物 理 学 报　Acta Phys. Sin.　Vol. 61, No. 2 (2012)　020203

一类非线性扰动 Burgers 方程的孤子变分迭代解法*

吴钦宽†

(南京工程学院基础部, 南京 211167)

(2011 年 4 月 2 日收到; 2011 年 4 月 30 日收到修改稿)

研究了一类非线性扰动 Burgers 方程的求解问题. 利用变分迭代方法, 首先引入一个泛函, 然后计算它的变分, 最后构造方程的迭代关系式, 得到了相应方程的孤子解的近似展开式.

关键词: 非线性, 孤子, 变分迭代, 近似解

PACS: 02.30.Mv

1 引 言

孤子理论是非线性科学研究的一个重要方面, 在物理学的众多领域中, 诸如流体力学、场论、光学、等离子体物理等 [1−6], 现代孤子理论扮演了重要的角色, 得到了广泛应用. 随着对非线性理论研究的不断深入, 近年来在国际学术界研究孤子解出现了许多新的方法, 例如双曲正切法、齐次平衡法、Jacobi 椭圆函数法、辅助函数法、符号计算代数法、Riccati 函数法 [7,8] 等. 孤子扰动理论渐近方法的要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性孤子方程转化为易求解的方程来求解, 这类理论完全摆脱了对逆散射变换所依赖的直接方法. 本文使用的变分迭代方法 [9,10] 就是属于这一类方法. 其优点在于思路直接简明、计算简单、可得到较高近似度的解, 且求得的扰动解保留了解析特性, 因而不但能对得到的结果直接进行定量分析, 而且还能进一步进行深入的定性解析分析.

马松华、莫嘉琪等利用投射方程法、微分不等式、同伦映射、不动点原理等方法研究了一系列非线性孤子及相关的问题 [11−17]. 运用变分迭代方法研究非线性问题在当今的国际学术界引起许多学者的关注 [18−21]. 本文讨论一类在物理学和力学中经常出现的扰动发展方程, 利用变分迭代方法首先引入一个泛函, 然后计算它的变分, 构造方程的迭代关系式, 得到了相应方程的孤子解的近似展开式, 并应用此法求解微扰 Burgers 方程, 得到该方程的孤子扰动解的零次、一次、二次近似.

本文采用的广义变分迭代方法克服了古典的变分迭代方法对某些非线性偏微分方程寻找 Lagrange 乘子的局限性, 于是对所研究的扰动发展方程能够实现得到较快地逼近精确解的近似解序列.

2 扰动 Burgers 方程和广义变分迭代

考虑如下一类扰动 Burgers 方程 [22]:

$$u_t + uu_x + pu_{xx} = f(t,x,u), \tag{1}$$

其中 p 为常数, 而 f 为扰动项, 方程 (1) 在等离子体物理, 固体物理, 原子物理, 流体力学等物理学中具有广泛的应用.

假设 $[H]$: f 是关于其变量为充分光滑的函数, 且 $|f_u| \leqslant M$, 其中 M 为常数.

为了得到方程 (1) 的近似解, 引入泛函

$$\begin{aligned} F[u] &= u + \int_0^x \lambda(\tau)\Big(p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \\ &\quad + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - f(t,\tau,\bar{u})\Big)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\bar{u}$ 为 u 的限制变量 [10], λ 为 Lagrange 乘子.

计算泛函 (2) 的变分

$$\delta F = \delta u + \big[p\lambda(\tau)\delta u'(\tau) - p\lambda'(\tau)\delta u(\tau)\big]_{\tau=x}$$

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 11071205) 资助的课题.

† E-mail: wuqk@njit.edu.cn

　

$$-\int_0^x p\lambda''(\tau)\delta u \mathrm{d}\tau.$$

令 $\delta F=0$, 于是驻值条件为

$$\begin{aligned}\lambda'' &= 0,\\ \lambda(\tau)|_{\tau=x} &= 0,\\ 1-p\lambda'(\tau)|_{\tau=x} &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

由 (3) 式得

$$\lambda=\frac{1}{p}(\tau-x).\tag{4}$$

再由泛函 (2) 式以及 (4) 式, 构造如下广义变分迭代:

$$\begin{aligned}u_{n+1} = {}& u_n+\int_0^x \frac{1}{p}(\tau-x)\Big(p\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}+\frac{\partial u_n}{\partial t}\\ &+u_n\frac{\partial u_n}{\partial \tau}-f(t,\tau,u_n)\Big)\mathrm{d}\tau,\\ & n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{5}$$

根据假设 $[H]$ 和扰动方程 (1) 的结构, 由迭代关系式 (5), 可得到一个收敛的函数序列 $\{u_n\}$, 因此 $u(t,x)=\lim_{n\to\infty}u_n(t,x)$ 就是原方程 (1) 的精确解.

