

耦合电路系统的分岔研究*

李群宏[†] 闫玉龙 杨丹

(广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004)

(2012年2月17日收到; 2012年3月21日收到修改稿)

研究了由两个非线性电路系统耦合所构成的系统, 给出高维系统平衡点的存在性条件和具体解析形式, 分析了平衡点的余维 1 和余维 2 分岔, 并对极限环进行了延拓, 得到比较复杂分岔形式. 两个周期运动的子系统在不同的耦合参数下相互作用时, 可能导致周期运动、混沌等丰富的动力学行为, 通过对耦合前后平衡点的定性分析, 得到了在弱耦合情况下平衡点变为中立型鞍点与分岔图出现的不连续现象之间的联系.

关键词: 非线性电路, 耦合, 平衡点, 分岔

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

1 引言

耦合的非线性系统具有复杂的动力学行为, 而且这些系统在工程上也有十分广泛的应用^[1,2]. 对这类系统的研究具有重要的理论意义和实用价值. 在电路系统中也经常遇到非线性耦合的问题^[3], 目前的相关研究表明在非线性耦合电路中存在各种各样的动力学行为^[4], 如饱和现象、高维环面、超混沌等^[5-8], 体现出子系统间相互作用的复杂多样性^[9]. 由于系统动力学行为受耦合强度变化的影响^[10], 深入研究电路系统的分岔和混沌行为, 对于常用电路优化以及新功能电路的辅助设计具有十分重要的意义. 目前对于耦合系统的分析, 主要有降阶^[11]、理论分析和数值计算相结合^[12,13]等方法.

张晓芳等^[14]用数值方法研究了一类耦合电路系统的分岔和混沌行为, 但由于系统的复杂性, 没有对耦合系统的平衡点做完全的研究, 而系统平衡点的分布对系统的动力学行为有重要的影响. 本文首先获得了此高维系统(1)的所有平衡点的解析表达式, 并且得到了耦合系统的各平衡点存在区间, 这为下一步的动力学分析打下了良好的基础; 其次

对非线性耦合的电路系统进行深入的分岔研究, 揭示了平衡点分岔与系统动力学行为的内在联系; 最后取特定参数, 使得两个子系统为周期运动, 运用耦合前后平衡点定性分析和数值仿真相结合的方法, 对两个子系统在不同的耦合参数下相互作用进行研究, 得到了在弱耦合情况下平衡点变成为中立型鞍点与分岔图出现不连续现象之间的内在联系, 获得比以往文献更深入的结果.

本文讨论的是两个子系统所构成的非线性耦合电路系统(具体耦合电路图参见文献[14]). 该系统的无量纲形式的动力学方程如下:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= a\ddot{x} - \dot{x} + c(x - x^2) + \varepsilon(x - y), \\ \ddot{y} &= b\ddot{y} - \dot{y} - c(y - y^3) + \varepsilon(y - x),\end{aligned}\quad (1)$$

其中 a, b, c 分别表示耦合电路中的实际参数, 而 ε 表示子系统间的耦合强度.

本文首先分析该耦合系统的平衡点存在的条件, 接着对耦合电路进行分岔分析, 进而对平衡点和极限环进行分岔研究.

2 耦合系统的平衡点分析

当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}, x_4 = y,$

* 广西自然科学基金(批准号: 2010GXNSFA013110)和广西青年科学基金(批准号: 2011GXNSFB018060)资助的课题.

[†] E-mail: liqh@gxu.edu.cn

$x_5 = \dot{y}, x_6 = \ddot{y}$, 将电路耦合系统 (1) 变为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= ax_3 - x_2 + c(x_1 - x_1^2) + \varepsilon(x_1 - x_4), \\ \dot{x}_4 &= x_5, \\ \dot{x}_5 &= x_6, \\ \dot{x}_6 &= bx_6 - x_5 - c(x_4 - x_4^3) + \varepsilon(x_4 - x_1). \end{aligned} \quad (2)$$

因此, 系统 (2) 的平衡点可表示为 $(x_{10}, 0, 0, x_{40}, 0, 0)$, 其中 $x_{40} = x_{10} + \frac{c}{\varepsilon}(x_{10} - x_{10}^2)$. 系统 (2) 的平衡点可以由以下方程给出:

$$\frac{c}{\varepsilon}(x_{10} - x_{10}^2) - \left(x_{10} + \frac{c}{\varepsilon}(x_{10} - x_{10}^2)\right)^3 + x_{10}^2 = 0. \quad (3)$$

易知, 方程 (3) 有两个解 $x_{10} = 0$ 和 $x_{10} = 1$, 此系统余下的解由方程 (4) 决定:

$$\begin{aligned} &\beta^3 x_{10}^4 - \beta^2(3 + 2\beta)x_{10}^3 \\ &+ \beta(3 + 3\beta + \beta^2)x_{10}^2 - x_{10} - \beta = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\beta = \frac{c}{\varepsilon}$. 令

$$\begin{aligned} m_0 &= \beta^4(27 + 108\beta + 36\beta^2 \\ &+ 36\beta^3 + 18\beta^4 + 2\beta^5), \\ m_1 &= -27\beta^8(-27 + 40\beta - 312\beta^2 + 72\beta^3 \\ &- 112\beta^4 + 4\beta^5 + 4\beta^6), \\ m_2 &= \frac{(-3 - 2\beta)^2}{4\beta^2} - \frac{3 + 3\beta + \beta^2}{\beta^2} + \frac{3\beta + 3\beta^2 + \beta^3}{3\beta^3} \\ &+ \frac{2^{1/3}(12 + 3\beta + 6\beta^2 + \beta^3)}{3(\sqrt{m_1} + m_0)^{1/3}} + \frac{(\sqrt{m_1} + m_0)^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}\beta^3}, \\ m_3 &= \frac{(-3 - 2\beta)^2}{2\beta^2} - \frac{3 + 3\beta + \beta^2}{\beta^2} - \frac{3\beta + 3\beta^2 + \beta^3}{3\beta^3} \\ &- \frac{2^{1/3}(12 + 3\beta + 6\beta^2 + \beta^3)}{3(\sqrt{m_1} + m_0)^{1/3}} - \frac{(\sqrt{m_1} + m_0)^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}\beta^3}, \\ m_4 &= \frac{8}{\beta^3} - \frac{(-3 - 2\beta)^3}{\beta^3} + \frac{4(-3 - 2\beta)(3 + 3\beta + \beta^2)}{\beta^3}, \end{aligned} \quad (5)$$

