

微管内气泡的受迫振动*

王成会¹⁾²⁾ 程建春^{1)†}

1) (南京大学声学研究所, 南京 210093)

2) (陕西师范大学声学研究所, 西安 710062)

(2012年2月22日收到; 2012年4月1日收到修改稿)

在气泡-液柱一维耦合振动模型的基础上对刚性微管两侧声压不相等时管内柱状气泡的轴向一维受迫振动进行了理论探索. 声压不均匀分布不影响气泡线性振动时的共振频率, 但振动幅度受到有效声压幅值的影响. 利用逐级近似法分析了管内非线性振动气泡的基频、三倍频和三分之一分频振动的幅-频响应关系, 结果表明当驱动声压超过 0.1 MPa 时, 气泡振动处于非线性状态. 非线性声响应特征主要表现为: 基频和分频振动幅值响应的多值性; 三倍频振动在低频区响应强于高频区; 三分频振动在大于共振频率的频域内出现的概率更大.

关键词: 柱状气泡, 受迫振动, 非线性振动, 声响应

PACS: 43.25.+y, 43.35.+d

1 引言

随着生物医学超声的发展, 超声波在活体生物组织内的动力学行为越来越受关注. 超声造影剂微泡注入血管内可提高超声诊断过程中回波强度, 为人们提供了一种便捷、经济且损害极小的诊疗手段. 高强度超声波作用于微泡还可产生超声空化效应, 从而实现利用超声能量进行局部治疗^[1-4]. 许多研究表明, 好的超声诊断和治疗效果均与超声波作用下气泡的动力学行为有关, 超声造影剂微泡在生物体内的非线性振动可使组织损伤加剧^[5-8]. 超声空化引起组织损伤等生物学效应的机理通常基于以下两种假设^[3]: 一是空化气泡在非线性振荡过程中崩溃形成高温、高压、冲击波等引起局部压力和温度变化, 同时还可能形成高速运动的微射流导致血管壁失去原有平衡并形成损坏; 二是在驱动声压的负压相气泡长大压迫血管, 在管壁形成较大的周向应力 (circumferential stress) 扰动从而导致血管损伤^[9]. 因此, 血管内气泡的动力学行为的研究对准确预测超声波作用下造影剂微泡或

生物体内原有空化核对肌体组织的影响具有重要的现实意义.

气泡在管状结构内的运动和在无边界液体中的运动相比要复杂得多^[10]. 首先气泡运动受到边界约束, 极易形成偏离球形的振动^[11], 其形状变化的复杂性决定了它的膨胀和崩溃机理与球状气泡动力学相比会更加复杂; 其次有界空间内通常声压空间分布具有驻波特征^[12], 从而导致气泡各个方向受力不均匀并使其形状复杂变化的可能性增大, 因此发展更适合管状结构内气泡振动的动力学模型是解决此类问题的关键. 边界元方法通常用于模拟界面附近气泡的非球形振动, 可给人们提供较为精确而直观的力学图景^[6,9]. Leighton 等^[13]假定气泡位于一端封闭的刚性管底部且充满了整个截面形成柱状气泡, 只有气泡-液体一侧端面可以自由移动, 发展了一维气泡自由振动理论. 若声波作用下的血管可被看成刚性管, 气泡在血管内的运动可看成是两侧液柱-气泡耦合振动系统, 这种模型最早由 Oguz 和 Prosperetti^[14]提出, Sassaroli 和 Hynynen^[15]以此为基础分析了介质黏热阻尼对系统共振响应的影响. 众多研究表明, 气泡在管状

* 国家自然科学基金 (批准号: 10904068, 10834009, 11174138, 81127901, 11174139)、中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: GK201002009) 和陕西省自然科学基金 (批准号: 2010JQ1006) 资助的课题.

† E-mail: jccheng@nju.edu.cn

结构内的振动受到管壁材料的弹性特征、气泡本身的初始状态以及驱动外场的影响,其固有频率由于受到刚性管约束而降低且随着管子长度减小而减小^[15-17].若外驱动力较大,由于泡内气体物态变化本身具有非线性特征,气泡-液柱耦合振动系统必将出现非线性声响应.本文将在气泡-液柱耦合振动模型的基础上分析刚性细管内气泡振动的非线性特征,同时探讨气泡非线性振动对周围介质和管壁的影响.

