

耦合腔系统中的三体纠缠演化*

卢道明†

(武夷学院电子工程系, 武夷山 354300)

(2012年3月3日收到; 2012年3月17日收到修改稿)

研究由耦合腔和四个全同的二能级原子构成的系统中三体纠缠态纠缠量的演化. 四个原子分别囚禁在单模耦合腔 A 和 B 中, 并且原子通过单光子跃迁与腔场发生共振相互作用. 采用纠缠张量方法, 通过数值计算研究了每个腔中三体纠缠的演化. 讨论了原子与腔场间的耦合强度对三体纠缠演化的影响. 研究表明: 原子与腔场间的两体纠缠强于原子间的两体纠缠, 每个腔中的三体纠缠是两体纠缠相干叠加的结果.

关键词: 量子光学, 二能级原子, 耦合腔, 三体纠缠

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

1 引言

量子纠缠是量子力学中的一个奇妙现象. 它在验证量子力学基本原理方面具有重要的作用, 也是 Bell 基制备、量子隐形传态、量子密钥分配、量子纠错等量子信息处理和量子计算的重要基础. 纠缠态制备、度量和保持已成为量子信息处理的关键问题, 引起了人们的广泛关注. 在二体纠缠态纠缠度量方面, 人们已提出利用 Von Neumann 熵、纠缠相对熵^[1]、密度算符之间的距离^[2]、Renyi 纠缠度^[3]和共生纠缠度^[4]等物理量来精确地描述二体纠缠态的纠缠度. 例如 Yang 等^[5]研究了两个原子囚禁在耦合腔系统中的量子纠缠; Zeng 和 Fang^[6]研究了二能级原子与单模真空场相互作用系统中的量子纠缠; 本文作者研究了原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性^[7]. 但由于三体或多体系统的复杂性, 对于三体或多体系统纠缠态纠缠的度量一直在探讨之中^[8-13]. 例如, 左战春和夏云杰研究了 Tavis-Cummings 模型中三体纠缠态纠缠量的演化特性^[8]; Tong 和 Kuang 提出了三体纠缠的纠缠量^[9]; Wong 和 Christensen 提出了多体纠缠的纠缠量^[10]; Thapliyal 讨论了多粒子纯态纠缠^[11].

另一方面, 最近十多年来, 耦合腔系统由于它在量子信息处理和量子计算中的潜在应用价值, 引起了人们的广泛关注^[14-20]. 例如, Yang^[14]建议利用原子与耦合腔相互作用系统实现量子相位门; Zheng 等^[15]提出一种利用原子与耦合腔相互作用系统产生双模压缩态的方案; Peng 和 Li^[16]给出了利用三能级原子和光纤联接的双模腔构成的系统制备原子纠缠态的方案. 但对原子与耦合腔相互作用系统中三体纠缠的研究尚未见报道. 文献 [9] 根据纠缠张量方法, 提出了描述三体纠缠态纠缠程度的纠缠量. 本文根据该纠缠量的定义研究了二能级原子与耦合腔相互作用系统中两个原子与腔构成的三体系统的纠缠量, 讨论了原子与腔场间的耦合系数对三体纠缠演化的影响.

2 系统态矢的演化

本文研究四个全同的二能级原子与耦合腔相互作用的系统, 如图 1 所示. 原子 1 和原子 2 囚禁在耦合腔 A 中, 而原子 3 和原子 4 囚禁在耦合腔 B 中, 原子通过单光子跃迁与单模腔场发生共振相互作用. 忽略原子间的偶极相互作用, 在旋波

* 福建省自然科学基金(批准号: 2011J01018)资助的课题.