于是, 方程 (4) 有如下 4 个解:

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\sqrt{m_2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{m_3 - \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}}} - \frac{-3 - 2\beta}{4\beta}, \\ q_2 &= -\frac{\sqrt{m_2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m_3 - \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}}} - \frac{-3 - 2\beta}{4\beta}, \\ q_3 &= \frac{\sqrt{m_2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{m_3 + \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}}} - \frac{-3 - 2\beta}{4\beta}, \end{aligned}$$

$$q_4 = \frac{\sqrt{m_2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m_3 + \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}}} - \frac{-3 - 2\beta}{4\beta}. \quad (6)$$

根据以上结果可以得到定理 1.

定理 1 若方程 (4) 满足 1) $\beta \neq 0$; 2) $m_1 \geq 0$; 3) $\sqrt{m_1} + m_0 \neq 0$; 4) $m_2 > 0$; 则当 $m_3 - \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}} \geq 0$, $m_3 + \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}} < 0$ 或 $m_3 + \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}} \geq 0$, $m_3 - \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}} < 0$ 时有两个实数解, 当 $m_3 \pm \frac{m_4}{4\sqrt{m_2}} \geq 0$ 时有四个实数解 (这里重根算重数).

下面考察函数 $m_1 = m_1(\beta)$, $m_2 = m_2(\beta)$, $m_3(\beta) - \frac{m_4(\beta)}{4\sqrt{m_2(\beta)}}$ 和 $m_3(\beta) + \frac{m_4(\beta)}{4\sqrt{m_2(\beta)}}$ 的特性.

1) $m_1 = m_1(\beta)$ 的图形如图 1 所示. 由图 1 可知, 当 $\beta \in (0, 4.75)$ 和 $\beta \in (-6.25, 0)$ 时, $m_1 > 0$.

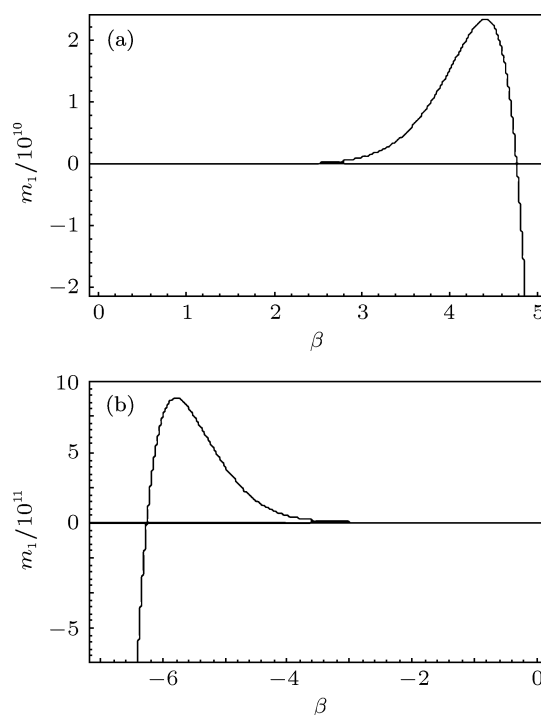


图 1 $m_1 = m_1(\beta)$ 的图形 (a) $\beta > 0$; (b) $\beta < 0$

2) $m_2 = m_2(\beta)$ 的图形如图 2 所示. 由图 2 可知, 当 $\beta \in (0, 4.75)$ 和 $\beta \in (-6.25, 0)$ 时, $m_2 \geq 0$.

3) $\mu(\beta) \equiv m_3(\beta) - \frac{m_4(\beta)}{4\sqrt{m_2(\beta)}}$ 的图形如图 3 所示. 由图 3 可知, 当 $\beta \in (0, 4.75)$ 和 $\beta \in (-6.25, -0.17)$ 时, $m_3(\beta) - \frac{m_4(\beta)}{4\sqrt{m_2(\beta)}} \geq 0$.

4) $\rho(\beta) \equiv m_3(\beta) + \frac{m_4(\beta)}{4\sqrt{m_2(\beta)}}$ 的图形如图 4 所示. 由图 4 可知, 当 $\beta \in (-0.17, 0)$ 时, $m_3(\beta) + \frac{m_4(\beta)}{4\sqrt{m_2(\beta)}} \geq 0$.

