

## 一维指数形变截面有限周期声子晶体的研究\*

付志强<sup>1)</sup> 林书玉<sup>1)†</sup> 陈时<sup>1)</sup> 鲜晓军<sup>1)2)</sup> 张小丽<sup>1)</sup> 王勇<sup>1)</sup>

1) (陕西师范大学应用声学研究所, 西安 710062)

2) (中国电子科技集团第 26 研究所, 重庆 400060)

(2012 年 2 月 13 日收到; 2012 年 3 月 21 日收到修改稿)

本文利用集中质量法对弹性纵波在一维指数形截面有限周期声子晶体中的传播进行了研究, 得到了频率响应函数的表达式. 与一维等截面的声子晶体相比, 指数形变截面声子晶体带隙内的衰减值随着输出端截面积的增大而减小, 同时带隙的起始频率降低而截止频率升高, 也即带隙的宽度会得到拓展. 晶格常数和材料组份比变化时, 变截面声子晶体带隙的起始频率和截止频率的变化趋势与等截面时的声子晶体相同. 希望本文的研究能够推动声子晶体在减振降噪等领域中的应用.

**关键词:** 声子晶体, 声波带隙, 集中质量法, 频率响应函数

**PACS:** 43.20.+g, 43.40.+s, 63.20.-e

## 1 引言

近年来, 通过模拟天然晶体原子周期排序结构而人为设计复合结构的材料引起了很多学者的研究<sup>[1-9]</sup>. 通常将介电常数周期性分布的材料称为光子晶体<sup>[1,2]</sup>, 弹性常数周期性分布的材料称为声子晶体<sup>[3,4]</sup>. 当弹性波或声波在弹性常数周期分布的材料中传播时, 可能会产生声波带隙, 即在某些特定频率范围内声波被禁止在声子晶体中传播. 声子晶体的这一特性具有极大的理论价值及潜在应用前景. 声子晶体的声波带隙特性可为现有减振技术提供了一种新的思路, 为精密设备提供一个良好的隔振环境, 在声滤波、噪声控制及声波导等诸多领域有着广泛的应用前景<sup>[8-19]</sup>.

由于一维声子晶体结构简单易于得到较宽的声波带隙, 虽然在理论研究方面较二维和三维少, 但在减振滤波降噪等领域中更容易得到应用. 如 Cheng 等已将其应用在声二极管中, 实现了声波的单向导通<sup>[17,18]</sup>. 目前, 对声波在一维声子晶体中带隙特性的研究, 常见的方法有传输矩阵法<sup>[5,9]</sup>、平面波展开法<sup>[3,6,10]</sup>和集中质量法<sup>[11-16]</sup>. 传输矩

阵法可通过理论推导获得能带结构的解析关系式, 但其推导过程和最后结果对一维二组元结构才相对简单, 而对多种材料的多组元一维结构, 其复杂程度将大大增加. 平面波展开法计算相对简单, 但收敛速度较慢, 其计算结果的精确度与计算中的平面波的波数有关, 波数越大, 结果越精确, 但收敛速度越慢. 在固体物理学中处理一维复式格子问题时, 用振子质量代替格子中的原子质量, 用刚度系数代替原子间的恢复力常数从而将一维复式格子转化为周期弹簧振子结构<sup>[20]</sup>. 集中质量法即借鉴于此方法, 将连续介质的质量集中到有限个节点或截面上, 将连续系统离散化, 将无限自由度系统转化为有限自由度系统求解. 在满足计算精度的要求下, 该方法较平面波展开法收敛更快, 特别是在计算弹性常数差比较大的声子晶体时(如局域共振型声子晶体), 更能展现出其良好的收敛性和更高的计算精度<sup>[11-16]</sup>.

本文利用集中质量法对指数形变截面一维有限周期的声子晶体进行了研究. 由于横截面积是变化的, 即每个晶胞中同种材料的质量在变化, 因此该结构的声子晶体相当于多组元一维结构. 本文主要研究了弹性纵波在一维指数形变截面有限周

\* 陕西师范大学研究生创新基金(批准号: 2011CXB012)和国家自然科学基金(批准号: 11174192)资助的课题.

