变质量完整系统的共形不变性和 Noether 对称性及 Lie 对称性

陈蓉 许学军†

(浙江师范大学物理系, 金华 321004)

(2011 年 4 月 19 日收到; 2011 年 4 月 29 日收到修改稿)

研究变质量完整系统在无限小变换下的共形不变性与 Noether 对称性和 Lie 对称性. 首先, 给出了变质量完整系统的共形不变性的定义; 其次, 研究了系统的共形不变性与 Noether 对称性之间的关系, 得到了共形不变性导致的 Noether 守恒量; 最后, 研究了系统的共形不变性与 Lie 对称性之间的关系, 得到了共形不变性同时是 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量. 最后举例说明了结果的应用.

关键词: 变质量完整系统, 共形不变性, 共形因子, 守恒量

PACS: 11.30.–j, 45.20.Jj, 02.20.Sv

1 引 言

对称性原理是物理学中高层次的法则之一, 在分析力学发展过程中, 用对称性方法研究动力学系统的守恒量占据着非常重要的地位 [1,2]. 近年来, 关于动力学系统的 Noether 对称性、Lie 对称性、形式不变性等的研究已经受到大量关注 [2]. 寻求动力学系统的其他对称性的研究也有展开, 如 Lagrange 对称性、共形不变性等. Galiullin 等 [3] 在研究 Birkhoff 系统时, 给出了共形不变性和共形因子的概念, 并且建立了共形不变性与守恒量之间的关系. 近年来, 学者对不同力学系统下共形不变性与其他对称性之间的关系做过一些研究 [4−10]. 最近, 李彦敏 [10] 研究了变质量非完整力学系统的共形不变性, 文中讨论了共形不变性与 Lie 对称性的关系, 以及通过 Noether 对称性导出的 Noether 守恒量, 但其文中未提出更多的关于共形不变性和其他对称性之间的关系. 本文则首先给出变质量完整系统共形不变性的定义和确定方程, 再研究了系统的共形不变性与 Noether 对称性、Lie 对称性三者之间的关系、导出共形不变性同是其他对称性的条件, 并且找到了共形不变性导致的 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量.

2 变质量完整系统的共形不变性

假设系统由 N 个质点组成, 在时刻 t, 第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,\cdots,N)$, 在时刻 $t+\mathrm{d}t$, 由质点分离 (或并入) 的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$. 假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定, 并设质点质量依赖时间和广义坐标

$$m_i = m_i(t,\boldsymbol{q}), \quad (i=1,\cdots,N), \tag{1}$$

变质量完整力学系统的运动微分方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + P_s, \quad (s=1,\cdots,n), \tag{2}$$

L=$L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数,Q_s=Q_s $(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力,P_s 为广义反推力,

$$P_s = \dot{m}_i[\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i]\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 分别为第 i 个质点的矢径和速度,$\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对第 i 个质点的相对速度.展开方程 (2), 有

$$A_{sk}\ddot{q}_k + B_s - Q_s - P_s = 0, \quad (s,k=1,2,\cdots,n), \tag{4}$$

† E-mail: xxj@zjnu.cn

其中

$$A_{sk}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k},B_s=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_s}. \quad (5)$$

假设系统 (2) 非奇异, 即设

$$\det(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k})\neq 0, \quad (6)$$

由方程 (2) 可导出

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \quad (7)$$

引进时间和广义坐标的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s,\quad (s=1,\cdots,n), \quad (8)$$

或其展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad (s=1,\cdots,n), \quad (9)$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s 为无限小生成元. 取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}. \quad (10)$$

一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}, \quad (11)$$

二次扩展为

$$X^{(2)}=X^{(1)}+[(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot}-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}. \quad (12)$$

令

$$F_s=A_{sk}\ddot{q}_k+B_s-Q_s-P_s. \quad (13)$$

定义 二阶微分方程 F_s, 在无限小生成元 $\xi_0(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),\xi_s(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ 的变换下, 若满足条件

$$X^{(2)}F_s=\ell_s^kF_k, \quad (14)$$

则称二阶微分方程为共形不变, 相应不变性为系统的共形不变性, ℓ_s^k 是一个任意非退化矩阵, 称为共形因子.

3 变质量完整系统的共形不变性与 Noether 对称性

Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换 (8) 作用下的一种不变性. Noether 理论指出, 如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Noether 等式 [2]

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q_s+P_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0, \quad (15)$$

这种不变性为变质量完整系统的 Noether 对称性.