† E-mail: daominglu79@hotmail.com

近似下, 在相互作用绘景中原子和腔系统的哈密顿量为

$$H_{ac} = f_1(a_A s_1^+ + a_A^+ s_1^-) + f_1(a_A s_2^+ + a_A^+ s_2^-) + f_2(a_B s_3^+ + a_B^+ s_3^-) + f_2(a_B s_4^+ + a_B^+ s_4^-), \quad (1)$$

式中 a_L^+ , a_L ($L = A, B$) 分别表示腔场的产生和湮没算符, s_l^+ 和 s_l^- ($l = 1, 2, 3, 4$) 为第 l 个原子的跃迁算符. f_1 和 f_2 分别表示腔 A 和腔 B 中原子与腔场的耦合系数.

另一方面, 腔模与光纤模的相互作用哈密顿量为^[21]

$$H_{cf} = \sum_{j=1}^{\infty} J_j (b_j (a_A^+ + (-1)^j e^{i\theta} a_B^+) + \text{H.C.}), \quad (2)$$

式中 b_j 为光纤模的湮没算符, θ 为腔场通过长为 l 的光纤传播产生的位相, $\theta = 2\pi\omega l/c$. 在满足短光纤的条件 $l\bar{\nu}/(2\pi c) \leq 1$ 的情况下^[21] ($\bar{\nu}$ 为腔场进入光纤的衰减速率), 光纤中只有一个模与腔场发生共振相互作用, 这时腔模与光纤模的相互作用哈密顿近似为

$$H_{cf} = J(b(a_A^+ + a_B^+) + \text{H.C.}), \quad (3)$$

式中 J 为腔模与光纤模间的耦合系数. 那么在相互作用绘景中整个系统的哈密顿量为

$$H_I = H_{ac} + H_{cf}. \quad (4)$$

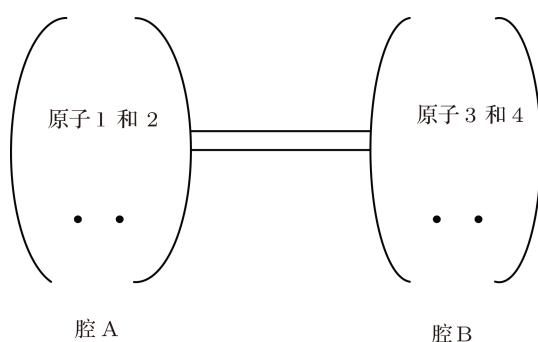


图 1 系统的示意图

定义系统总激发数算符 $\hat{N} = \sum_{l=1}^4 |e\rangle_l \langle e| + a_A^+ a_A + a_B^+ a_B$, 因 $[\hat{N}, H_I] = 0$, 所以在系统演化过程中总激发数守恒. 假设系统的激发数等于 1, 那么在演化过程中, 系统将保留在下列基矢构成的子

空间中

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= |eggg\rangle_{1234}|000\rangle_f, \\ |\varphi_2\rangle &= |gegg\rangle_{1234}|000\rangle_f, \\ |\varphi_3\rangle &= |ggge\rangle_{1234}|000\rangle_f, \\ |\varphi_4\rangle &= |ggge\rangle_{1234}|000\rangle_f, \\ |\varphi_5\rangle &= |gggg\rangle_{1234}|100\rangle_f, \\ |\varphi_6\rangle &= |gggg\rangle_{1234}|010\rangle_f, \\ |\varphi_7\rangle &= |gggg\rangle_{1234}|001\rangle_f. \end{aligned} \quad (5)$$

在 $|\varphi_l\rangle$ 表示的态中下标 1, 2, 3 和 4 分别表示对应原子的状态, $|lmn\rangle_f$ 表示腔 A 处于 $|l\rangle$ 态, 腔 B 处于 $|m\rangle$ 态和光纤模处于 $|n\rangle$ 态, $|e\rangle_l$ 和 $|g\rangle_l$ ($l = 1, 2, 3, 4$) 分别表示第 l 个原子的激发态和基态.