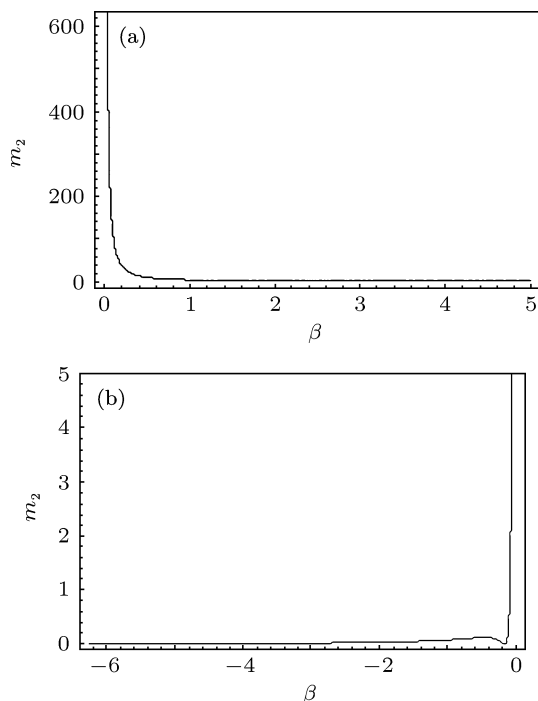


图2 $m_2 = m_2(\beta)$ 的图形 (a) $\beta > 0$; (b) $\beta < 0$

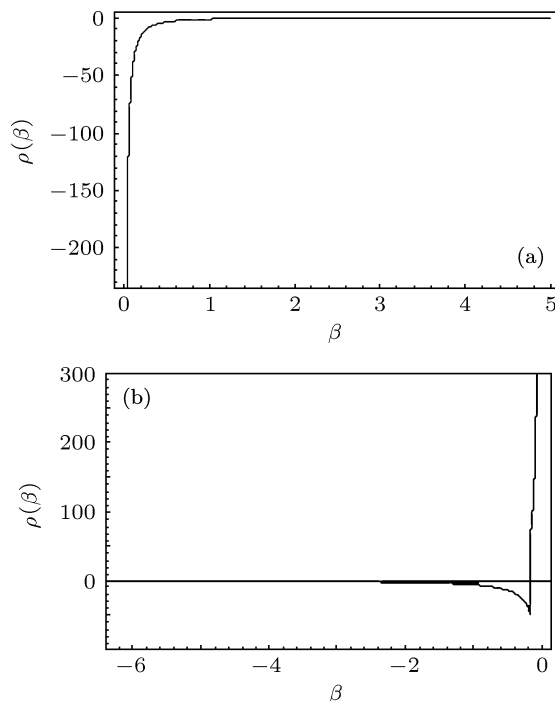


图4 $m_3(\beta) + \frac{m_4(\beta)}{4\sqrt{m_2(\beta)}}$ 的图形 (a) $\beta > 0$; (b) $\beta < 0$

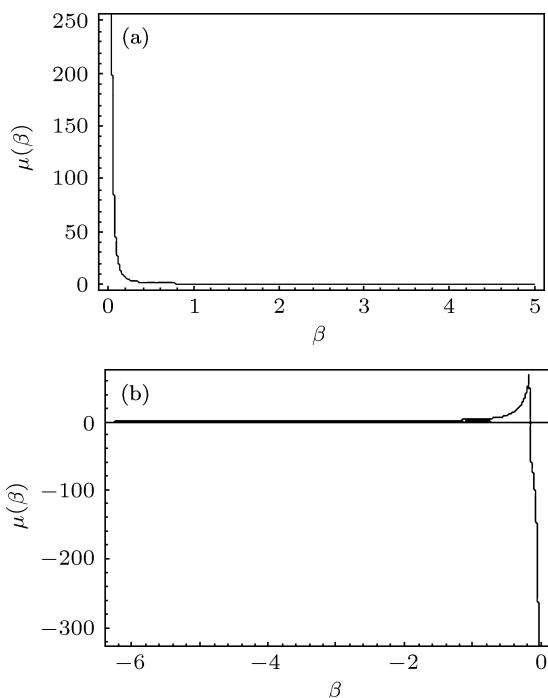


图3 $m_3(\beta) - \frac{m_4(\beta)}{4\sqrt{m_2(\beta)}}$ 的图形 (a) $\beta > 0$; (b) $\beta < 0$

结合定理 1 和以上数值仿真可得如下结论.

命题 1 当 $\beta \in (-6.25, -0.17) \cup (0, 4.75)$ 时, 方程 (4) 有两个实解 q_1, q_2 ; 当 $\beta \in (-0.17, 0)$ 时, 方程 (4) 有两个实解 q_3, q_4 .

3 耦合系统的分岔分析

在下面分岔的数值研究中, 取参数如下: $a = -1.1, b = -2, c = 1, \varepsilon$ 作为分岔参数. 由命题 1 可得如下推论.

推论 1 当 $\varepsilon \in (-5.88, -0.16) \cup (0.21, +\infty)$ 时, 方程 (4) 有两个实解 q_1, q_2 ; 当 $\varepsilon \in (-\infty, -5.88)$ 时, 方程 (4) 有两个实解 q_3, q_4 .

3.1 平衡点的分岔

平衡点 $U_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 从 $\varepsilon = 0.4$ 开始延拓, 在 $\varepsilon = 1.8720$ 时出现中立型鞍点 (neutral saddle, 即该点处存在一对大小相等、方向相反的实特征值), 在 $\varepsilon = -0.6774$ 时发生 Hopf 分岔 (H), 其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -0.0667$ (如图 5(a) 所示).

平衡点 $U_2 = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$ 从 $\varepsilon = 0.4$ 开始延拓, 在 $\varepsilon = 0.4883$ 时出现中立型鞍点, 在 $\varepsilon = 2$ 时出现分支 (BP) 平衡点, 在 $\varepsilon = -0.0976$ 时发生 Hopf 分岔, 其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -0.2414$ (如图 5(b) 所示).

当 $\varepsilon = -0.4$ 时, 存在平衡点 $U_3 = (-0.4668, 0, 0, 1.2450, 0, 0)$, 对该点进行延拓得到一条平衡点曲线, 在 $\varepsilon = 2$ 时出现 BP 平衡

点 $U_2 = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$, 当 $\varepsilon = 6.5372$ 时发生 Hopf 分岔, 其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -0.0898$ (如图 6(a) 所示).