2 模型描述

2.1 数学模型

当气泡的初始半径和管尺寸可相比拟时,其在管内的振动可简化为管轴线方向的一维振动,即将气泡看成是一个无质量可压缩的柱状弹性体.该模型可用于研究气泡处于管状结构(如毛细血管等)内的气泡动力学问题,最早由Oguz和Prosperetti^[14]提出,Martynov等^[7]还将此模型推广到二维振动研究气泡与弹性血管之间的相互作用.医用超声造影剂微泡典型半径范围通常在1—5 μm之间^[15],和毛细血管直径差不多,因此当微泡进入毛细血管后,可近似认为其保持原有初始体积不变但形状变成了截面积和毛细血管相同的圆柱体,从而将毛细血管内的液体分为两个液柱,在外场的作用下,液柱-柱状气泡体系形成一个耦合振荡系统,如图1所示.设气泡形状为球形时的体积为 $V_B = 4\pi R_B^3/3$, R_B 为气泡初始球半径;当气泡进入微管后变成一圆柱体,其轴向长度可近似表示为

$$L_B = \frac{4\pi R_B^3}{3S}, \quad (1)$$

式中 $S = \pi R^2$ 表示管截面积, R 为截面半径,气泡左右两侧液柱的长度分别为 L_1 和 L_2 .

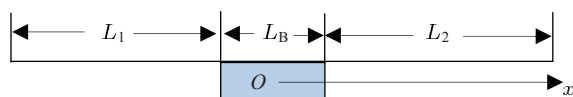


图1 管内柱状气泡振动示意图

建立两套坐标系, $o-x'$ 为坐标原点在 $t = 0$ 时刻气泡中心的静止坐标系, $O-x$ 为坐标原点 O 在 t 时刻气泡中心的动坐标系,两套坐标系坐标轴沿管轴方向,且正方向相同.设 t 时刻动坐标系原点在静坐标系中的位置坐标为 x' , $t = 0$ 时刻左右两侧液

柱质心位置为 x_{10} 和 x_{20} , t 时刻左右两侧液柱质心相对于动坐标系的坐标为 x_1 和 x_2 ,两液柱振动引起的气泡体积变化为

$$(x_2 - x_{20}) - (x_1 - x_{10}) = L_B X_B(t), \quad (2)$$

式中 $X_B(t)$ 是代表气泡振动的无量纲参数.我们将系统运动进行分解,一为不考虑气泡体积变化时系统的整体运动(牵连运动),与微管左右两侧自由端的声波压力有关,用气泡中心位置的运动代表;二是气泡体积变化引起的两侧液柱的耦合振动(相对运动),与微管左右两侧自由端的声波压力和泡内气体压力变化有关.系统的动力学方程可表示为

$$\rho(L_1 + L_2)\ddot{x}' = p_{1a} e^{i\omega t} - p_{2a} e^{i\omega t}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\rho L_1 \ddot{x}_1 + 2\rho L_1 b_v \dot{x}_1 \\ &= p_{1a} e^{i\omega t} - \rho L_1 \ddot{x}' - (p_B(t) - p_0), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\rho L_2 \ddot{x}_2 + 2\rho L_2 b_v \dot{x}_2 \\ &= -p_{2a} e^{i\omega t} - \rho L_2 \ddot{x}' + (p_B(t) - p_0), \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $p_{1a} e^{i\omega t}$ 和 $p_{2a} e^{i\omega t}$ 分别代表微管左右两侧自由端的声波压力, b_v 是与黏度阻尼系数, $-\rho L_1 \ddot{x}'$ 和 $-\rho L_2 \ddot{x}'$ 为惯性力, p_0 为液体静压力,泡内气体压力 $p_B(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} p_B(t) &= p_0(1 + X_B(t))^{-\Phi} \\ &\approx p_0 \left[1 - \Phi X_B + \frac{\Phi}{2}(1 + \Phi)X_B^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Phi}{6}(2 + 3\Phi + \Phi^2)X_B^3 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