在相互作用绘景中, 系统的态矢演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle, \quad (6)$$

取 $\hbar = 1$. 为简单起见, 设 $f_1 = f_2 = f$. 设系统初始时刻处于 $|\varphi_1\rangle$ 态, 解方程 (6) 可得出任意时刻 t 系统的态矢为

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{l=1}^7 A_l |\varphi_l\rangle, \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2 + 3r^2}{4(1 + r^2)} + \frac{1}{4} \cos(\sqrt{2}ft) \\ &\quad + \frac{1}{4(1 + r^2)} \cos(\sqrt{2(1 + r^2)}ft), \\ A_2 &= -\frac{2 + r^2}{4(1 + r^2)} + \frac{1}{4} \cos(\sqrt{2}ft) \\ &\quad + \frac{1}{4(1 + r^2)} \cos(\sqrt{2(1 + r^2)}ft), \\ A_3 &= A_4 = \frac{r^2}{4(1 + r^2)} - \frac{1}{4} \cos(\sqrt{2}ft) \\ &\quad + \frac{1}{4(1 + r^2)} \cos(\sqrt{2(1 + r^2)}ft), \\ A_5 &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}ft) \\ &\quad - \frac{i}{2\sqrt{2(1 + r^2)}} \sin(\sqrt{2(1 + r^2)}ft), \\ A_6 &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}ft) \\ &\quad - \frac{i}{2\sqrt{2(1 + r^2)}} \sin(\sqrt{2(1 + r^2)}ft), \\ A_7 &= -\frac{r}{2(1 + r^2)} (1 - \cos(\sqrt{2(1 + r^2)}ft)). \end{aligned} \quad (8)$$

参数 $r = \frac{J}{f}$.

3 原子 1 和原子 2 与腔 A 构成的三体系统的三体纠缠量的演化

根据文献 [9] 对三体纠缠态纠缠量的定义, 三体纠缠量和三体中两两间的纠缠量定义为

$$E_3 = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^3 M_{ijk}(1, 2, 3)M_{ijk}(1, 2, 3),$$

$$E_2(m, n) = \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij}(m, n)M_{ij}(m, n), \quad (9)$$

其中

$$M_{ij}(m, n) = K_{ij}(m, n) - \lambda_i(m)\lambda_j(n),$$

$$M_{ijk}(1, 2, 3) = K_{ijk}(1, 2, 3) - \lambda_i(1)M_{jk}(2, 3) - \lambda_j(2)M_{ik}(1, 3)$$

$$- \lambda_k(3)M_{ij}(1, 2) - \lambda_i(1)\lambda_j(2)\lambda_k(3),$$

$$\lambda_i(1) = \text{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{\sigma}_i \otimes \hat{I} \otimes \hat{I}),$$

$$\lambda_j(2) = \text{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{I}),$$

$$\lambda_k(3) = \text{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{I} \otimes \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_k),$$

$$k_{ij}(1, 2) = \text{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{I}),$$

$$k_{ik}(1, 3) = \text{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{\sigma}_i \otimes \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_k),$$

$$k_{jk}(2, 3) = \text{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k),$$

$$k_{ijk}(1, 2, 3) = \text{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k), \quad (10)$$

式中 $\hat{\rho}$ 为三体系统的密度算符, $\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k$ 为泡利矩阵, \hat{I} 为单位矩阵.

利用 (7) 式, 对腔场 B, 原子 3 和原子 4 的态求迹, 以 $|ee\rangle_{12}|1\rangle_A, |ee\rangle_{12}|0\rangle_A, |eg\rangle_{12}|1\rangle_A, |eg\rangle_{12}|0\rangle_A, |ge\rangle_{12}|1\rangle_A, |ge\rangle_{12}|0\rangle_A, |gg\rangle_{12}|1\rangle_A, |gg\rangle_{12}|0\rangle_A$ 为基矢, 可得到原子 1, 原子 2 和腔 A 构成的三体系统的密度矩阵为