命题 1 对于变质量完整力学系统, 如果无限小变换 (8) 相应于系统的 Noether 对称性, 当共形因子 ℓ_s^k 为

$$\ell_s^k=E_s(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0),(s,k=1,\cdots,n), \quad (16)$$

且满足条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_s}(Q_k+P_k)-\frac{\partial}{\partial q_k}(Q_s+P_s)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}(Q_k+P_k)\right)(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(Q_s+P_s)+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}(Q_k+P_k)\right)(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0-\ddot{q}_k\xi_0)=0. \quad (17)$$

则无限小变换 (8) 是共形不变的, 即共形不变性的确定方程为

$$X^{(2)}F_s=E_s(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)F_k. \quad (18)$$

证明

$$\begin{aligned}
&X^{(2)}F_s-E_s\left\{L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q_k+P_k)(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)+\dot{G}_N\right\}\\
&=X^{(2)}\{E_s(L)\}-X^{(1)}(Q_s+P_s)-E_s\left\{L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q_k+P_k)(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)+\dot{G}_N\right\}\\
&=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial\dot{q}_s}-\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k-L\right)\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial G_N}{\partial\dot{q}_s}\right]\\
&\quad+E_s(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)E_k(L)-X^{(1)}(Q_s+P_s)-E_s[(Q_k+P_k)(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)]\\
&\quad+\left(\frac{\partial\xi_k}{\partial\dot{q}_s}-\dot{q}_k\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_s}\right)(\dot{Q}_k+\dot{P}_k)\\
&=E_s(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)[E_k(L)-Q_k-P_k]+E_s(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)(Q_k+P_k)\\
&\quad-X^{(1)}(Q_s+P_s)-E_s[(Q_k+P_k)(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)]+\left(\frac{\partial\xi_k}{\partial\dot{q}_s}-\dot{q}_k\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_s}\right)(\dot{Q}_k+\dot{P}_k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E_s(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)[E_k(L) - Q_k - P_k] + \left\{\left(\frac{\partial}{\partial q_s}(Q_k + P_k) - \frac{\partial}{\partial q_k}(Q_s + P_s) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k + P_k)\right)(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)\right.\\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(Q_s + P_s) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k + P_k)\right)(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0 - \ddot{q}_k\xi_0)\right\}. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

若

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial q_s}(Q_k + P_k) - \frac{\partial}{\partial q_k}(Q_s + P_s) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k + P_k)\right)(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)\\
&- \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(Q_s + P_s) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k + P_k)\right)(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0 - \ddot{q}_k\xi_0) = 0, \qquad (20)
\end{aligned}
$$

则当 ℓ_s^k 为 $\ell_s^k = E_s(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)$,$(s, k = 1, \ldots, n)$, 即 (19) 式为

$$
\begin{aligned}
&X^{(2)}F_s - E_s(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)F_k\\
=&E_s\Big\{L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L)\\
&+(Q_k+P_k)(\xi_k-\dot{q}_k\xi_0)+\dot{G}_N\Big\}. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

此式为变质量完整系统在无限小变换 (8) 下的一个重要关系. 因此, 如果无限小变换 (8) 相应于系统的 Noether 对称性, 即满足 Noether 等式 (15) 及条件 (17), 则有

$$X^{(2)}F_s = E_s(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)F_k. \qquad (22)$$

由定义可知, 无限小变换 (8) 是共形不变的. 证毕.

推论 1 如果无限小变换 (8) 相应于变质量完整系统是共形不变的, 只要满足条件 (17), 则无限小变换也是 Noether 对称的. 对于此系统, 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 是 Noether 对称性的, 且 ξ_0, ξ_s, Q_s, P_s 满足条件 (17), 则生成元 ξ_0, ξ_s 必是 Lie 对称性的 [2]. 如果不满足条件 (17), 则不是 Lie 对称性的. 故若无限小变换 (8) 相对于系统是共形不变的, 且满足条件 (17), 则无限小变换也必是 Lie 对称性的.

命题 2 对于变质量完整系统, 如果无限小变换 (8) 的生成元满足 Noether 等式 (15) 及条件 (17), 则由系统的共形不变性可导致 Noether 守恒量, 形如

$$I_{\mathrm{N}} = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{N}} = \text{const}. \qquad (23)$$