式中 Φ 为复多方指数,其实部决定系统的共振频率,虚部与系统热损耗有关. $(p_B(t) - p_0)$ 为系统的弹性恢复力,须为奇函数,故略去三阶以上的小量后振动方程(4)和(5)中 $(p_B(t) - p_0)$ 的表达式应为

$$p_B(t) - p_0 \approx -\Phi p_0 X_B - \frac{\Phi}{6}(2 + 3\Phi + \Phi^2)p_0 X_B^3. \quad (7)$$

2.2 线性近似

线性近似前提下, $p_B(t) \approx p_0(1 - \Phi X_B)$,将其代入(4)和(5)式,结合(3)式有

$$\rho L_1 \ddot{x}_1 + 2\rho L_1 b_v \dot{x}_1 - p_0 \Phi X_B = p_a e^{i\omega t}, \quad (8)$$

$$\rho L_2 \ddot{x}_2 + 2\rho L_2 b_v \dot{x}_2 + p_0 \Phi X_B = -p_a e^{i\omega t}, \quad (9)$$

为两个受迫振动谐振子的耦合动力学方程,式中 $p_a = \frac{L_1 p_{2a} + L_2 p_{1a}}{L_1 + L_2}$ 为系统等效外场扰动压

力. 其稳态解可表示为

$$\begin{aligned} x_1 - x_{10} &= x_{1a} e^{i(\omega t + \alpha)}, \\ x_2 - x_{20} &= x_{2a} e^{i(\omega t + \alpha)}, \end{aligned} \quad (10)$$

式中左右两侧液柱的振幅 x_{1a} , x_{2a} 和相位 α 可分别表示

$$x_{1a} = -\frac{p_a}{\rho L_1 \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 b^2}}, \quad (11)$$

$$x_{2a} = \frac{p_a}{\rho L_2 \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega b)^2}}, \quad (12)$$

$$\tan \alpha = \frac{2\omega b}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (13)$$

式中

$$\omega_0^2 = \frac{p_0}{\rho L_B} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \text{Re } \Phi, \quad b = b_v + \frac{\omega_0^2 \text{Im } \Phi}{2\omega \text{Re } \Phi},$$

其中 ω_0 为系统共振频率, b 为基频振动时系统的总阻尼系数, 与系统黏热性能相关. 当 $p_{1a} = p_{2a}$ 时, 牵连运动消失, 液柱的振动规律与 Sassaroli 等^[8]的结果相同. 将 (10) 式代入 (2) 式可得到气泡的振动规律近似为

$$X_B(t) = X_{Ba} e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad (14)$$

式中

$$X_{Ba} = \frac{p_a}{\rho L_B \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega b)^2}} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right). \quad (15)$$

从线性条件下气泡受迫振动幅值的表达式可以看出, 微管两侧声压不同不影响气泡的共振频率, 但影响其振动幅值.

2.3 非线性扰动

将 (7) 式代入 (4) 和 (5) 式, 有

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2b_v \dot{x}_1 - \frac{p_0 \Phi}{\rho L_1} X_B \\ - \frac{\Phi}{6\rho L_1} (2 + 3\Phi + \Phi^2) p_0 X_B^3 \\ = \frac{p_a}{\rho L_1} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + 2b_v \dot{x}_2 + \frac{p_0 \Phi}{\rho L_2} X_B \\ + \frac{\Phi}{6\rho L_2} (2\Phi + 3\Phi^2 + \Phi^3) p_0 X_B^3 \\ = -\frac{p_a}{\rho L_2} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (17)$$

将 (17) 式减去 (16) 式, 近似有

$$\begin{aligned} \ddot{X}_B + 2b_v \dot{X}_B + \omega_0^2 \left(1 + i \frac{\text{Im } \Phi}{\text{Re } \Phi} \right) X_B + b_1 X_B^3 \\ = -\frac{p_a}{\rho L_B} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (18)$$