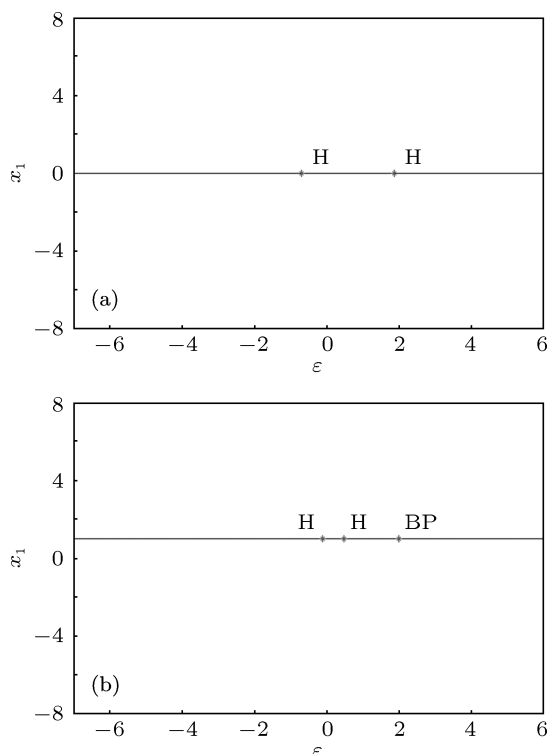


图 5 分岔图 (a) 平衡点 U_1 的分岔图; (b) 平衡点 U_2 的分岔图

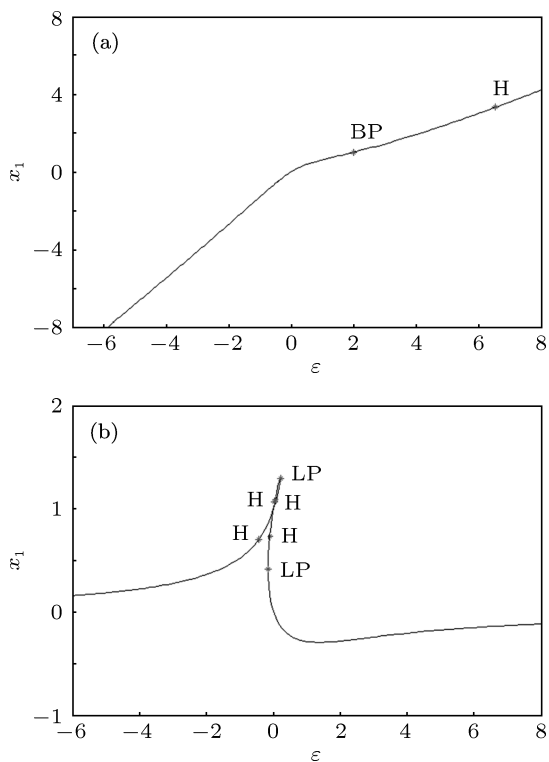


图 6 分岔图 (a) 平衡点 U_3 的分岔图; (b) 平衡点 U_4 的分岔图

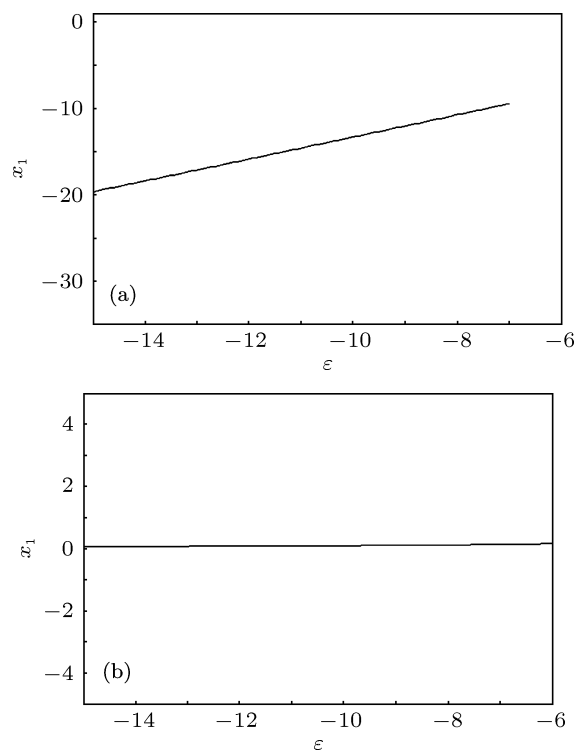


图 7 分岔图 (a) 平衡点 U_5 的分岔图; (b) 平衡点 U_6 的分岔图

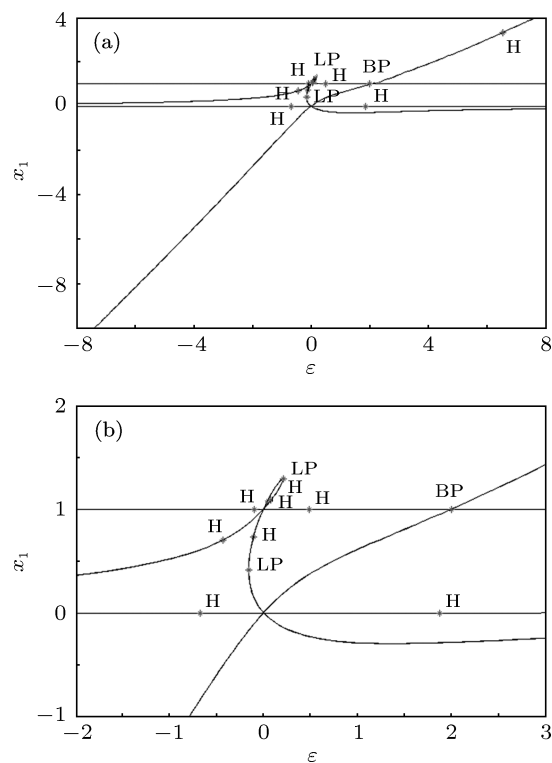


图 8 所有平衡点曲线及分岔图 (a) 大范围分岔图; (b) 局部放大分岔图

当 $\varepsilon = -0.4$ 时, 平衡点 $U_4 = (0.7181, 0, 0, 0.2120, 0, 0)$, 对该点进行延拓得到一条平衡点