† E-mail: fuzhi2004@sina.com

期声子晶体中的传播, 并与弹性纵波在一维等截面声子晶体中的传播进行了比较, 发现带隙的起始频率、截止频率、带隙宽度及带隙内的衰减强度均会随着截面积的变化而变化.

## 2 理论分析

图 1(a) 是一指数形变截面有限周期声子的结构示意图. 该结构是由两种不同弹性常数和密度的材料  $A$  和  $B$  在  $x$  方向交互形成的周期结构, 晶格常数为  $l$ , 晶胞数为  $N$ , 总长为  $L$ , 左右两端处的半径分别为  $a$  和  $b$ , 并且截面半径在  $x$  方向呈指数变化. 当沿轴向 ( $x$  方向) 施加一激发力时, 将在结构中将产生纵波. 我们假设在垂直于  $x$  方向结构内的任一平面内, 质点振动位移方向平行于轴向, 由于弹性形变的泊松效应, 轴向的形变会引起横向的形变, 所以在质点产生轴向位移的同时也将产生垂直于轴向的位移. 当横向尺寸与其长度相比甚小时, 或者说横向尺寸远小于纵波波长相时, 其横向位移与纵向位移相比甚小, 可略去不计. 类似于细棒结构, 在结构中传播的纵波是平面纵波, 截面上各质点作等幅同相振动. 因此, 声波在该结构声子晶体中的传播就可以简化为一维细棒问题来处理.

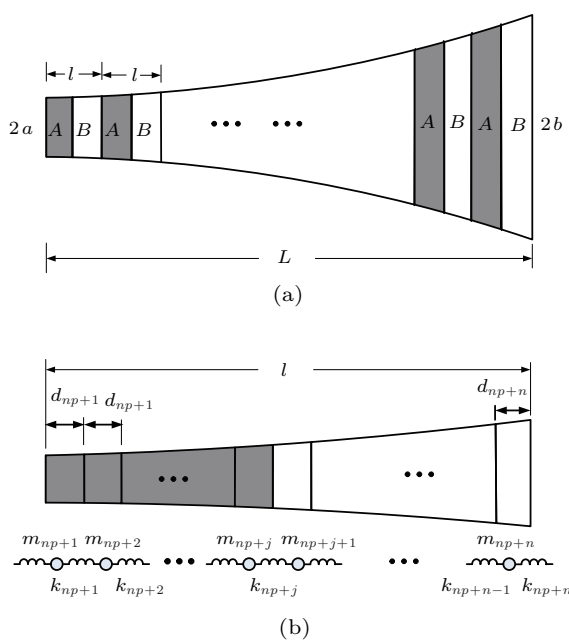


图 1 一维声子晶体及其离散结构示意图

在集中质量法中将连续介质分解为有限个集中质量, 它们之间的连接简化为无质量的弹簧连接, 因此一维有限周期的声子晶体就简化成了有限个

自由度的弹簧振子结构. 简化后弹簧振子结构的自由度数目越多, 就越接近于实际的情形, 计算精度也就越高. 图 1(b) 是单个元胞及其离散后的结构示意图, 图中将单个元胞简化成了  $n$  个自由度结构的弹簧振子结构, 其中  $d_{np+j}$  为元胞中各个离散单元的长度,  $m_{np+j}$  及  $k_{np+j}$  为离散后各个振子的质量及其之间连接弹簧的刚度系数,  $p = 0, 1, \dots, N-1$  和  $j = 1, 2, \dots, n$  为正整数.