即为气泡非线性振动的动力学方程, 式中

$$b_1 = \frac{\omega_0^2 (\text{Re } \Phi + 1)}{6 \text{Re } \Phi} ((\text{Re } \Phi)^2 + 2 \text{Re } \Phi - 3(\text{Im } \Phi)^2). \quad (19)$$

由于叠加原理不适用于非线性系统, 故不能用叠加原理求解方程 (18), 但由于阻尼的存在使得受迫振动和驱动力之间存在着一相位差, 假定此相位差是固定的, 并取基频振动解 $X_{B1}(t)$ 的相位为零, 驱动力的相位 α_1 待定. 将方程 (18) 近似转换成著名的杜芬方程^[18]的形式, 即

$$\begin{aligned} \ddot{X}_B + 2b \dot{X}_B + \omega_0^2 X_B + b_1 X_B^3 \\ = \frac{p_a}{\rho L_B} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \cos(\omega t + \alpha_1). \end{aligned} \quad (20)$$

当取方程的解为 $X_{B1} = A \cos \omega t$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left((\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} b_1 A^3 \right)^2 + 4b^2 \omega^2 A^2 \\ = \left(\frac{p_a}{\rho L_B} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \right)^2, \end{aligned} \quad (21)$$

即为非线性扰动时气泡基频振动振幅满足的方程, 适用于驱动力、阻尼及与回复力相关的系数是同级小量的弱非线性情形. 上式表明, 气泡基波振幅与驱动声波频率、振幅、系统的阻尼因数和系统固有频率等因素相关. 利用逐级逼近法还可利用杜芬方程分析气泡的谐频和次谐频振动^[18], 为计算简便, 我们在此只简单讨论 3 倍频和 1/3 分谐频振动. 设 3 倍频振动可表示为 $X_{B2}(t) = A_2 \cos(3\omega t + \alpha_2)$, 将 $X(t) = X_{B1} + X_{B2}$ 代入方程 (20), 近似有

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{B2} + 2b \dot{X}_{B2} + \omega^2 X_{B2} \\ = -\frac{1}{4} b_1 A^3 \cos 3\omega t. \end{aligned} \quad (22)$$

利用三角函数关系使等式两边 $\cos 3\omega t$ 和 $\sin 3\omega t$ 的系数相等, 则有

$$A_2 = \pm \frac{b_1 A^3}{8\omega \sqrt{9b^2 + 16\omega^2}}, \quad (23)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{3b}{4\omega}. \quad (24)$$

同理, 设 1/3 分谐频振动为 $X_{B3}(t) = A_3 \cos(\omega t/3)$, 将 $X(t) = X_{B1} + X_{B3}(t)$ 作为一级近

似解代入方程 (20), 比较 $\cos(\omega t/3)$ 前面的系数, 近似有

$$\frac{3b_1}{4} (A_3^2 + AA_3 + 2A^2) - \frac{\omega^2}{9} - \frac{2\omega b}{3} + \omega_0^2 = 0, \quad (25)$$

即为 1/3 分谐频振动幅值 $|A_3|$ 与基频振动幅值 $|A|$ 之间的关系, (26) 式有非零实数解的条件为

$$\frac{16(\omega^2 + 6\omega b - 9\omega_0^2)}{27b_1} - 7A^2 \geq 0. \quad (26)$$

因此, 分谐频振动的形成与驱动声波频率、基频振动幅值和系统非线性等特性有关, 其起振幅值为 $|A/2|$, 系统阻尼对分频振动等非线性行为有促进作用.

