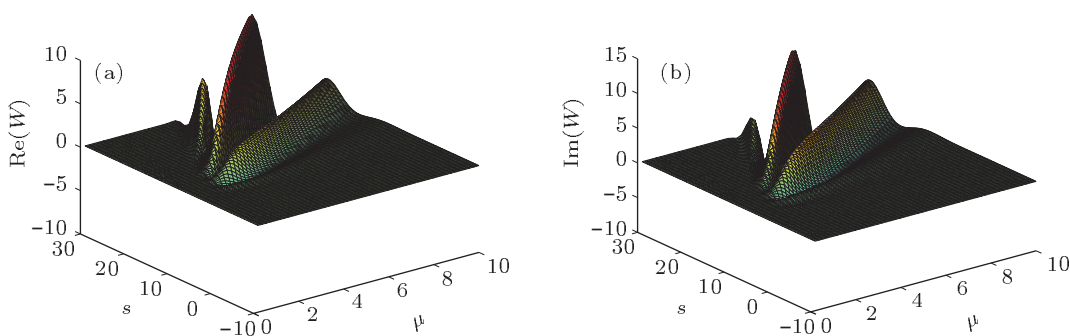


图 4 $z = 3 + 3i$ 时,相干态的小波变换谱 (a) 实部; (b) 虚部

式中

$$B = (\operatorname{sech} \lambda)^{1/2} \exp \left[-\frac{s^2}{2(1+\mu^2)} + \frac{z^2}{2} \tanh \lambda + \frac{sz}{\sqrt{2}\mu} \operatorname{sech} \lambda \right].$$

选取

$$\psi_2(x) = 2\pi^{-1/4} (2x^4 - 7x^2 + 1) \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right),$$

分析该母小波函数下粒子数态的小波变换. 利用算符 (8) 式, 由 (6) 式和 (10) 式, 可以求得

$$\begin{aligned} & \langle \psi_2 | \mathbf{U}(\mu, s) | z \rangle \\ &= B \langle 0 | (-2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^4) \exp \left[-\frac{\mathbf{a}^+2}{2} \tanh \lambda - \frac{\mathbf{a}^+s}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda + \mathbf{a}^+z \operatorname{sech} \lambda \right] | 0 \rangle \\ &= B (-2 + \tanh \lambda + 3 \tanh^2 \lambda) \\ & \quad - B (1 + 6 \tanh \lambda) \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \lambda \end{aligned}$$

$$+ B \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^4 \operatorname{sech}^4 \lambda. \quad (11)$$

由粒子数态与非归一化相干态的关系式

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{d}{dz} \right)^n |z\rangle \Big|_{z=0},$$

利用 (11) 式可以推导出粒子数态的小波变换为

$$\begin{aligned} & W(\mu, s) \\ &= \langle \psi_2 | \mathbf{U}(\mu, s) | n \rangle \\ &= \langle \psi_2 | \mathbf{U}(\mu, s) \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{d}{dz} \right)^n |z\rangle \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{d}{dz} \right)^n \langle \psi_2 | \mathbf{U}(\mu, s) |z\rangle \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{d}{dz} \right)^n B \left[(-2 + \tanh \lambda + 3 \tanh^2 \lambda) \right. \\ & \quad \left. - (1 + 6 \tanh \lambda) \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \lambda \right. \\ & \quad \left. + \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^4 \operatorname{sech}^4 \lambda \right] \Big|_{z=0}. \quad (12) \end{aligned}$$