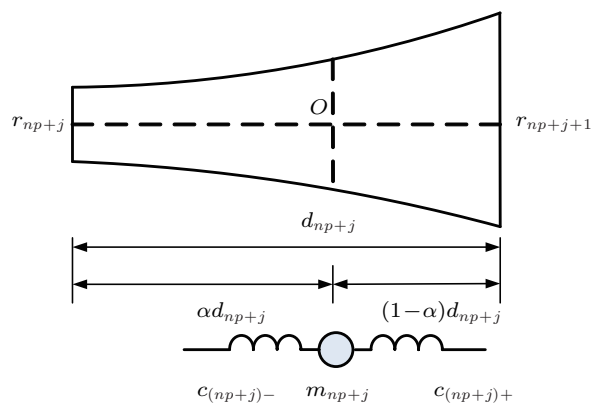


图 2 单个划分单元及其离散后的结构示意图

图 2 是一个简化单元的结构示意图, 其中点  $O$  是简化单元的质心所在位置,  $r_{np+j}$  及  $r_{np+j+1}$  为简化单元左右两端处的截面半径,  $\alpha$  是一个跟长度  $d_{np+j}$  及质心位置  $O$  有关的比例常数, 即在质心  $O$  两侧的长度分别为  $\alpha d_{np+j}$  及  $(1-\alpha)d_{np+j}$ ,  $c_{(np+j)-}$  和  $c_{(np+j)+}$  分别是简化单元内振子两侧弹簧的刚度系数. 为了便于分析, 我们在轴向上对声子晶体进行均匀的离散, 即每个离散单元的长度  $d_{np+j}$  相等, 且对于任意一个简化单元, 单元内只包含一种材料.

在本文中, 我们所讨论的指数形截面的声子晶体截面半径具有与指数形细棒相同的表达式, 即  $r = a \exp(\beta x)$  ( $\beta = \frac{1}{L} \ln(\frac{b}{a})$ ,  $0 \leq x \leq L$ ). 因此对于简化单元的几何参数, 有

$$r_{np+j} = a \exp\left(\beta \sum_1^{np+j-1} d_{np+j}\right), \quad (\text{且 } r_1 = a, r_{nN+1} = b), \quad (1)$$

$$V_{np+j} = \frac{\pi r_{np+j}^2}{2\beta} [\exp(2\beta d_{np+j}) - 1], \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{1}{2\beta d_{np+j}} \ln \frac{\exp(2\beta d_{np+j}) + 1}{2}, \quad (3)$$

$$S_{np+j} = \pi [r_{np+j} \exp(\alpha\beta d_{np+j})]^2, \quad (4)$$

其中  $V_{np+j}$  为第  $np+j$  个简化单元的体积,  $S_{np+j}$  为第  $np+j$  个简化单元质心处的横截面积. 对于等截面的情形, 则  $\alpha = 1/2$ ,  $r_{np+j}$ ,  $V_{np+j}$ ,  $S_{np+j}$  彼此相等.

根据质心不变原则, 每个振子位于简化单元的质心位置处, 振子质量  $m_{np+j}$  表达式如下:

$$\begin{aligned} m_{np+j} &= \rho_s V_{np+j} \\ &= \rho_s \frac{\pi r_{np+j}^2}{2\beta} [\exp(2\beta d_{np+j}) - 1], \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\rho_s$  ( $s = A, B$ ) 为简化单元的材料密度. 对于位于质心位置两侧的每半个简化单元, 根据胡克定律, 沿  $x$  方向的正应力与对应方向的应变成正比, 即

$$\begin{aligned} \frac{F_{np+j}^x(1)}{S_{np+j}} &= E_s \frac{\Delta x(1)}{\alpha d_{np+j}}, \\ \frac{F_{np+j}^x(2)}{S_{np+j}} &= E_s \frac{\Delta x(2)}{(1-\alpha)d_{np+j}}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\Delta x(1)$ ,  $\Delta x(2)$  为半个离散单元的轴向位移,  $E_s$  ( $s = A, B$ ) 为材料的杨氏模量. 根据刚度的定义——沿某方向的作用力与在此作用力下沿该方

向的位移的比值, 可知, 对每个简化单元, 振子两侧弹簧的抗压刚度为

$$c_{(np+j)-} = \frac{F_{np+j}^x(1)}{\Delta x(1)} = \frac{E_s S_{np+j}}{\alpha d_{np+j}}, \quad (7)$$

$$c_{(np+j)+} = \frac{F_{np+j}^x(2)}{\Delta x(2)} = \frac{E_s S_{np+j}}{(1-\alpha)d_{np+j}}. \quad (8)$$

对于两个相邻振子间的弹簧可看成是由这两个振子间的两根弹簧串联而成, 即图 1(b) 中的  $k_{np+j}$  是由图 2 中的  $c_{(np+j)+}$  和  $c_{(np+j+1)-}$  串联组成. 当相邻的两个简化单元是由同种材料组成时, 轴向上的抗压刚度为

$$\begin{aligned} k_{np+j,s} &= \frac{c_{(np+j)+} \cdot c_{(np+j+1)-}}{c_{(np+j)+} + c_{(np+j+1)-}} \\ &= \frac{E_s \cdot S_{np+j} \cdot S_{np+j+1}}{S_{np+j} \cdot \alpha \cdot d_{np+j+1} + S_{np+j+1} \cdot (1-\alpha) \cdot d_{np+j}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$(s = A, B).$