2.4 多方指数 Φ 和黏性阻尼

为分析气泡线性和弱非线性振动特征, 我们还需了解多方指数 Φ 和黏性阻尼的变化特征. Sassaroli 等给出了圆柱管内多方指数的表达式 [15,16], 即

$$\begin{aligned} \text{Re } \Phi &= \frac{\gamma(1 + (\gamma - 1)g_1)}{(1 + (\gamma - 1)g_1)^2 + (\gamma - 1)^2g_2^2}, \\ \text{Im } \Phi &= -\frac{\gamma(\gamma - 1)g_2}{(1 + (\gamma - 1)g_1)^2 + (\gamma - 1)^2g_2^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

式中 γ 为气体比热比, g_1 和 g_2 分别定义为

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 + \text{Re} \left[\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k_n \lambda_n} \right)^2 \frac{\tanh k_n \Pi}{k_n \Pi} \right], \\ g_2 &= \text{Im} \left[\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k_n \lambda_n} \right)^2 \frac{\tanh k_n \Pi}{k_n \Pi} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

其中 λ_n 为零阶第一类 Bessel 函数 J_0 的零点, 其他参量分别为

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\omega R^2 L_B^2}{4D(R + L_B)^2}, \\ \Pi &= 1 + \frac{L_B}{R}, \\ k_n &= \frac{L_B}{2(R + L_B)} \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{i\omega}{D} R^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

式中 D 为介质热扩散率. 阻尼因数 b_v 与振动系统和介质的性质有关, 微管内的介质阻尼因数与管直径、声波频率以及介质黏度系数等因素有关, Sassaroli 等给出了它们之间复杂的数学关系, 本文中假定阻尼因数只与介质黏度系数和微管半径有关, 即 $b_v = \frac{4v}{R^2}$, v 为介质运动学黏度, 对血液而言, 常取值为 $v = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

3 数值分析

在数值计算过程中, 我们首先要确定多方指数 Φ , Φ 与泡内气体成分有关, 同时是气泡初始半径、管半径和驱动声波频率的函数 [15,16]. Φ 的实部决定泡内气体变化是等温过程或绝热过程. 对小气泡或低频情形, 泡内气体的变化可近似看成是等温过程. 当驱动声波频率超过 1MHz 或者气泡半径大于 $4 \mu\text{m}$, 泡内气体的变化通常在等温过程和绝热过程之间. Φ 的虚部变化影响系统运动阻尼, 同时影响系统的非线性状态.

和气泡的一维线性耦合振动相比, 非线性振动要复杂的多, 一方面表现为谐频或分谐频振动的出现, 另一方面气泡的基频振动振幅和频率不再是单调的一一对应关系. 图 2 给出了气泡基频振动幅值和驱动声波频率之间的关系. 对应的系统变量为: 气泡初始半径 $R_B = 3 \mu\text{m}$, 微管半径 $R = 5 \mu\text{m}$, 长度为 $L = 100 \mu\text{m}$, 左侧液柱长度 $L_1 = L/5$, 右侧液柱长度 $L_2 = L - L_1 - L_B$. 驱动声波压力的有效值分别对应为: (a) $p_a = 0.1 \text{ MPa}$, (b) $p_a = 0.2 \text{ MPa}$, (c) $p_a = 0.3 \text{ MPa}$. 图 2 中三条曲线对应的振幅变化规律特征相同, 即振幅具有多值性, 因此当气泡受到逐渐变化的频率激励时, 振幅不一定是单调增加或减小, 还可能出现跳跃现象. 跳跃现象通常发生在大于系统共振频率的声波频率范围, 驱动声波有效压力幅值不同, 跳跃现象出现的频率范围也会出现差异, 并随着驱动声波压力幅值的增加逐渐向高频区移动. 由于介质黏热性能和非线性效应的共同影响, 受迫振动系统的共振响应振幅为有限值. 改变气泡的位置、初始半径以及微管的尺寸等均会改变系统的共振频率, 从而使得幅 - 频响应的幅度变化, 但基本特征保持不变.