4 变质量系统的共形不变性与 Lie 对称性

微分方程在群的无限小变换下的不变性叫做 Lie 对称性, 故变质量完整力学系统方程的 Lie 对称性的确定方程可表示为 [2]

$$X^{(2)}[E_s(L)] = X^{(1)}(Q_s) + X^{(2)}(P_s), \qquad (24)$$

也就是

$$X^{(2)}F_s|_{F_s=0} = 0. \qquad (25)$$

经过推导 [9], 整理得到

$$X^{(2)}F_s - X^{(2)}F_s|_{F_s=0} = B_s^r F_r, \qquad (26)$$

$$
\begin{aligned}
B_s^r =\ & A_{sk}\left[\frac{\partial^2\xi_k}{\partial t\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial^2\xi_k}{\partial q_l\partial \dot{q}_m}\dot{q}_l + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_m} - \dot{q}_k\Big[\frac{\partial^2\xi_0}{\partial t\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial^2\xi_0}{\partial q_l\partial \dot{q}_m}\dot{q}_l + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_m} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_m}\Big]\right]A^{mr}\\
&-2\delta_s^r\dot{\xi}_0 + \Big(\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_m} - \dot{q}_k\frac{\partial \xi_0}{\partial q_m}\Big)A^{mr}\frac{\partial(B_s - Q_s - P_s)}{\partial \dot{q}_k} + X^{(0)}(A_{sk})A^{kr}. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

命题 3 对于变质量完整系统, 其共形不变性同时又是 Lie 对称性的充分必要条件是无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足

$$
\begin{aligned}
\ell_s^k =\ & B_s^r = A_{sk}\left[\frac{\partial^2\xi_k}{\partial t\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial^2\xi_k}{\partial q_l\partial \dot{q}_m}\dot{q}_l + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_m} - \dot{q}_k\Big[\frac{\partial^2\xi_0}{\partial t\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial^2\xi_0}{\partial q_l\partial \dot{q}_m}\dot{q}_l + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_m} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_m}\Big]\right]A^{mr}\\
&-2\delta_s^r\dot{\xi}_0 + \Big(\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_m} - \dot{q}_k\frac{\partial \xi_0}{\partial q_m}\Big)A^{mr}\frac{\partial(B_s - Q_s - P_s)}{\partial \dot{q}_k} + X^{(0)}(A_{sk})A^{kr}. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

推论 2 如果无限小变换 (8) 相应于变质量完整系统是 Lie 对称性, 且存在规范函数 $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使满足 Noether 等式 (15), 则 Lie 对称性是 Noether 对称性. 若不满足, 则不是 Noether 对称性 [2]. 故若无限小变换 (8) 相对于系统是共形不变的, 且满足充要条件 (28) 和 Noether 等式 (15), 则无限小变换也必是 Noether 对称性的.

命题 4 取时间不变的特殊无限小变换

$$t^* = t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad (s=1,\ldots,n), \tag{29}$$

如果在特殊无限小变换 (29) 下, 生成元 ξ_s 满足

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s = \frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k, \tag{30}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}, \tag{31}$$

且存在某函数 $\mu = \mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{32}$$

则共形不变性同时是 Lie 对称性, 并可以导致 Hojman 守恒量,

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right) = \mathrm{const}. \tag{33}$$

5 算例

设一变质量动力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(t)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \tag{34}$$

其中

$$m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\gamma t}\quad(\gamma = \mathrm{const.}), \tag{35}$$

非势广义力

$$Q_1 = 0, Q_2 = \dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1, \tag{36}$$

由假设微粒分离的绝对速度为零, 由 (3) 式得

$$P_1 = P_2 = 0. \tag{37}$$

由方程 (13) 给出

$$F_1 = m(\ddot{q}_1 - \gamma\dot{q}_1),$$
$$F_2 = m[\ddot{q}_2 - \gamma\dot{q}_2 - \frac{1}{m}(\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1)], \tag{38}$$

当无限小生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = (m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2)^2 \tag{39}$$

时,

$$X^{(2)} = \xi_2\frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{\xi}_2\frac{\partial}{\partial\dot{q}_2} + \ddot{\xi}_2\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_2}, \tag{40}$$

那么

$$\begin{aligned} X^{(2)}F &= m\left(\xi_2\frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{\xi}_2\frac{\partial}{\partial\dot{q}_2} + \ddot{\xi}_2\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_2}\right)\begin{pmatrix}\ddot{q}_1 - \gamma\dot{q}_1\\ \ddot{q}_2 - \gamma\dot{q}_2 - \frac{1}{m}(\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1)\end{pmatrix}\\ &= m\begin{pmatrix}0\\ -2(2\gamma m+1)(m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2)[\ddot{q}_2 - \gamma\dot{q}_2 - \frac{1}{m}(\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1)]\end{pmatrix}\\ &= m\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2(2\gamma m+1)(m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{q}_1 - \gamma\dot{q}_1\\ \ddot{q}_2 - \gamma\dot{q}_2 - \frac{1}{m}(\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1)\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{41}$$