同理, 当相邻的两个振子是由不同种材料组成时, 轴向上的抗压刚度为

$$k_{np+j,AB} = \frac{c_{(np+j)+} \cdot c_{(np+j+1)-}}{c_{(np+j)+} + c_{(np+j+1)-}} = \frac{E_A \cdot E_B \cdot S_{np+j} \cdot S_{np+j+1}}{E_A \cdot S_{np+j} \cdot \alpha \cdot d_{np+j+1} + E_B \cdot S_{np+j+1} \cdot (1-\alpha) \cdot d_{np+j}}, \quad (10a)$$

或

$$k_{np+j,BA} = \frac{c_{(np+j)+} \cdot c_{(np+j+1)-}}{c_{(np+j)+} + c_{(np+j+1)-}} = \frac{E_A \cdot E_B \cdot S_{np+j} \cdot S_{np+j+1}}{E_B \cdot S_{np+j} \cdot \alpha \cdot d_{np+j+1} + E_A \cdot S_{np+j+1} \cdot (1-\alpha) \cdot d_{np+j}}. \quad (10b)$$

如果元胞是由多种材料构成, 可用类似的方法进行简化处理.

根据运动学方程, 对于图 1(b) 中的第  $np+j$  个振子

$$\begin{aligned} m_{np+j} \frac{d^2 x_{np+j}}{dt^2} &= k_{np+j}(x_{np+j+1} - x_{np+j}) \\ &\quad - k_{np+j-1}(x_{np+j} - x_{np+j-1}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $x_{np+j}$  是该振子在  $x$  方向上的振动位移. 对于有限周期的弹簧振子结构, 将时间  $t$  离散化, 上式中的微分方程可变成如下的差分形式<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} &x_{np+j}[(i+1)\Delta t] \\ &= \frac{\Delta t^2}{m_{np+j}} \{k_{np+j}[x_{np+j+1}(i\Delta t) - x_{np+j}(i\Delta t)] \\ &\quad - k_{np+j-1}[x_{np+j}(i\Delta t) - x_{np+j-1}(i\Delta t)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- x_{np+j}[(i-1)\Delta t] + 2x_{np+j}(i\Delta t), \\ &(np+j = 2, 3, \dots, nN-1), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} &x_{nN}[(i+1)\Delta t] \\ &= -\frac{\Delta t^2}{m_{nN}} k_{nN-1} [x_{nN}(i\Delta t) - x_{nN-1}(i\Delta t)] \\ &\quad - x_{nN}[(i-1)\Delta t] + 2x_{nN}(i\Delta t), \\ &(np+j = nN), \end{aligned} \quad (12b)$$

式中  $i$  为整数,  $\Delta t$  为离散时间间隔. 当在该声子晶体的输入端 (左端) 施加一周期性的位移初始激励函数  $x_1 = A_0 \cos(\omega t)$  (其中  $A_0$  为位移幅度,  $\omega$  为角频率) 时, 根据 (12) 式, 可以求得输出端 (右端) 的振子  $x_{nN}$  任意时刻位移值. 最后将输出端的位移值  $x_{nN}$  与输入端位移值  $x_1$  比较, 根据公式  $20 \lg(x_{nN}/x_1)$  即可得到周期弹簧振子结构的振动传输特性曲线.