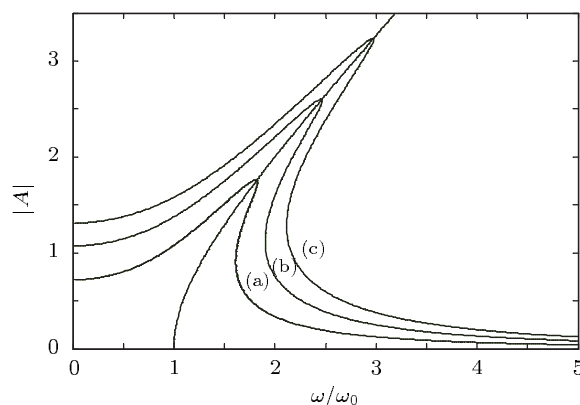


图 2 基频振动幅值与驱动声波频率间的关系 (a) $p_a = 0.1 \text{ MPa}$; (b) $p_a = 0.2 \text{ MPa}$; (c) $p_a = 0.3 \text{ MPa}$

在对基频振动幅 - 频关系分析的基础上, 我们还对相同条件下三倍频振动的幅 - 频关系进行了数值计算, 如图 3 所示, 图中三条曲线对应的驱动声波压力有效值分别为 (a) $p_a = 0.1$ MPa, (b) $p_a = 0.2$ MPa, (c) $p_a = 0.3$ MPa. 和基频振动幅值相比, 三倍频振动受驱动声波压力的影响相对较小, 尤其在高频区. 三倍频振动在 $\omega/\omega_0 < 0.5$ 的低频区幅值较高, 表明在三倍频振动在驱动频率低于系统共振频率的频段内更容易被激励出来. 计算结果还表明, 在整个驱动频段内, 三倍频振动幅值是有限的, 而在共振频率附近最低, 这表明非线性环境下基频共振将削弱向倍频振动的能量传递.

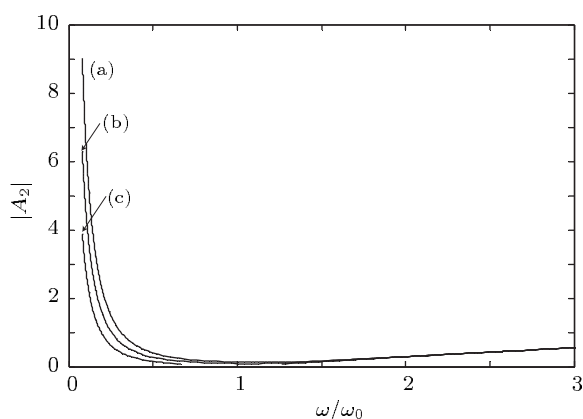


图 3 三倍频振动幅值 $|A_2|$ 随频率变化关系图 (a) $p_a = 0.1$ MPa; (b) $p_a = 0.2$ MPa (c) $p_a = 0.3$ MPa

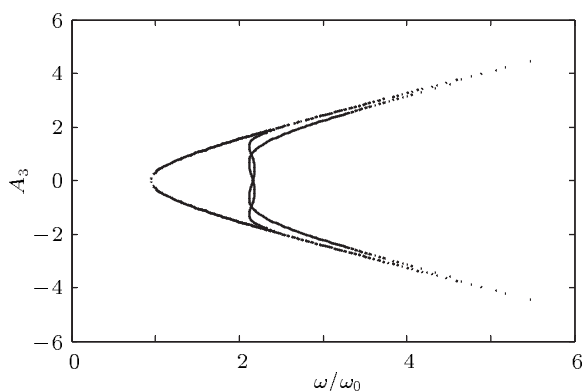


图 4 三分之一分频振动幅值 $|A_3|$ 随频率变化关系图

在 (26) 式中, A_3 可正可负, 具体符号与三分频振动起振时的初相位相关, 而 $|A_3|$ 则为三分频振动振幅, 因此, 图 4 中的曲线同样给出了驱动压力有效值 $p_a = 0.2$ MPa 时三分频振动的幅 - 频变化关系. 和基频和倍频振动相比, 三分频振动的幅 - 频变化更为独特. 在 $\omega/\omega_0 > 2.5$ 的高频区幅 - 频

变化曲线不再连续, 这可能和三分频振动的起振条件 (27) 式有关, 因为非线性振动对驱动力幅值、频率以及系统本身的初始条件有较强的依赖关系. 在 $\omega/\omega_0 = 2$ 附近的频域内, 幅值的多值性更明显, 说明该频域内三分频响应极不稳定. 幅 - 频曲线出现在 $\omega/\omega_0 > 1$ 的频域内, 因此, 对微管内一维耦合振动的气泡而言, 三分频振动将可能在 $\omega/\omega_0 > 1$ 的频域内产生.

