完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的一种新的守恒量*

孙现亭[1)] 韩月林[2)] 王肖肖[2)] 张美玲[2)] 贾利群[2)†]

1) (平顶山学院电气信息工程学院, 平顶山 467002)

2) (江南大学理学院, 无锡 214122)

(2012 年 2 月 14 日收到; 2012 年 4 月 9 日收到修改稿)

研究完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的一种新的守恒量. 在群的无限小变换下, 由完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的定义和判据, 得到用 Appell 函数表示的完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的一种新的结构方程和新的守恒量. 最后, 举例说明结果的应用.

关键词: Appell 方程, Mei 对称性, 新的结构方程, 新的守恒量

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.20.Jj

1 引 言

1918 年, Noether 在 Göttingen 大学的就职论文中, 讨论了连续群 (Lie 群) 下不变式问题, 给出了 Noether 定理, 把对称性、不变性和物理的守恒律联系在了一起 [1]. 这篇论文深刻地揭示了对称性与守恒量间的潜在关系. 20 世纪 70 年代, 国际分析力学界逐渐重视对称性与守恒量的研究 [2−5]. 2000 年, 梅凤翔 [6] 提出了后来被学者普遍称之为 Mei 对称性的力学系统中动力学函数经历无限小变换后仍满足原方程的形式不变性. 2008 年以来, 约束力学系统的对称性和守恒量依然是众多学者的研究重点 [7−24]. 在分析力学理论中三大力学体系之一的 Appell 方程的对称性的研究中, 梅凤翔 [25] 首先由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了 Noether 守恒量; 李仁杰等 [26] 由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了变质量完整系统的守恒量; 罗绍凯 [27] 由形式不变性分别通过 Noether 对称性和 Lie 对称性间接得到了转动相对论完整系统 Appell 方程的守恒量. 上述论文为 Appell 方程守恒量的研究提供了一种方法, 但却无法得到用 Appell 函数直接表示的结构方程和守恒量. 文献 [28] 首次给出了用 Appell 函数直接表示的力学系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量. 但该组结构方程和 Mei 守恒量的表达式过于复杂, 造成计算困难. 本文将给出完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的一种新的结构方程和新的守恒量.

2 完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性及其判据

设完整力学系统的 Appell 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{1}$$

引进无限小变换生成元向量以及它的一次扩展和二次扩展

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{2}$$

$$\tilde{X}^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{3}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11142014, 61178032) 资助的课题.

† E-mail: jlq0000@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

$$\tilde{X}^{(2)}=\tilde{X}^{(1)}+\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\right.$$
$$\left.-\ddot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}, \tag{4}$$

其中 [28]

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}+\dot{\alpha}_s\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}. \tag{5}$$

时间和广义坐标的无限小变换的展开式为

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0\left(t,q,\dot{q}\right),$$
$$q_s^*\left(t^*\right)=q_s\left(t\right)+\varepsilon\xi_s\left(t,q,\dot{q}\right)$$
$$(s=1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0,ξ_s 为无限小变换生成元. 由 (6) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*}=\frac{\mathrm{d}q_s+\varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t+\varepsilon\mathrm{d}\xi_0}$$
$$=\dot{q}_s+\varepsilon\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)+O\left(\varepsilon^2\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}^2q_s^*}{\mathrm{d}t^{*2}}=\ddot{q}_s+\varepsilon\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0\right]+O\left(\varepsilon^2\right). \tag{7}$$

将经无限小变换 (6) 变换后的动力学函数 S^* 和 Q_s^* 在 $(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$ 处做 Taylor 级数展开, 有

$$S^*=S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\tilde{X}^{(2)}(S)+O(\varepsilon^2), \tag{8}$$
$$Q_s^*=Q_s^*\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)$$
$$=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon\tilde{X}^{(1)}(Q_s)+O(\varepsilon^2)$$
$$(s=1,2,\cdots,n). \tag{9}$$

定义 如果用经无限小变换 (6) 变换后的动力学函数 S^* 和 Q_s^* 代替变换前的动力学函数 S 和 Q_s, 系统的 Appell 方程 (1) 的形式保持不变, 即

$$\frac{\partial \mathrm{S}^*}{\partial\ddot{q}_s}=Q_s^*\quad(s=1,2,\cdots,n), \tag{10}$$

则这种对称性称为完整系统 Appell 方程 (1) 的 Mei 对称性.