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A_1|^2 & 0 & A_1A_2^* & A_1A_5^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2A_1^* & 0 & |A_2|^2 & A_2A_5^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_5A_1^* & 0 & A_5A_2^* & |A_5|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |A_{3467}|^2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中 $|A_{3467}|^2 = |A_3|^2 + |A_4|^2 + |A_6|^2 + |A_7|^2$. 利用 (10) 和 (11) 式, 通过计算可得到

$$\lambda_x(l) = 0(l = 1, 2, 3),$$

$$\lambda_y(l) = 0(l = 1, 2, 3),$$

$$\lambda_z(1) = -1 + 2|A_1|^2,$$

$$\lambda_z(2) = -1 + 2|A_2|^2,$$

$$\lambda_z(3) = -1 + 2|A_5|^2. \quad (12)$$

非零张量为

$$M_{xx}(1, 2) = M_{yy}(1, 2) = A_1A_2^* + A_2A_1^*,$$

$$M_{xy}(1, 2) = -M_{yx}(1, 2) = -i(A_1A_2^* - A_2A_1^*),$$

$$M_{zz}(1, 2) = -4|A_1|^2|A_2|^2,$$

$$M_{xx}(1, 3) = M_{yy}(1, 3) = A_1A_5^* + A_5A_1^*,$$

$$M_{xy}(1, 3) = -M_{yx}(1, 3) = -i(A_1A_5^* - A_5A_1^*),$$

$$M_{zz}(1, 3) = -4|A_1|^2|A_5|^2,$$

$$M_{xx}(2, 3) = M_{yy}(2, 3) = A_2A_5^* + A_5A_2^*,$$

$$M_{xy}(2, 3) = -M_{yx}(2, 3) = -i(A_2A_5^* - A_5A_2^*),$$

$$M_{zz}(2, 3) = -4|A_2|^2|A_5|^2,$$

$$M_{xxz} = M_{yyz} = -2|A_5|^2(A_1A_2^* + A_2A_1^*),$$

$$M_{xyz} = -M_{yxz} = i2|A_5|^2(A_1A_2^* - A_2A_1^*),$$

$$M_{xzx} = M_{yzy} = -2|A_2|^2(A_1A_5^* + A_5A_1^*),$$

$$M_{xzy} = -M_{yzx} = i2|A_2|^2(A_1A_5^* - A_5A_1^*),$$

$$M_{zxx} = M_{zyy} = -2|A_1|^2(A_2A_5^* + A_5A_2^*),$$

$$M_{zxy} = -M_{zyx} = i2|A_1|^2(A_2A_5^* - A_5A_2^*),$$

$$M_{zzz} = 16|A|^2|B|^2|C|^2. \quad (13)$$

其他张量均等于 0. 将 (13) 式代人 (9) 式可得出

腔 A 中的三体纠缠量和三体中两两间的纠缠量为

$$E_3 = 8|A_1|^2|A_2|^2|A_5|^2(|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_5|^2 + 8|A_1|^2|A_2|^2|A_5|^2),$$

$$E_2(1,2) = \frac{8}{3}|A_1|^2|A_2|^2(1 + 2|A_1|^2|A_2|^2),$$

$$E_2(1,A) = \frac{8}{3}|A_1|^2|A_5|^2(1 + 2|A_1|^2|A_5|^2),$$

$$E_2(2,A) = \frac{8}{3}|A_2|^2|A_5|^2(1 + 2|A_2|^2|A_5|^2). \quad (14)$$

参数 f 分别取 $0.5J$ 和 $2f$ 时, 纠缠量 E_3 和 E_2 随规范时间 Jt 的演化如图 2 所示. 图中 (a), (b), (c), (d)