自由场中气泡的径向振动在驱动声波压力幅值大于 0.1MPa 时将会形成非线性振动对应的空化效应, 在局部空间引起高温高压、微射流等, 成为声能量向其他能量转换的原动力. 在微管中的气泡在较强的外声场的驱动下也会形成非线性振动, 但其基频振动幅值响应相对较弱, 如共振响应区附近有效驱动压力为 0.1 MPa 时气泡振动最高幅值约为 $1.7L_B$, 驱动压力为 0.3 MPa 时最高幅值约为 $3.4L_B$, 同自由场中相同初始半径和激励条件的气泡非线性振动气泡相比, 其基频振动受到了一定程度的抑制. 而在 $\omega/\omega_0 < 1$ 低频区, 三分频振动受到抑制, 三倍频振动相对较强. 因此, 由于微管的约束, 不仅气泡线性振动的共振频率受到影响, 其非线性响应也和自由场中的气泡不同.

在我们的模型中, 气泡的振动状态决定了泡内气体的热力学变化规律, 而泡内气体的压力变化将会影响与其相邻的管壁的受力状态, 因此在声波的驱动下气泡的剧烈声响应必然引起与其邻近的管壁的声响应, 如气泡在非线性的快速收缩导致泡内气体压力升高, 则管壁内侧压力升高, 管壁内侧压力的变化即为透壁压力 (transmural pressure ΔP) 的变化. 由 Laplace 定律 $\Delta P = T/R$ 知^[8], 管壁内的周向张力 T 也会形成相应的变化, 进而成为破坏管壁的动力. 因此, 气泡进入生物体内后在外声场作用下的非线性受迫振动行为有助于提高声能量利用效率.

4 结论

Sassaroli 等^[15] 对毛细血管内气泡 - 液柱耦合振动系统的线性受迫振动特性进行了分析, 本文的理论分析是在他们的研究基础上的拓展, 主要着眼于外部声场作用下微管内气泡 - 液柱耦合振动系统的非线性特征, 利用逐级近似法对基频、三倍频和三分之一分频振动进行了理论分析. 若微管两侧声压分布均匀, 则气泡振动的驱动力与液柱长度无

关. 若声压分布不同, 我们可利用动力学关系求得驱动系统振动有效压力值, 该有效值受到左右两侧液柱长度的调制; 两侧声压不均匀还会引起系统质心的平动, 但该平动几乎不影响系统的共振响应状态, 因此, 我们在分析血管内气泡的振动规律时, 通常忽略血液流动的影响. 通过基频、三倍频和三分频振动的幅 - 频响应的数值分析我们对气泡 - 液柱耦合振动特征有了初步的了解, 主要表现为: 幅值响应的多值性引起系统的不稳定声响应; 三倍频振动在低频区响应强于高频区; 三分频振动在大于共振频率的频域内出现的概率更大. 微管内气泡的非线性响应是在外部驱动声压达到一定幅值之后必然引起的动力学结果, 因此对微管内气泡的非线性振动分析对研究气泡的动力学行为具有重要的现实意义.

本文是在微管轴向一维气泡 - 液柱耦合振动模型的基础进行的理论研究, 气泡体积变化只由平行于管截面的气 - 液界面的运动变化引起, 事实上, 由于表面张力的影响, 气 - 液界面不可能是平面, 因此微管内的柱状气泡模型只是一种理想模型. 另外, 我们忽略了管壁弹性对气泡振动的影响. 管壁的弹性能否忽略主要取决于它本身的材质和周围介质的约束状态, 如许多的生物实验证明当周围组织远大于毛细血管尺寸且组织被加压达到一定程度时, 毛细血管几乎可以看作是刚性的^[15]. 尽管如此, 在超声波的生物应用中以刚性管模型分析微管内气泡的振动只是一种粗略的理论近似, 有待于进一步发展考虑了管壁弹性后管内气泡振动动力学模型, Mateynov 等^[7] 已提出计入管壁弹性后气泡的线性共振模型. 在以后的工作中, 我们也将对计入管壁弹性影响后气泡受迫振动的非线性特征进行探究.