为了从 (5) 式出发得到扰动 Burgers 方程 (1) 孤子解的近似表达式, 取对应扰动 Burgers 方程 (1) 的非扰动方程

$$u_t+uu_x+pu_{xx}=0\tag{6}$$

的孤子解 $u_0(t,x)$ 作为扰动方程的零次近似. 由文献 [23] 知, 方程 (6) 具有如下孤子精确解:

$$u_0(t,x)=\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l),\tag{7}$$

其中 k,c,l 为任意常数, 他们可由 Burgers 方程扰动的具体条件来确定. 将 (7) 式代人 (5) 式得到扰动 Burgers 方程 (1) 孤子解的一次近似

$$\begin{aligned}u_1(t,x) = {}& \frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\\ &+\int_0^x\frac{1}{p}(\tau-x)\Big[-4p^2k^3\tanh(k\tau\\ &-ct+l)\operatorname{sech}^2(k\tau-ct+l)\\ &-2pkc\operatorname{sech}(k\tau-ct+l)+2pk^2\\ &\times\Big(\frac{c}{k}+2pk\tanh(k\tau-ct+l)\Big)\\ &\times\operatorname{sech}^2(k\tau-ct+l)-f\Big(t,\tau,\Big(\frac{c}{k}\\ &+2pk\tanh(k\tau-ct+l)\Big)\Big)\Big]\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{8}$$

再将 (8) 式代入 (5) 式得到扰动 Burgers 方程 (1) 孤子解的二次近似

$$\begin{aligned}u_2(t,x) = {}& \frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\\ &+\int_0^x\frac{1}{p}(\tau-x)\Big[-4p^2k^3\tanh(k\tau\\ &-ct+l)\operatorname{sech}^2(k\tau-ct+l)\\ &-2pkc\operatorname{sech}(k\tau-ct+l)\\ &+2pk^2\Big(\frac{c}{k}+2pk\tanh(k\tau-ct+l)\Big)\\ &\times\operatorname{sech}^2(k\tau-ct+l)-f(t,\tau,\Big(\frac{c}{k}\\ &+2pk\tanh(k\tau-ct+l)\Big)\Big]\mathrm{d}\tau\\ &+\int_0^x\frac{1}{p}(\tau-x)\Big[p\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial t}\\ &+\Big(\frac{c}{k}+w_0\Big)\frac{\partial w_0}{\partial x}\\ &+f\Big(t,\tau,\frac{c}{k}+w_0\Big)\Big]d\tau,\end{aligned}\tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}w_0 = {}& 2pk\tanh(k\tau-ct+l)+\int_0^\tau\frac{1}{p}(\eta-\tau)\\ &\times\Big[-4p^2k^3\tanh\omega\operatorname{sech}^2\omega\\ &-2pkc\operatorname{sech}\omega+2pk^2\Big(\frac{c}{k}+2pk\tanh\omega\Big)\\ &\times\operatorname{sech}^2\omega-f\Big(t,\eta,\frac{c}{k}+2pk\tanh\omega\Big)\Big]\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

这里的 $\omega=k\eta-ct+l$.

用同样的迭代方法, 可以得到扰动 Burgers 方程 (1) 孤子解的更高次近似.

3 微扰孤子解

若在扰动 Burgers 方程 (1) 中的扰动项是微扰的, 即 $f=\varepsilon g(u)$, 其中 ε 为正的小参数. 这时相应的微扰方程为

$$u_t+uu_x+pu_{xx}=\varepsilon g(u)\quad(0<\varepsilon<<1).\tag{10}$$

由以上计算不难得到微扰 Burgers 方程 (10) 的孤子扰动解 $u(t,x)$ 的零次、一次、二次近似,

$$\begin{aligned}u_0(t,x) = {}& \frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l),\\ u_1(t,x) = {}& \frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\\ &+\int_0^x\frac{1}{p}(\tau-x)\Big[-4p^2k^3\tanh(k\tau\\ &-ct+l)\operatorname{sech}^2(k\tau-ct+l)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2pkc\,\mathrm{sech}(k\tau-ct+l)+2pk^2\\
&\times\Big(\frac{c}{k}+2pk\tanh(k\tau-ct+l)\Big)\\
&\times\mathrm{sech}^2(k\tau-ct+l)-\varepsilon g\Big(\frac{c}{k}\\
&+2pk\tanh(k\tau-ct+l)\Big)\Big]\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(t,x)=\ &u_0+\int_0^x\frac{1}{p}(\tau-x)\Big[p\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}\\
&+\frac{\partial u_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}-\varepsilon g(u_0)\Big]\,\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^x\frac{1}{p}(\tau-x)\Big[p\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial t}\\
&+\Big(\frac{c}{k}+w_0\Big)\frac{\partial w_0}{\partial x}+\varepsilon g\Big(\frac{c}{k}+w_0\Big)\Big]\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
w_0=\ &2pk\tanh(k\tau-ct+l)+\int_0^\tau\frac{1}{p}(\eta-\tau)\\
&\times\Big[-4p^2k^3\tanh\omega\,\mathrm{sech}^2\,\omega\\
&-2pkc\,\mathrm{sech}\,\omega+2pk^2\Big(\frac{c}{k}+2pk\tanh\omega\Big)\\
&\times\mathrm{sech}^2\,\omega-\varepsilon g\Big(\frac{c}{k}+2pk\tanh\omega\Big)\Big]\,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

这里的 $\omega=k\eta-ct+l$.