### 3 理论计算结果及分析

为了研究一维有限周期声子晶体的截面按指数函数发生变化时对声子带隙的影响,我们将等截面声子晶体和指数形变截面声子晶体的振动传输特性曲线进行比较.选取材料  $A$  为有机玻璃,  $B$  为硬铝,材料参数如下:杨氏模量  $E_A = 0.2 \times 10^{10}$  Pa,  $E_B = 7.15 \times 10^{10}$  Pa,密度  $\rho_A = 1142$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_B = 2790$  kg/m<sup>3</sup>.图 3 是在输入输出端的截面积比不同时的频响曲线图.图中  $\gamma$  为截面积比,  $\gamma = S_{out}/S_{input} = (b/a)^2$ .为了使得该结构能够满足一维理论,当  $\gamma$  取 1.0 及 9.0 时,取  $a = 2$  mm,当  $\gamma$  取 0.11 时,取  $b = 2$  mm.其余参数设置如下:晶格常数  $l = 40$  mm,晶胞周期数  $N = 5$ ,每个元胞中的划分单元数  $n = 20$ ,元胞中的组份比  $\eta = l_A/l = 0.5$ ,即元胞中材料  $A$  和材料  $B$  在轴向上的长度相等.从图 3 中可以看出,在 0—70kHz 的范围内每条频响曲线都有两个较大的传输衰减区域,即为声子晶体的第一带隙和第二带隙.在分析过程中,我们规定:当频响曲线在带隙两侧的值等于零分贝时对应的频率值即为带隙的起始频率或截止频率,也即图中  $A_1, A_2, A_3$  和  $B_1, B_2, B_3$  分别为三条频响曲线第一带隙的起始频率和截止频率.在图 3 中我们能看出当截面比  $\gamma = 9.0$  时,带隙范围内频响值衰减的最快,如第一带隙最小频响值为  $-31$  dB 而  $\gamma = 1.0$  及  $\gamma = 0.11$  时最小值分别只有  $-22$  dB 及  $-12$  dB.同时,在图 3 中能够看出  $A_2$  点的对应的频率值较  $A_1$  和  $A_3$  低而  $B_2$  点的值较  $B_1$  和  $B_3$  高,即对于较大的截面比,带隙的起始频率值更低而截止频率值更高,带隙频率范围也更宽.图 4 是在输入端的截面半径固定时 ( $a = 2$  mm),第一带隙的起始频率、截止频率和最小衰减随输出端的截面半径变化时的关系.从图中可进一步看出,随着输出端截面半径的增大,起始频率逐渐降低而截止频率逐渐增大,带隙宽度也将增大,同时带隙内的最小衰减也将逐渐减小.我们知道,当声波在介质中传播时,体积速度是连续的,体积速度即为截面积与质点振动速度的乘积,因此在变截面介质中传播时,不同位置处截面积的变化会导致质点振动速度的变化.当截面积增大时,质点振动速度将减小,并进一步引起振动位移的减小,最终会引起频响曲线上频响值的减小,因此带隙内的最小衰减值会随着输出端截面积的增大而减小,同时,起始频率将会降低而截止频率将会升高.从图 4

中我们还能看到起始频率和截止频率随截面积比变化时均会出现一个跳跃现象,这是因为随着输出端的截面积逐渐增大时,频响曲线上的频响值逐渐减小,如图 3 中,在带隙两侧频响曲线均有峰值,当两侧的峰值减小到小于零分贝时,起始频率和截止频率便会出现跳跃现象.