曲线. 当 $\varepsilon = 0.0801$ 时发生 Hopf 分岔, 其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -0.2418$, 当 $\varepsilon = 0.2094$ 时发生极限点 (LP) 分岔, 当 $\varepsilon = 0.0356$ 时发生 Hopf 分岔, 其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -0.2422$, 在 $\varepsilon = -0.1074$ 时出现中立型鞍点, 当 $\varepsilon = -0.1598$ 时发生 LP 分岔, 当 $\varepsilon = -0.4322$ 发生 Hopf 分岔, 其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -0.1575$ (如图 6(b)所示).

当 $\varepsilon = -7$ 时, 平衡点 $U_5 = (-9.4739, 0, 0, 4.7016, 0, 0)$, 对该点进行延拓得到一条平衡点曲线, 在所研究的平衡点区间内不发生分岔 (如图 7(a)所示).

当 $\varepsilon = -7$ 时, 平衡点 $U_6 = (0.1359, 0, 0, 0.1191, 0, 0)$, 对该点进行延拓得到一条平衡点曲线, 在所研究的平衡点区间内不发生分岔 (如图 7(b)所示).

由图 5—7 可以画出 $U_1—U_6$ 所有的平衡点的分岔图 (如图 8 所示).

3.2 极限环的分岔

由图 5(a) 可知, 平衡点 $U_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 在 $\varepsilon = -0.6774$ 时发生 Hopf 分岔, 且其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -0.0667$. 下面讨论在 U_1 处经 Hopf 分岔产生的极限环随参数 ε 变化而发生的分岔. 由图 9 知, 当 $\varepsilon = -0.7411$ 时发生环的极限点 (LPC) 分岔 (图 9(a), 即两个环相遇然后消失), 当 $\varepsilon = -0.7243$ 时发生 Neimark-Sacker (NS) 分岔 (图 9(b), 即出现一对模为 1 的共轭复特征乘子), 当 $\varepsilon = -0.6506$ 时发生 period doubling (PD) 分岔 (图 9(c)), 当 $\varepsilon = -0.5670$ 时又发生了 PD 分岔 (图 9(d)).

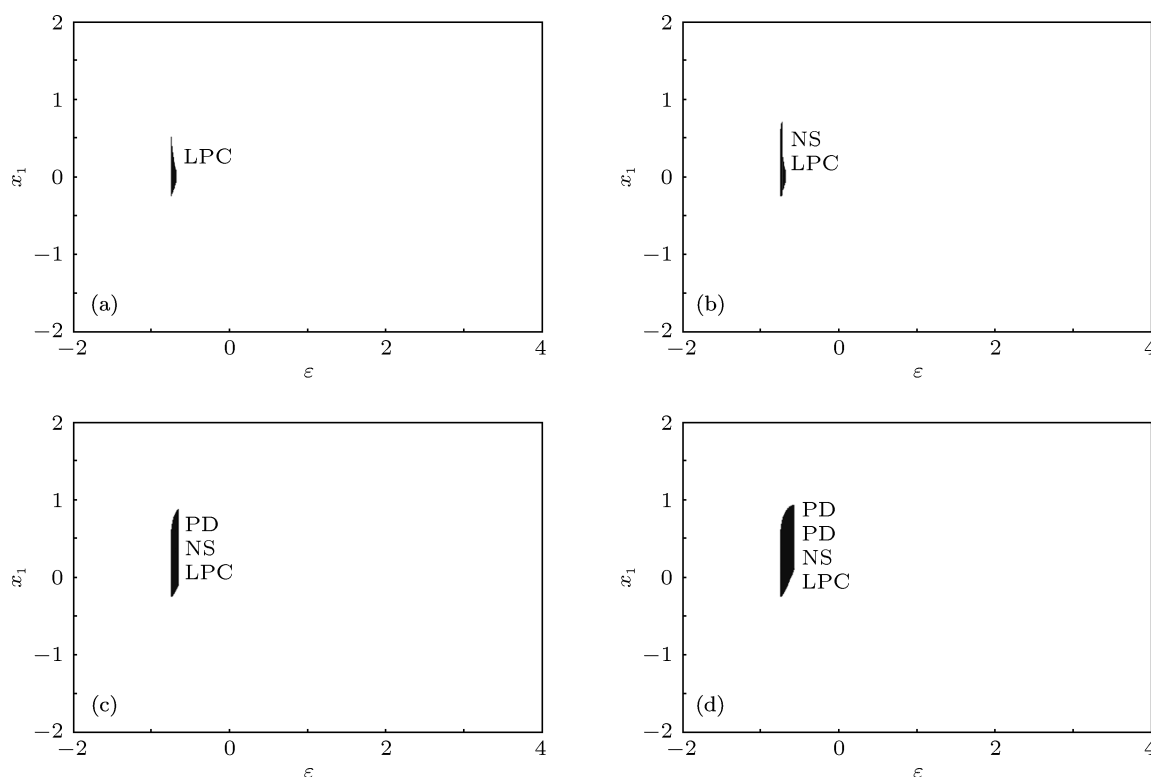


图 9 极限环分岔 (a) LPC 分岔; (b) NS 分岔; (c) PD 分岔; (d) PD 分岔

3.3 LP 分岔的延拓

由图 8(b) 可知, 当 $\varepsilon = 0.2094$ 时, 在平衡点 $(1.2910, 0, 0, -0.5027, 0, 0)$ 处发生 LP 分岔, 取此 LP 分岔点进行延拓, 得到在 (ε, b) 参数平面上的 LP 分岔曲线及分岔图 (图 10(a)). 从图 10(a) 可见, 当 $(\varepsilon, b) = (0.2094, 0.1290)$

时, 在 $(1.2910, 0, 0, -0.5029, 0, 0)$ 处发生余维 2 的 Fold-Hopf 分岔 (用 ZH 标记, 即此点处具有一个零特征值和一对纯虚特征值).