将 (8), (9) 式代入 (10) 式, 忽略 ε^2 以上的高阶小项, 并利用方程 (1) 可得

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}\left[\tilde{X}^{(2)}\left(S\right)\right]-\tilde{X}^{(1)}\left(Q_s\right)=0, \tag{11}$$

方程 (11) 称为 Appell 方程 Mei 对称性的判据方程. 于是, 有

判据 对于完整系统的 Appell 方程 (1), 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使判据方程 (11) 成立, 则 Appell 方程 (1) 在无限小变换 (6) 下的不变性, 称为完整系统 Appell 方程 (1) 的 Mei 对称性.

3 完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的新的结构方程和新的守恒量

命题 如果完整系统 Appell 方程 (1) 的 Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 以及规范函数 $G_X=G_X(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下新的结构方程

$$\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}\left(S\right)}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s}$$
$$+\ddot{q}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}G_X}{\mathrm{d}t}+\frac{\bar{\mathrm{d}}\ddot{q}_s}{\mathrm{d}t}\tilde{X}^{(1)}\left(Q_s\right)=0, \tag{12}$$

则完整系统 Appell 方程 (1) 的 Mei 对称性的新的守恒量为

$$I_X=\tilde{X}^{(2)}\left(S\right)+G_X=\mathrm{const}. \tag{13}$$

证明 注意到方程 (11) 和 (12), 有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}I_X}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}\left(S\right)}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s}+\ddot{q}_s\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\dot{q}_s}$$
$$+\frac{\bar{\mathrm{d}}\ddot{q}_s}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}G_X}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\bar{\mathrm{d}}\ddot{q}_s}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial\ddot{q}_s}-\tilde{X}^{(1)}(Q_s)\right]$$
$$=0.$$

证毕.

4 算 例

完整系统的 Appell 函数和广义力分别为

$$S=\frac{1}{2}\left(\ddot{q}_1^2+\ddot{q}_2^2\right)+\ddot{q}_1q_2+\ddot{q}_2q_1+t, \tag{14}$$
$$Q_1=Q_2=0. \tag{15}$$

试研究系统的 Mei 对称性和新的守恒量.

首先, 研究完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性. 将 (14), (15) 式代入方程 (1) 得

$$\ddot{q}_1+q_2=0,\quad \ddot{q}_2+q_1=0. \tag{16}$$

注意到方程 (16), 利用 (2), (3) 和 (4) 式做计算得

$$\tilde{X}^{(2)}\left(S\right)=\xi_0+\xi_1\ddot{q}_2+\xi_2\ddot{q}_1. \tag{17}$$

判据方程 (11) 给出

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\ddot{q}_1}+\frac{\partial\xi_1}{\partial\ddot{q}_1}\ddot{q}_2+\frac{\partial\xi_2}{\partial\ddot{q}_1}\ddot{q}_1+\xi_2=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \ddot{q}_2}+\frac{\partial \xi_1}{\partial \ddot{q}_2}\ddot{q}_2+\xi_1+\frac{\partial \xi_2}{\partial \ddot{q}_2}\ddot{q}_1=0. \tag{19}$$

由方程 (18) 和 (19) 可找到 Mei 对称的生成元

$$\xi_0=\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2\right), \quad \xi_1=\xi_2=0. \tag{20}$$

因此, 系统具有 Mei 对称性.