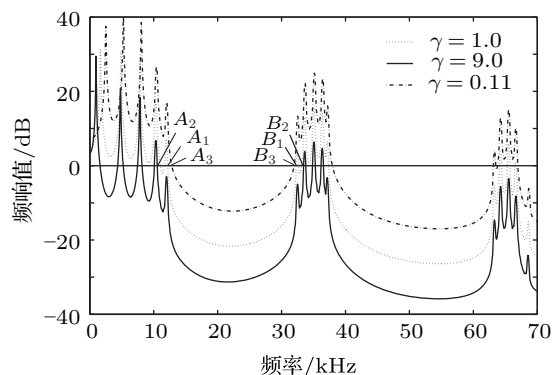


图 3 不同截面比时的频响曲线

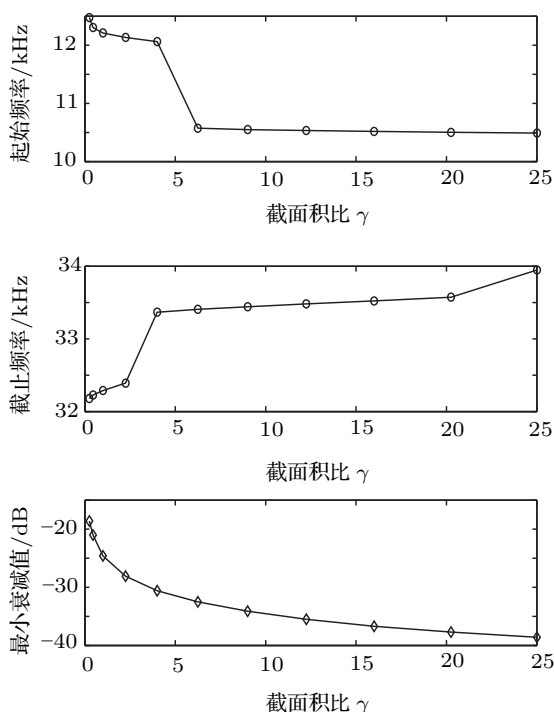


图 4 截面积比对第一带隙的起始频率、截止频率及最小衰减值的影响

图 5 和图 6 分别是晶格常数和材料的组份比对等截面和变截面一维声子晶体第一带隙的起始频率截止频率的影响.计算时,  $a = 2$  mm,  $N = 5$ ,  $n = 20$ ,图 5 中取  $\eta = 0.5$ ,图 6 中取  $l = 40$  mm.在这两幅图中,实线代表的是截面积比  $\gamma = 9.0$  的指数形声子晶体的起始频率和截止频率,虚线代表的

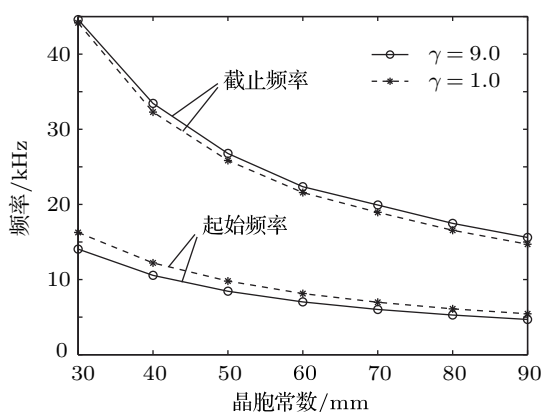


图5 晶胞常数对第一带隙的起始频率和截止频率的影响

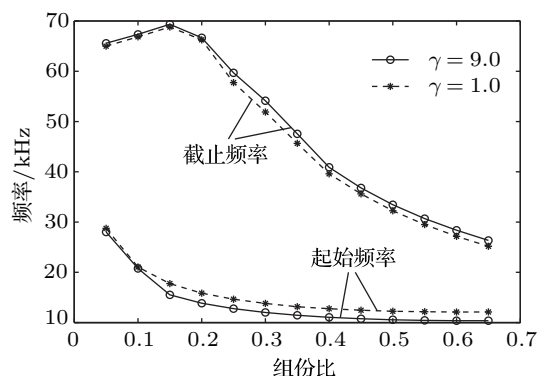


图6 材料的组份比对第一带隙起始频率和截止频率的影响

是等截面声子晶体的起始频率和截止频率. 从图中可看出指数形截面的声子晶体与等截面声子晶体相比, 起始频率稍有下降而截止频率有所升高, 但

是它们的变化趋势都是一致的. 这是因为两者成因都是基于 Bragg 散射机理, 即均是由于周期变化的材料特性与声波相互作用, 致使某些频率的声波在声子晶体中无法传播而产生声波带隙.

我们知道对于一维等截面有限周期的声子晶体, 为了使得在带隙范围内能够有更大的衰减, 通常是增加晶胞的个数, 但当晶胞数太多时整个结构的长度过长, 这在实际的使用中会造成一定的不便. 从上面的分析中我们可以发现, 当增大输出端的截面积时同样可以提高声子晶体的减振特性, 与此同时还有利于拓宽带隙宽度.

## 4 结论

本文利用集中质量法对纵波在一维指数形截面有限周期声子晶体中的传播进行了研究. 该方法把连续介质的一维声子晶体离散成周期弹簧振子结构, 将无限自由度系统转化成有限自由度系统进行近似求解. 从我们的分析中可看出与一维等截面的声子晶体相比, 通过引入指数形的变截面可以提高声波在带隙内衰减特性, 带隙内的最小衰减值随着输出端截面积的增大而减小, 与此同时会引起带隙的起始频率减低截止频率升高, 适当的拓展了带隙的宽度. 晶格常数和材料组份比对带隙起始频率和截止频率影响与一维等截面晶体相同, 实际应用中可参考等截面时的结论. 希望本文的研究能够为一维声子晶体的工程应用提供一定的帮助.