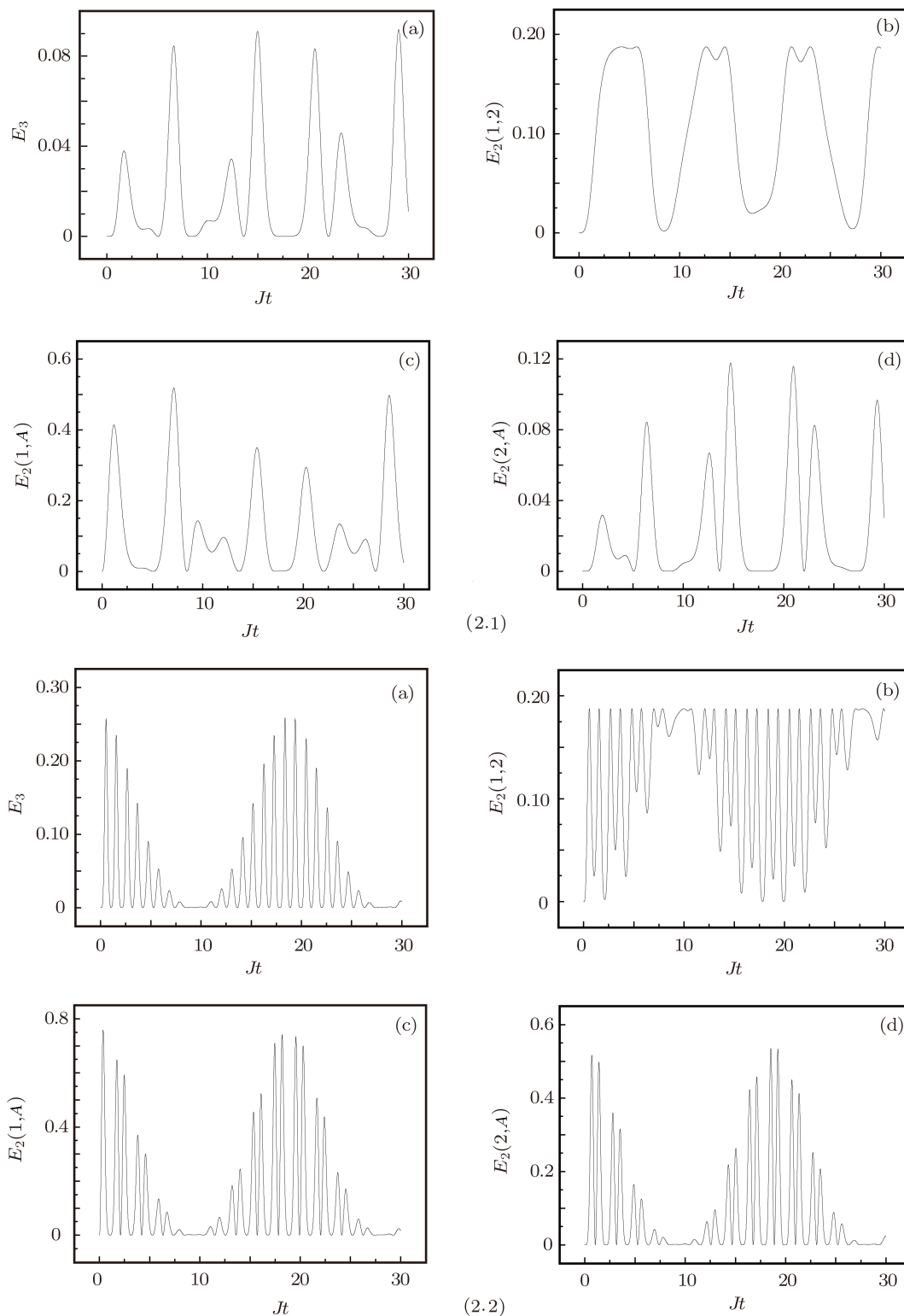


图 2 纠缠量 E_3 和 E_2 随规范时间 Jt 的演化 (2.1) $f = 0.5J$; (2.2) $f = 2J$

分别对应于 E_3 , $E_2(1, 2)$, $E_2(1, A)$ 和 $E_2(2, A)$ 的演化. 从图 2 中能够看出: E_3 和 E_2 随时间做不规则振荡, 振荡频率随原子与腔场间的耦合系数增大而增大; 当原子与腔场间的耦合系数大于一定值后, 纠缠量 E_3 和 E_2 的演化呈现出崩塌和恢复效应. 其崩塌和恢复周期随原子与腔场间的耦合系数增大而增大; $E_2(1, A)$ 和 $E_2(2, A)$ 均大于 $E_2(1, 2)$, 这表明, 原子与腔场间的两体纠缠强于两原子间的两体纠缠. 另一方面, 纠缠量 E_3 的峰值, 出现在 $E_2(1, 2)$, $E_2(2, 3)$ 和 $E_2(1, 3)$ 同时达到或接近峰