下面, 研究完整系统 Appell 方程 Mei 对称性导致的新守恒量. 将 (20) 式代入 (17) 式得

$$\tilde{X}^{(2)}(S)=\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2\right), \tag{21}$$

将 (21) 式代入方程 (12), 可得

$$G_X=0, \tag{22}$$

故由 (13) 式可得

$$I_X=\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2\right)=\text{const}. \tag{23}$$

5 结 论

本文在群的无限小变换下, 由完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的定义和判据, 得到了用 Appell 函数表示的完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的一种新的结构方程和新的守恒量. 这种新的结构方程和新的守恒量表述简单, 便于计算. 本文结论不仅适用于完整系统的 Appell 方程, 而且还可利用本文方法, 将其进一步推广到非完整系统、变质量完整系统、单面约束系统等约束力学系统.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **Kl** 235

[2] Lutzky M D 1979 *Phys.* A *Math. Gen.* **12** 973

[3] Vujanović B A 1986 *Acta Mech.* **65** 63

[4] Hojman S A 1992 *Phys.* A *Math. Gen.* **25** 291

[5] Mei F X 1999 *Application of Lie Groups and Lie Algebra to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李群代数约束力学系统的的应用 (北京: 科学出版社)]

[6] Mei F X 2000 *Beijing Inst. Technol.* **9** 120 (in Chinese) [梅凤翔 2000 北京理工大学学报 **9** 120]

[7] Cai J L, Mei F X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5369 (in Chinese) [蔡建乐, 梅凤翔 2008 物理学报 **57** 5369]

[8] Cai J L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1523

[9] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

[10] Cai J L, Luo S K, Mei F X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3170

[11] Chen X W, Zhao Y H, Liu C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5150 (in Chinese) [陈向炜, 赵永红, 刘畅 2009 物理学报 **58** 5150]

[12] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[13] Zhang Y 2009 *Chin. Phys.* B **18** 4636

[14] Cai J L 2010 *Chin. J. Phys.* **48** 728

[15] Zheng S W, Xie J F, Chen W C 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 809

[16] Wu H B, Mei F X 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030303

[17] Fang J H 2010 *Chin. Phys.* B **19** 040301

[18] Mei F X, Wu H B 2010 *Chin. Phys.* B **19** 050301

[19] Li Y C, Wang X M, Xia L L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2935 (in Chinese) [李元成, 王小明, 夏丽莉 2010 物理学报 **59** 2935]

[20] Jiang W A, Li Z J, Luo S K 2011 *Chin. Phys.* B **20** 030202

[21] Xie Y L, Jia L Q, Yang X F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030201 (in Chinese) [解银丽, 贾利群, 杨新芳 2011 物理学报 **60** 030201]

[22] Jia L Q, Sun X T, Zhang M L, Wang X X, Xie Y L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 084501 (in Chinese) [贾利群, 孙现亭, 张美玲, 王肖肖, 解银丽 2011 物理学报 **60** 084501]

[23] Jiang W A, Li L, Li Z J, Luo S K 2012 *Nonlinear Dynam.* **67** 075

[24] Jiang W A, Luo S K 2012 *Nonlinear Dynam.* **67** 475

[25] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[26] Li R J, Qiao Y F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰, 乔永芬, 孟军 2002 物理学报 **51** 1]

[27] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[28] Jia L Q, Xie J F, Zheng S W 2008 *Chin. Phys.* B **17** 17

A type of new conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in a holonomic system*

Sun Xian-Ting[1)] Han Yue-Lin[2)] Wang Xiao-Xiao[2)]
Zhang Mei-Ling[2)] Jia Li-Qun[2)†]

1) (*School of Electric and Information Engineering, Pingdingshan University, Pingdingshan* 467002*, China*)

2) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122*, China*)

(Received 14 February 2012; revised manuscript received 9 April 2012)

Abstract

A type of new conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in a holonomic system is investigated. Based on the definition and criterion of Mei symmetry for Appell equations in a holonomic system, a type of new structural equation and new conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in a holonomic system expressed by Appell function under the infinitesimal transformations of groups are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: Appell equation, Mei symmetry, new structural equation, new conserved quantity

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.20.Jj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11142014, 61178032).

† E-mail: jlq0000@163.com