- [1] John S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486
- [2] Yablonovitch E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059
- [3] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022
- [4] Sigalas M M, Economou E N 1992 *J. Sound Vib.* **158** 377
- [5] Sigalas M M, Soukoulis C M 1995 *Phys. Rev. B* **51** 2780
- [6] Kushwaha M S, Djafari-Rouhani B 2000 *J. Appl. Phys.* **88** 2877
- [7] Mizuno S, Tamura S 1992 *Phys. Rev. B* **45** 734
- [8] Liu Z, Zhang X, Mao Y, Zhu Y Y, Yang Z, Chan C T, P Sheng 2000 *Science* **289** 1734
- [9] Chen S, Lin S, Wang Z 2010 *Solid State Commun.* **150** 285
- [10] Wu F G, Liu Y Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1434 (in Chinese) [吴福根, 刘有延 2002 物理学报 **51** 1434]
- [11] Jensen J S 2003 *J. Sound Vib.* **266** 1053
- [12] Wen J H, Wang G, Liu Y Z, Yu D L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3384 (in Chinese) [温激鸿, 王刚, 刘耀宗, 郁殿龙 2004 物理学报 **53** 3384]
- [13] Wang G, Wen J, Liu Y, Wen X 2004 *Phys. Rev. B* **69** 184302
- [14] Wang G, Wen J, Wen X 2005 *Phys. Rev. B* **71** 104302
- [15] Wang G, Wen X, Wen J, Shao L, Liu Y 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 154302
- [16] Wen J H, Wang G, Yu D L, Zhao H G, Liu Y Z, Wen X S 2007 *Science in China E* **37** 1126 (in Chinese) [温激鸿, 王刚, 郁殿龙, 赵宏刚, 刘耀宗, 温熙森 2007 中国科学 E 辑 **37** 1126]
- [17] Liang B, Yuan B, Cheng J C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 104301
- [18] Liang B, Guo X S, Tu J, Zhang D, Cheng J C 2010 *Nature Mater.* **9** 989
- [19] Cao Y J, Dong C H, Zhou P Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6470 (in Chinese) [曹永军, 董纯红, 周培勤 2006 物理学报 **55** 6470]
- [20] Huang K 2009 *Solid State Physics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [黄昆 2009 固体物理学 (北京: 北京大学出版社)]

# Investigation of one-dimensional finite phononic crystal with exponential section\*

Fu Zhi-Qiang<sup>1)</sup> Lin Shu-Yu<sup>1)†</sup> Chen Shi<sup>1)</sup> Xian Xiao-Jun<sup>1)2)</sup>  
Zhang Xiao-Li<sup>1)</sup> Wang Yong<sup>1)</sup>

1) (*Institute of Applied Acoustics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

2) (*China Electronics Technology Group Corporation 26<sup>th</sup> Research Institute, Chongqing 400060, China*)

(Received 13 February 2012; revised manuscript received 21 March 2012)

## Abstract

In this paper, we study the propagation of elastic longitudinal wave in one-dimensional (1D) finite periodic phononic crystal with exponential section, and obtain the expression of frequency response function. Comparing the 1D phononic crystal with constant section, we find that the value of attenuation inside the band gap decreases quickly as the cross-sectional area of output and increases, at the same time, the initial frequency decreases and the cut-off frequency increases, i.e. the width of the band gap will increase. The effects of the lattice constant and the filling fraction on band gap are also analyzed. The change trends of the initial frequency and cut-off frequency are consistent with those of constant section. We hope that the investigation of this paper will be helpful for the phononic crystal in practical application such as vibration shield.

**Keywords:** phononic crystal, acoustic band gap, lump-mass method, frequency response function

**PACS:** 43.20.+g, 43.40.+s, 63.20.-e

---

\* Project supported by the Innovation Funds of Graduate Programs of Shaanxi Normal University (Grant No. 2011CXB012), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174192).

† E-mail: fuzhi2004@sina.com