4 讨论及结论

由扰动 Burgers 方程 (1) 的左端项的结构及其扰动项 f 关于其变元的性态以及由本文引入的变分迭代关系的解析性, 可以证明由迭代式 (5) 所确定的函数序列 $\{u_n\}$ 是一致收敛的, 从而其极限函数就是原方程 (1) 的解.

非线性方程一般是不能得到有限形式的解析解. 人们只能用数值方法得到它的的模拟解, 或者用近似解去逼近它. 然而由于得到的模拟解不能进行解析运算, 从而终止了对方程的解析运算. 这样有时往往会忽略对一些非线性方程的某些特性的研究, 特别是一些微扰方程出现跳跃过渡的激波层现象的解有时就会被忽略. 广义变分迭代方法得到方程的近似解是析解函, 数尽管是用积分形式表达的超越函数去逼近方程的精确解, 但还可用解析的方法继续探索方程解的其他特殊特性.

用广义变分迭代方法, 引入 Lagrange 乘子并求其形式, 以保证得到 “最佳” 逼近的迭代序列. 本文选取的初始近似 $u_0(t,x)$ 是采用非扰动情形下的标准 Burgers 方程的孤子解 (7) 式. 它保证了对应于扰动情形下的 Burgers 方程较快地求得在要求的精度范围内的近似解, 特别是对微扰方程 (10), 从而能快速而有效地得到解的近似解. 这更接近模型的真实现象, 所以所得的结果更加实用、简捷.

[1] MePhadem M J, Zhang D 2002 *Power* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Ma S H, Qing J Y, Fang J P 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 662

[4] Loutsenko I 2006 *Commun. Math. Phys.* **268** 465

[5] Gedalin M 1998 *Phys. Piasmas* **5** 127

[6] Parkes E J 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **38** 154

[7] Parkes E J, Duffy B R 1996 *Comput. Physt. Commun.* **98** 288

[8] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[9] He J H 2006 *International J. Modern Phys.* **20B** 1141

[10] He J H 2002 *Approxinate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]

[11] Ma S H, Fang J P, Ren Q B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4420 (in Chinese) [马松华, 方建平, 任清褒 2010 物理学报 **59** 4420]

[12] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zhang C L 2009 *Chaos. Solitons and Fract.* **40** 1352

[13] Xu Y H, Mo J Q , Wen Z H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050205 (in Chinese) [许永红, 莫嘉琪, 温朝晖 2011 物理学报 **60** 050205]

[14] Mo J Q , Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875

[15] Mo J Q , Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1450

[16] Wu Q K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 068802 (in Chinese) [吴钦宽 2011 物理学报 **60** 068802]

[17] Huang N N 1996 *Theory of Solition and Method of Perturbations* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technologicai Education Publishing House) (in Chinese) [黄念宁 1996 孤子理论和扰动方法 (上海: 上海科技教育出版社)]

[18] Yousefi S A, Dehgha M 2010 *Int. J. Comout. Math.* **87** 1299

[19] Hemeda A A 2009 *Chaos, Solitons and Fract.* **39** 1297

[20] Abassy T A 2010 *Comput. Math Appl.* **59** 912

[21] Song L N, Wang Q, Zhang H Q 2009 *J. Comout. Appl. Math.* **224** 210

[22] Shi L F, Zhou X C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2915 (in Chinese) [石兰芳, 周先春 2010 物理学报 **59** 2915]

[23] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Science in China* A **12** 1103

Variational iteration solution method of soliton for a class of nonlinear disturbed Burgers equation*

Wu Qin-Kuan †

(*Dept. of Basic Courses, Nanjing Institute of Technology, Nanjing* 211167, *China*)

(Received 2 April 2011; revised manuscript received 30 April 2011)

Abstract

The problem of solving a class of nonlinear disturbed Burgers equation is studied. Using the variational iteration method, a functional is introduced, then its variational is computed, and the iteration expansion is constructed. The soliton solutions of the approximate expansion are obtained from the corresponding equation.

Keywords: nonlinear, soliton, variational iteration, approximate solution

PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11071205).

† E-mail: wuqk@njit.edu.cn