当 $\varepsilon = -0.1598$ 时, 在平衡点 $U = (0.4151, 0, 0, -1.1045, 0, 0)$ 处发生 LP 分岔, 取此 LP 分岔点进行延拓, 得到在 (ε, a) 参数平面上的 LP 分岔曲线及分岔图 (图 10(b)). 从图 10(b) 可

见, 当 $(\varepsilon, a) = (-0.1598, -2.0582)$ 时, 点 U 为零中立型鞍点 (zero-neutral saddle 点, 用 ZH 标记, 即具有一个零特征值的 neutral saddle 平衡点). 当 $(\varepsilon, a) = (-0.1598, 0.0045)$ 时, 在点 U 处发生余维 2 的 Fold-Hopf 分岔.

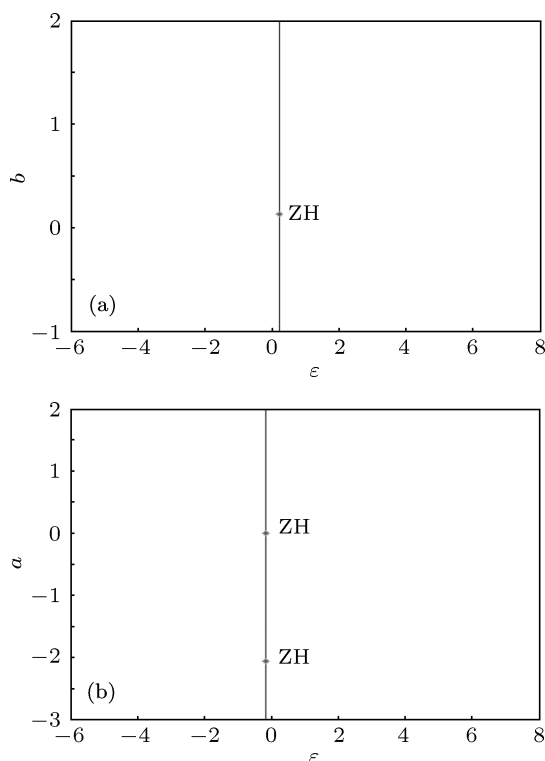


图 10 双参数分岔图 (a) 在 (ε, b) 参数平面上的 LP 分岔曲线及分岔图; (b) 在 (ε, a) 参数平面上的 LP 分岔曲线及分岔图

4 周期运动的弱耦合作用分析

取参数 $a = -0.8, b = -0.4, c = 1, \varepsilon$ 作为分岔参数. 根据推论 1 可知, 在 $\varepsilon \in (-0.10, 0.10)$, 即 $\varepsilon = 0$ 附近, 耦合系统 (2) 只有两个平衡点 $U_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 和 $U_2 = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$, 下面对这两个平衡点进行分析.

4.1 平衡点的延拓

平衡点 U_1 从 $\varepsilon = -5.0$ 开始延拓, 在 $\varepsilon = 0.2620$ 时出现中立型鞍点; 在 $\varepsilon = 0.9$ 时发生 Hopf 分岔, 其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -0.5076$. 平衡点 U_2 从 $\varepsilon = -5.0$ 开始延拓, 在 $\varepsilon = -0.0024$ 时出现中立型鞍点; 在 $\varepsilon = 0.2181$ 时发生 Hopf 分岔, 其第一 Lyapunov 系数 $l_1 = -1.3913$; 在 $\varepsilon = 2.0$ 时出现 BP 平衡点 (如图 11 所示).

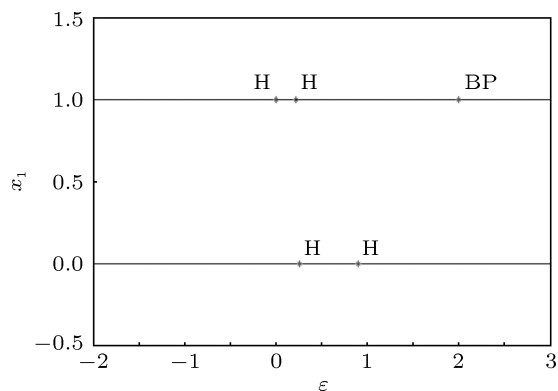


图 11 平衡点 U_1 和 U_2 的分岔图

4.2 耦合前的子系统

在 $\varepsilon = 0$ 时即不耦合的情况下, 对应的两个子系统 a, b 均为周期运动, 两个子系统分别对应于 x_1-x_2, x_4-x_5 相平面的投影如图 12(a), (b) 所示.