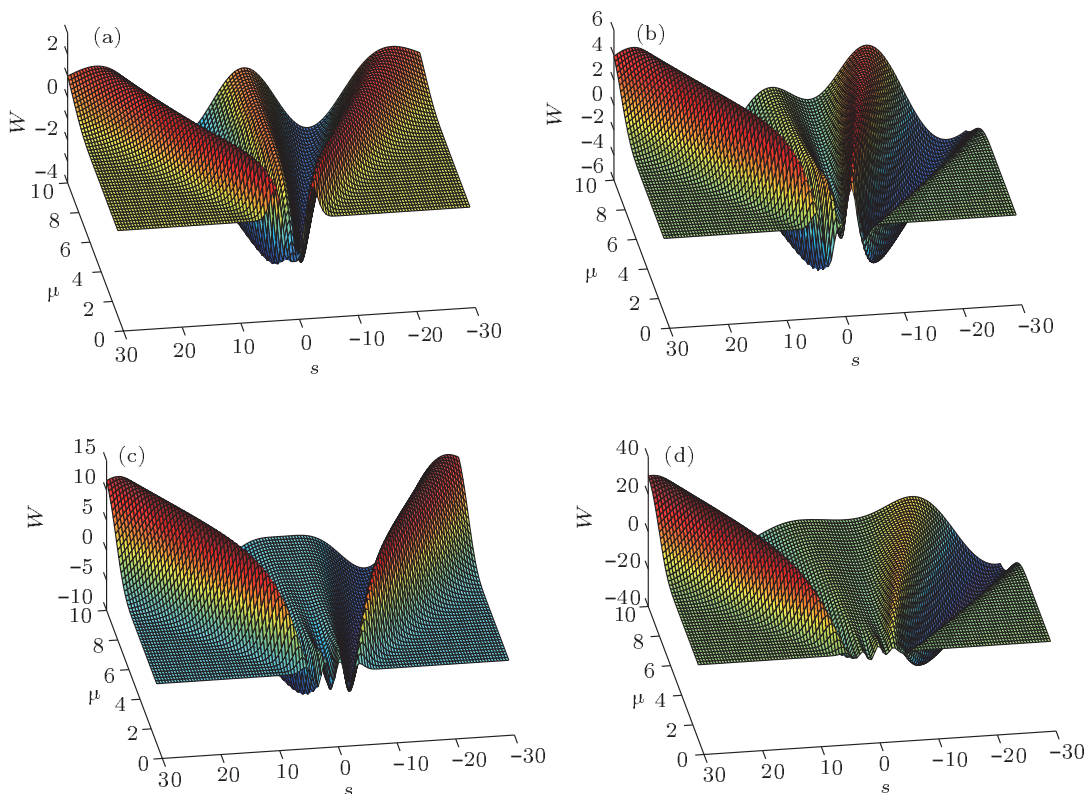


图5 粒子数态的小波变换谱 (a) $n = 0$; (b) $n = 1$; (c) $n = 2$; (d) $n = 3$

当 $n = 0$, 可以方便地计算出

$$\begin{aligned} & \langle \psi_2 | U(\mu, s) | 0 \rangle \\ &= \operatorname{sech}^{1/2} \lambda \exp \left[\frac{-s^2}{2(1+\mu^2)} \right] \\ & \times \left\{ (-2 + \tanh \lambda + 3 \tanh^2 \lambda) \right. \\ & \left. - (1 + 6 \tanh \lambda) \frac{s^2}{2} \operatorname{sech}^2 \lambda + \frac{s^4}{4} \operatorname{sech}^4 \lambda \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

但当 $n > 0$ 时, 理论求导计算变得复杂. 为直观地观察, 对 (12) 式利用 Matlab 语言数值模拟出了 $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ 四个粒子数态下, 小波变换谱随压缩参数和平移参数的变化规律, 如图 5 所示. 由图 5 可以清晰地看到, 粒子数增多, 以平移参数 $s = 0$ 为对称中心, 向两边产生新的波峰, 且外层的峰值增大

明显; 各层峰值随着压缩参数 μ 的取值增加, 增大到一定程度后均变得较为平稳.

4 结论

根据小波变换的量子力学机理, 由构造母小波函数的系数条件, 通过选取不同的系数, 构造出两组新的母小波函数 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$. 在此基础上, 利用 IWOP 技术, 计算出相干态的 $\psi_1(x)$ 小波变换并数值模拟出其随参数 (μ, s) 的变化图谱, 以及粒子数态的 $\psi_2(x)$ 小波变换并数值模拟出其随参数 (μ, s) 的变化图谱. 图形结果显示, 随着压缩参数 μ 的取值增加, 小波变换图谱的峰值增大变缓.

-
- [1] Burrus C S, Gopinath R A, Guo H T 1998 *Introduction to Wavelet and Wavelet Transformation (A Primer)*(Prentice: Prentice Hall)
- [2] Fan H Y, Lu H L 2006 *Opt. Lett.* **31** 407
- [3] Song J, Fan H Y 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 024210
- [4] Fan H Y, Lu H L 2007 *Opt. Lett.* **32** 554
- [5] Fan H Y, Liu S G 2007 *Opt. Lett.* **32** 1507
- [6] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 *Phys. Rev. D* **35** 1831
- [7] Fan H Y, Zaidi H R 1988 *Phys. Rev. A* **37** 2985
- [8] Fan H Y 2003 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5** R147
- [9] Song J, Xu Y J, Fan H Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 084208 (in Chinese) [宋军, 许业军, 范洪义 2011 物理学报 **60** 084208]
- [10] Fan H Y 2001 *Entangled State Representations in Quantum Mechanics and Their Applications* (Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press) p22 (in Chinese) [范洪义 2001 量子力学纠缠表象及应用 (上海: 上海交通大学出版社) 第 22 页]

Wavelet transform of coherent state*

Yu Hai-Jun[†] Du Jian-Ming Zhang Xiu-Lan

(Department of Physics, Huainan Normal University, Huainan 232001, China)

(Received 11 January 2012; revised manuscript received 10 February 2012)

Abstract

Two new mother wavelets are constructed on the basis of the quantum mechanics of classical wavelet transform. Based on that, the wavelet transform of coherent state and particle number state is studied with the technique of integration within an ordered product, and the wavelet transform from coherent state to particle number state is obtained by numerical calculation.

Keywords: wavelet transform, coherent state, number state

PACS: 42.50.-p, 42.30.Kq

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Anhui Higher Education Institutions of China (Grant Nos. KJ2011Z339, KJ2011Z359) and the Natural Science Foundation of Huainan Normal University, China (Grant No. 2010LK08).

[†] E-mail: haijun20030@163.com