值的位置. 这表明三体纠缠是两体纠缠相干叠加的结果.

为了研究原子与腔场间的耦合系数 f 变化对三体纠缠演化的影响, 参数 f 分别取 $0.2 J$, $0.5 J$, $2 J$ 和 $4 f$ 时, 纠缠量 E_3 随规范时间 Jt 的演化如图 3 所示. 从图 3 中可见: E_3 随时间做不规则振荡, 振荡频率随原子与腔场间的耦合系数增大而增大, 当原子与腔场间的耦合系数大于一定值后, 纠缠量 E_3 的演化呈现出崩塌和恢复效应, 其崩塌和恢复周期随原子与腔场间的耦合系数增大而增大.

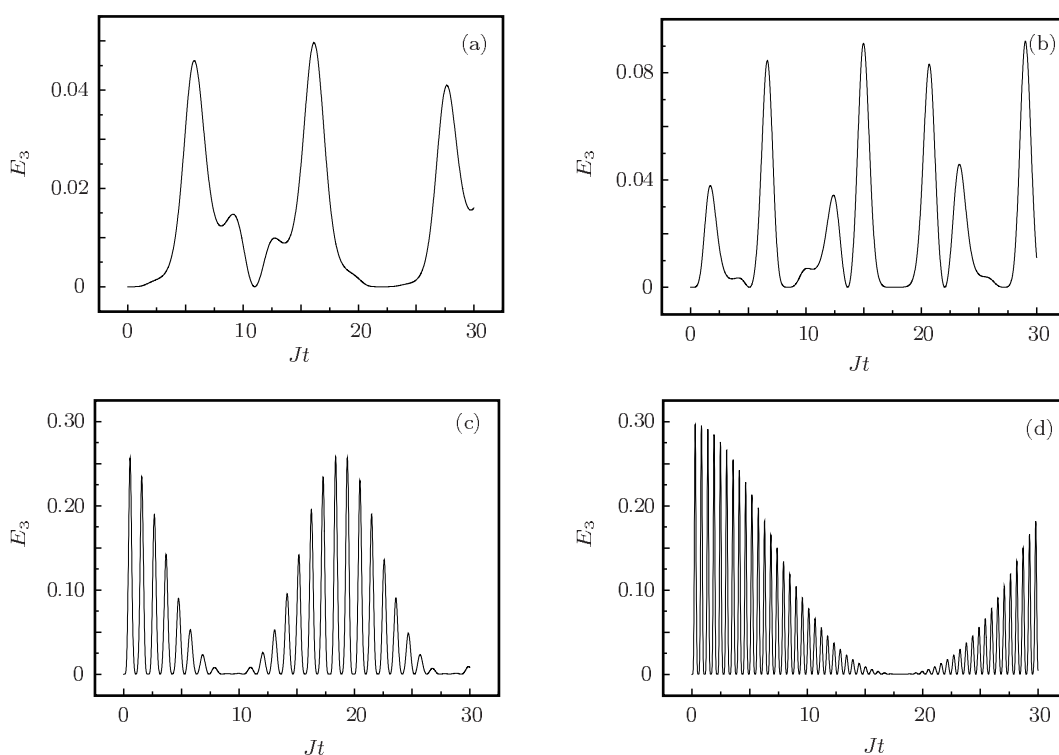


图 3 纠缠量 E_3 随规范时间 Jt 的演化 (a) $f = 0.2J$; (b) $f = 0.5J$; (c) $f = 2.0J$; (d) $f = 4.0J$