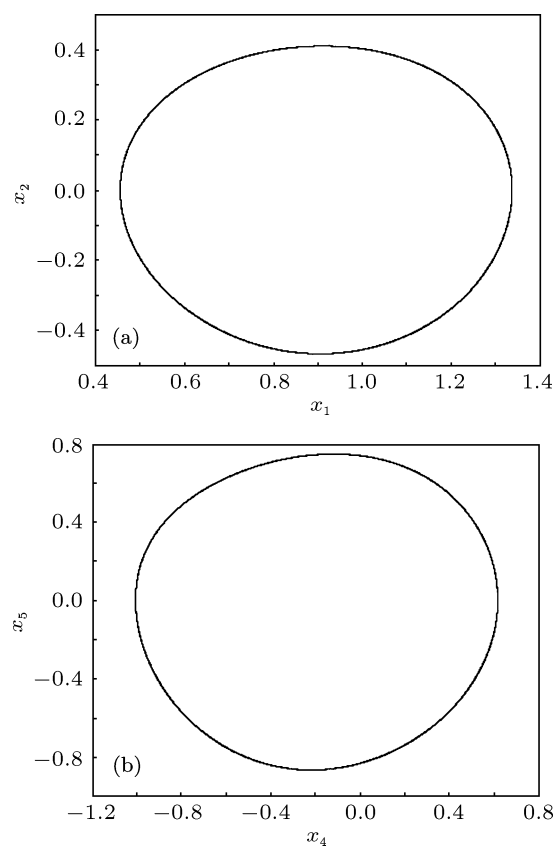


图 12 相平面图 (a) 子系统 a 在 x_1-x_2 相平面的投影; (b) 子系统 b 在 x_4-x_5 相平面的投影

下面对子系统 a 进行分析, 系统的平衡点为: $A_1(0, 0, 0)$ 和 $A_2(1, 0, 0)$. 在 A_1 和 A_2 处的 Jacobi

矩阵 M_1 和 M_2 分别为

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -0.8 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -0.8 \end{pmatrix}.$$

M_1 特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^3 + 0.8\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, 特征值为 $0.5647, -0.6827 \pm 1.1424i$; M_2 特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^3 + 0.8\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, 特征值为 $-0.9095, 0.05473 \pm 1.0472i$.

下面对子系统 b 进行分析, 系统的三个平衡点为: $A_3(0, 0, 0)$, $A_4(1, 0, 0)$ 和 $A_5(-1, 0, 0)$. 在 A_3 处的 Jacobi 矩阵 M_3 为

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -0.4 \end{pmatrix},$$

特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^3 + 0.4\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, 特征值为 $-0.7749, 0.1874 \pm 1.1204i$.

在 A_4 和 A_5 处的 Jacobi 矩阵相同, 均为

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -0.4 \end{pmatrix},$$

特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^3 + 0.4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征值为 $0.9112, -0.6556 \pm 1.3285i$.

由以上分析可得, 两个子系统不出现实部为 0 的特征值, 则这些平衡点均为双曲平衡点, 因此这些平衡点都是结构稳定的, 在小的扰动下不具有分岔行为, 由于这些平衡点存在实部为正的 eigenvalue, 则这些平衡点都是不稳定的. 下面对耦合系统的情况进行研究.

4.3 耦合后的系统研究

当考虑 $\varepsilon \in (-0.10, 0.10)$ 时, 耦合后的子系统只存在两个平衡点, 下面对两个平衡点 U_1 和 U_2 进

行研究, 在 U_1 和 U_2 的 Jacobi 矩阵 M_5 和 M_6 为

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \varepsilon & -1 & -0.8 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & -1 + \varepsilon & -1 & -0.4 \end{pmatrix},$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 + \varepsilon & -1 & -0.8 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 2 + \varepsilon & -1 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

矩阵 M_5 特征方程为

$$f(\lambda) = 25\lambda^6 + 30\lambda^5 + 58\lambda^4 + 30\lambda^3 + (10\varepsilon + 35)\lambda^2 - (50\varepsilon^2 + 50\varepsilon + 25) = 0. \quad (7)$$

由于该方程为含参数 ε 的 6 次方程, 因此, 无法解析地求出该方程的表达式. 下面对 $\varepsilon \in (-0.10, 0.10)$ 采用数值方法求解, 对于不同的参数可得到对应方程一对实特征值和两对复特征值. 这些特征值实部的最大值为 $\lambda_{\max} \in (0.5307, 0.6005)$, 且随着 ε 单调增加.

同理, 对矩阵 M_6 采用相同的方法, 得出其特征方程为

$$f(\lambda) = 25\lambda^6 + 30\lambda^5 + 58\lambda^4 + (30 - 50\varepsilon)\lambda^3 + (-30\varepsilon + 35)\lambda^2 - 50\varepsilon\lambda - 25 = 0, \quad (8)$$

通过数值方法求解其特征值的实部的最大值为 λ_{\max} , 则该特征值 $\lambda_{\max} \in (0.8879, 0.9352)$ 也随着 ε 单调增加, 则在 $\varepsilon \in (-0.10, 0.10)$ 范围内平衡点 U_1 和 U_2 均为不稳定的.

为了进一步研究 $\varepsilon \in (-0.10, 0.10)$ 时系统的全局动力学行为, 进行数值仿真. 取超平面 $\Pi : \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) | x_5 = 0\}$ 为 Poincare 截面, 通过取超平面上一点, 在系统流的作用下再次到达截面上, 从而建立 Poincare 映射 $P : \Pi \rightarrow \Pi$, 如图 13(a) 为通过数值仿真的方法得到映射 P 的分岔图, 其中分岔参数为 ε .