因此共形因子为

$$\ell_s^r = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2(2\gamma m+1)(m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2)\end{pmatrix}. \tag{42}$$

由命题 3 可得变质量完整动力学系统共形不变的充分必要条件为

$$\ell_s^r = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2(2\gamma m+1)(m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2)\end{pmatrix}, \tag{43}$$

因为取无限小变量 ξ_0, ξ_s 满足 Lie 对称性的确定方程 (30), 由 (32) 式给出

$$2\gamma + \frac{1}{m} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{44}$$

得到 μ 的一个解

$$\mu = \exp(-2\gamma t - \frac{1}{m_0\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}). \tag{45}$$

由 (33) 式,(45) 式得到 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = -2(m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2) = \mathrm{const}. \tag{46}$$

Noether 等式 (15) 给出

$$(\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1)\xi_2 + \dot{G}_{\mathrm{N}} = 0. \tag{47}$$

将 (39) 式代入 (47) 式可求得

$$G_{\mathrm{N}} = -(q_2 + \frac{1}{2}q_1^2)(m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2)^2. \tag{48}$$

由命题 2 可知, 所取的无限小变换相对于系统的 Noether 对称性, 并且所取的无限小生成元 (39) 满足条件 (17), 故生成元 (39) 相应于系统的 Noether 对称性, 是共形不变的, 且共形因子为

$$\ell_s^k = \begin{pmatrix} 0 & 2q_1(m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2) \\ 0 & -2(\gamma m - 1)(m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2) \end{pmatrix}, \tag{49}$$

将生成元 (39) 和规范函数 (48) 代入 (23) 式, 得

$$I_{\mathrm{N}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\xi_2 + G_{\mathrm{N}} = (m\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2)^3 = \mathrm{const}. \tag{50}$$

6 结 论

变质量完整力学系统在无限小变换下微分方程的共形不变性, 可通过 Noether 对称性找到确定方程中的共形因子, 且无限小变换需满足条件 (17), 则系统是共性不变的; 也可通过 Lie 对称性找到确定方程中的共形因子, 该共形因子也就是系统的共形不变性同时是 Lie 对称性的充分必要条件. 同时无限小变换相对于系统是共形不变的, 若满足条件 (17), 则是 Lie 对称性的; 若满足充要条件 (28) 和 Noether 方程 (15), 则是 Noether 对称性的. 这样, 也就得到变质量完整系统由共形不变性导致的 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量, 建立了共形不变性与守恒量之间的关系.

[1] Mei F X, Liu Y 1991 *Advanced analytical mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 刘瑞, 罗勇 1991 高等分析力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[2] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)[梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

[3] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) (in Russian)

[4] Li Y M, Zhang N 2010 *Journal of Shangqiu Teachers College* **26** 55 (in Chinese) [李彦敏, 张宁 2010 商丘师范学院学报 **26** 55]

[5] Zhang Y 2009 *Journal of Suzhou University of Science and Technology* **26** 1 (in Chinese) [张毅 2009 苏州科技学院学报 **26** 1]

[6] Zhang Y, Xue Y 2009 *Chinese Quarterly of Mechanics* **30** 216 (in Chinese) [张毅, 薛纭 2009 力学季刊 **30** 216]

[7] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[8] Robert M L, Matthew P 2001 *J. Geom. Phys.* **39** 276

[9] Chen X W, Zhao Y H, Liu C 2009 *Acta Phys .Sin.* **58** 5150 (in Chinese) [陈向炜, 赵永红, 刘畅 2009 物理学报 **58** 5150]

[10] Li Y M 2010 *Journal of Yunnan University* **32** 52 (in Chinese) [李彦敏 2010 云南大学学报 **32** 52]

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 2 (2012) 021102

Conformal invariance, Noether symmetry and Lie symmetry for holonomic mechanical system with variable mass

Chen Rong Xu Xue-Jun†

(*Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua* 321004, *China*)

(Received 19 April 2011; revised manuscript received 29 April 2011)

Abstract

The conformal invariance of holonomic mechanical system with variable mass is studied. Firstly, the definition of conformal invariance for holonomic mechanical system with variable mass is given; secondly, the relation between the conformal invariance and the Noether symmetry is discussed, and the Noether conserved quantity led by the conformal invariance is obtained; finally, the relation between the conformal invariance and the Lie symmetry is discussed, and the Hojman conserved quantity caused by the conformal invariance of the systems is obtained. In the paper, an example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: variable mass holonomic system, conformal invariance, conformal factor, conserved quantity

PACS: 11.30.–j, 45.20.Jj, 02.20.Sv

† E-mail: xxj@zjnu.cn