- [1] Hu Y T, Qin S P, Hu T, Ferrara K, Jiang Q 2005 *Int. J. Nonlin. Mech.* **40** 341
- [2] Qin S P, Hu Y T, Jiang Q 2006 *IEEE. T. Ultrason. Ferr.* **53** 1322
- [3] Freund J B 2008 *J. Acoust. Soc. Am.* **123** 2867
- [4] Cancelos S, Moraga F J, Lahey R T, Shain W, Parsons R H 2010 *J. Acoust. Soc. Am.* **128** 2726
- [5] Qin S P, Ferrara K W 2007 *Ultrasound Med. Biol.* **33** 1140
- [6] Miao H Y, Gracewski S M, Dalecki D 2009 *J. Acoust. Soc. Am.* **126** 2374
- [7] Martynov S, Stride E, Saffari N 2009 *J. Acoust. Soc. Am.* **126** 2963
- [8] Sassaroli E, and Hynynen K 2005 *Phys. Med. Biol.* **50** 5293
- [9] Gao F R, Hu Y T, Hu H P 2007 *Int. J. Solids. Struct.* **44** 7197
- [10] Zhen H R, Dayton P A, Caskey C, Zhao S K, Qin S P, Ferrara K W 2007 *Ultrasound Med. Biol.* **33** 1978
- [11] Wang Z Y, Tong A Y 2008 *Int. J. Therm. Sci.* **47** 221
- [12] Wang C H, Lin S Y 2010 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **53** 496
- [13] Leighton T G, White P R, Marsden M A 1995 *Acta Acust.* **3** 517
- [14] Oguz H N, Prosperetti A 1998 *J. Acoust. Soc. Am.* **103** 3301
- [15] Sassaroli E, Hynynen K 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **115** 3235
- [16] Chen X M, Prosperetti A 1998 *J. Acoust. Soc. Am.* **104** 1389
- [17] Jang N W, Gracewski S M, Abrahamsen B, Buttaccio T, Halm Robert, Dalecki D 2009 *J. Acoust. Soc. Am.* **126** EL34
- [18] Du G H, Zhu Z M, Gong X F 2001 *Fundamentals of Sound* (Nanjing: Nanjing University Press) p502 (in Chinese) [杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬 2001 声学基础 (南京: 南京大学出版社) 第 502 页]

Forced oscillations of gaseous bubbles in microtubules

Wang Cheng-Hui¹⁾²⁾ Cheng Jian-Chun^{1)†}

1) (*Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

2) (*Institute of Applied Acoustics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

(Received 22 February 2012; revised manuscript received 1 April 2012)

Abstract

Based on the model for the one-dimensional coupled oscillation of bubble-liquid column in tube, a theoretical investigation of the forced oscillation of a cylindrical gaseous bubble in a microtubule is presented. For the case that the two acoustic pressures of microtubule ends are not homogenous, the linear natural frequency is not affected, but its oscillating amplitude is influenced by the effective acoustic pressure amplitude. The relations between the amplitudes of fundamental, third and one third harmonic oscillations and the acoustic frequency are analyzed using the succession-level approximation method. Numerical results show that the bubble oscillates nonlinearly if the effective value of acoustic pressure exceeds 0.1MPa. It is found that the amplitudes of fundamental, third and one third harmonic oscillations are multivalued, and the response of third harmonic oscillation is stronger in the region of lower frequencies. Furthermore, the third harmonic oscillation may be probably induced in the region of $\omega/\omega_0 \geq 1$.

Keywords: cylindrical gaseous bubble, forced oscillations, nonlinear oscillations, acoustical response

PACS: 43.25.+y, 43.35.+d

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10904068, 10834009, 11174138, 81127901, 11174139), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. GK201002009), and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (Grant No. 2010JQ1006).

† E-mail: jccheng@nju.edu.cn