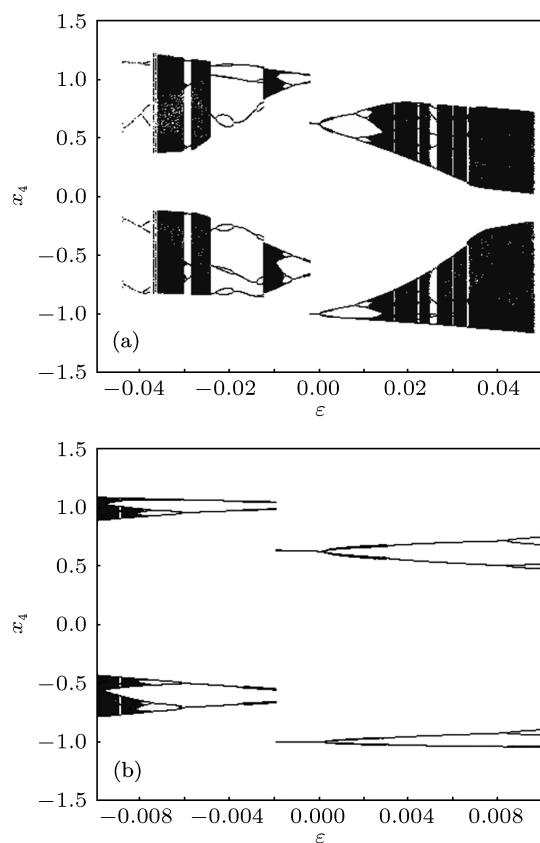


图 13 分岔图 (a) 耦合电路的分岔图; (b) 局部放大图

由数值仿真的结果可知当 $\varepsilon \in (-0.05, 0.05)$ 时, 系统可能存在周期运动和混沌运动. 由平衡点延拓的信息可知, 平衡点 U_2 在 $\varepsilon = -0.002427$ 时出现中立型鞍点, 即通过求解对应参数值的矩阵 M_6 特征值, 可得到该矩阵的一对大小相等、方向相反的特征值 $\lambda = \pm 0.9107$. 为了进一步研究该参数值附近的动力学行为, 对该点附近的分岔图进行放大, 由图 13(b) 可知, 在该参数值附近随着 ε 的减小, 会

出现由周期二变为周期四的周期运动, 且出现了分岔图的不连续现象, 即分岔曲线的跳跃, 这表明中立型鞍点的出现导致分岔图的不连续性. 随着 ε 的继续减小或者增大, 均会出现周期加倍级联现象从而导致混沌运动. 这种跳跃现象对应于电路中的相关变量发生剧烈变化, 因此在电路设计时应该根据实际情况对参数值进行调整, 避免该种现象的出现.

当 $\varepsilon \in (-0.1, -0.05) \cup (0.05, 0.1)$ 时不存在周期运动和混沌运动. 在较强的耦合强度下, 子系统间的耦合效应逐渐明显, 从而导致混沌吸引子和周期吸引子结构失稳, 使得系统的轨线最终发散.

5 结论

本文主要讨论了由两个子电路系统耦合所构成的系统, 并深入研究了该耦合系统平衡点的几何结构. 在对耦合电路系统的研究中, 大部分的分岔研究仅局限在余维 1 的分岔范围内. 本文在研究系统余维 1 分岔的基础上, 对平衡点的余维 2 分岔也进行了相应的分析, 并讨论了极限环的分岔, 得到比较复杂的分岔现象. 在取定的参数下, 两个周期运动的子系统在不同的耦合参数下相互作用时, 会导致周期运动、混沌等丰富的动力学行为. 本文通过对耦合前后系统的平衡点进行研究, 发现了耦合后系统的平衡点 U_2 在变为中立型鞍点时, 在对应的参数值附近分岔图出现了明显的跳跃现象, 从而揭示了平衡点分岔与分岔图的不连续现象之间存在着联系. 本文的分析有助于加深对耦合系统动力学行为的了解, 同时对该系统的设计和控制也具有指导意义.

- [1] Rand R H, Holmes P J 1980 *Int. J. Nonlin. Mech.* **15** 387
 [2] Maccari A 2001 *Int. J. Nonlin. Mech.* **36** 335
 [3] Soto M S, Tischendorf C 2005 *Appl. Numer. Math.* **53** 471
 [4] Rasmussen J, Mosekilde E, Reick C 1996 *Math. Comput. Simu.* **40** 247
 [5] Rogister F, Pieroux D, Sciamanna M, Mégard P, Blondel M 2002 *Opt. Commun.* **207** 295
 [6] Wen G L, Xu D L 2004 *Phys. Lett. A* **321** 24
 [7] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁, 刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]
 [8] Bi Q S 2004 *Int. J. Nonlin. Mech.* **39** 33
 [9] Bi Q S 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 337
 [10] Chen Z Y, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7669 (in Chinese) [陈章耀, 毕勤胜 2010 物理学报 **59** 7669]
 [11] Liu Y Q, Xu P 2008 *Control Theory Appl.* **25** 139 (in Chinese) [刘永强, 徐鹏 2008 控制理论与应用 **25** 139]
 [12] Chen L L, Zhao J P, Chen H L 2003 *Chin. J. Appl. Mech.* **20** 70 (in Chinese) [陈玲莉, 赵建平, 陈花玲 2003 应用力学学报 **20** 70]
 [13] Li Q H, Xi J Z, Hua C C 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 769
 [14] Zhang X F, Chen Z Y, Bi Q S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2963 (in Chinese) [张晓芳, 陈章耀, 毕勤胜 2009 物理学报 **58** 2963]

Bifurcations in coupled electrical circuit systems*

Li Qun-Hong[†] Yan Yu-Long Yang Dan

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

(Received 17 February 2012; revised manuscript received 21 March 2012)

Abstract

A coupled system composed of two nonlinear circuit systems is investigated. In this paper, the existence condition and the analytical expressions of equilibrium in higher-dimensional system are derived, and the co-dimension 1 and co-dimension 2 bifurcations of equilibrium are also studied. Furthermore, the complicated bifurcations are obtained through the continuation of limit cycles. It may lead to various dynamical behaviors such as periodic motion, chaos, etc., for the interaction of two subsystems with periodic motions under different coupling parameters. Using the qualitative analysis of equilibrium before and after coupling, the relation between the discontinuity of bifurcation diagram and occurrence of neutral saddle in the case of weak coupling is presented.

Keywords: nonlinear circuit, coupling, equilibrium, bifurcation

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

* Project supported by the Guangxi Natural Science Foundation, China (Grant No. 2010GXNSFA013110) and the Guangxi Youth Science Foundation, China (Grant No. 2011GXNSFB018060).

[†] E-mail: liqh@gxu.edu.cn