4 结论

本文采用文献 [9] 提出的描述三体纠缠态纠缠程度的纠缠量, 研究了四个二能级原子与耦合腔相互作用系统中的三体纠缠. 考虑四个原子两两分别囚禁在两个腔中, 并且原子通过单光子跃迁与腔场共振相互作用的情况, 利用数值计算方法研究了每

个腔中两个原子和腔场构成的三体系统的三体纠缠量的演化. 研究表明: 三体纠缠量做不规则振荡, 振荡频率随原子与腔场间的耦合系数增大而增大; 当原子与腔场间的耦合系数大于一定值后, 三体纠缠量演化呈现出崩塌和恢复效应. 另一方面, 比较三体纠缠量和三体中两两间的纠缠, 可得出三体纠缠是两体纠缠相干叠加的结果.

- [1] Zheng S B, Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
 [2] Zheng S B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 230404
 [3] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
 [4] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
 [5] Yang R C, Zhang P F, Guo Y Q, Zhang T C 2012 *Commun. Theor. Phys.* **57** 195
 [6] Zeng K, Fang M F 2005 *Chin. Phys.* **14** 2009
 [7] Lu D M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090302 (in Chinese) [卢道明 2011 物理学报 **60** 090302]
 [8] Zuo Z C, Xia Y J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2687 (in Chinese) [左战春, 夏云杰 2003 物理学报 **52** 2687]
 [9] Tong Z Y, Kuang L M 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 469
 [10] Wong A, Christensen N 2001 *Phys. Rev. A* **63** 044301
 [11] Thapliyal A V 1999 *Phys. Rev. A* **59** 3336
 [12] Laskowski W, Markiewicz M, Paterek T, Zukowski M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 062305
 [13] Hwang M R, Park D K, Jung E 2011 *Phys. Rev. A* **83** 012111
 [14] Yang Z B 2007 *Chin. Phys.* **16** 329
 [15] Zheng S B, Yang Z B, Xia Y 2010 *Phys. Rev. A* **81** 015804
 [16] Peng P, Li F L 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062320
 [17] Ye S Y, Zhong Z R, Zheng S B 2008 *Phys. Rev. A* **77** 014303
 [18] Song J, Sun X D, Xia Y, Song H S 2011 *Phys. Rev. A* **83** 052309
 [19] Xiao X, Fang M F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4695
 [20] Lu D M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120303 (in Chinese) [卢道明 2011 物理学报 **60** 120303]
 [21] Ogden C D, Irish E K, Kim M S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063805

The evolution of three-body entanglement in the system of atoms interacting with coupled cavities*

Lu Dao-Ming[†]

(Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China)

(Received 3 March 2012; revised manuscript received 17 March 2012)

Abstract

In this paper we consider the situation that four identical two-level atoms are separately trapped in coupled single-mode optical cavities and each atom resonantly interacts with cavity via a one-photon hopping. The three-body entanglement dynamics in each cavity is studied. The influences of atom-cavity coupling constant on the three-body entanglement are discussed. The results obtained using the numerical method show that the three-body entanglement displays the collapse-revival phenomena when atom-cavity coupling constant is larger than a fixed value. On the other hand, the three-body entanglement is the result of the coherent superposition of the two-body entanglements.

Keywords: quantum optics, two-level atom, coupling cavities, three-body entanglement

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

* Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2011J01018).

† E-mail: daominglu79@hotmail.com