具有一般广义阻尼力和强迫周期力的相对转动非线性动力学模型的周期解*

李晓静† 陈绚青

(江苏技术师范学院数理学院, 常州 213001)

(2012 年 4 月 18 日收到; 2012 年 5 月 15 日收到修改稿)

研究了一类具有一般广义阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力学模型的周期解问题. 讨论了对应自治系统的周期解问题. 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该模型的周期解存在惟一性结果, 推广了已有的结果, 并且列举了具体的例子来说明结果的新颖性.

关键词: 相对转动, 非线性动力系统, 周期解, 存在惟一性

PACS: 02.30.Hq

1 引 言

在研究转动运动和转动力学过程中, 1985 和 1986 年, Carmeli[1,2] 建立了转动相对论力学理论. 1996, 1998 年 Luo[3,4] 建立转动相对论分析力学理论. 此后, 许多学者致力于研究转动相对论理论, 在 Birkhoff 系统动力学基本理论、几何理论及稳定性等研究领域取得了成果 [5−14]. 文献 [15—21] 基于相对性原理, 建立了圆柱体任意两个横截面间的相对转动动力学模型, 并对系统进行了定性与定量分析. 文献 [22] 在阻尼力项为齐次多项式的条件下, 研究了如下一类具有强迫周期力项的相对转动非线性动力学系统

$$\ddot{x}+\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\dot{x}^{2k+1}+bx=F(t) \tag{1}$$

的周期解问题, 其中 $x=\theta_2-\theta_1$ 为相对转角, 这里 θ_1, θ_2 分别为弹性转轴两端面的转角, $F(t)=\dfrac{6}{J}(T_2-T_1)$, 这里 J 为弹性转轴的转动惯量, T_1, T_2 分别为弹性转轴两端面的外加力矩, 且设 $F(t)$ 是圆频率为 ω 的连续周期函数, 而系数 $b>0, a_1>0, a_{2k+1}\geqslant 0$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 研究者应用 Yoshizawa 关于非线性系统周期解的理论, 证明了系统周期解的存在性、惟一性和有界性. 文献 [23] 通过同伦映射方法得到了模型 (1) 的近似解.

相对转动非线性动力学系统具有复杂的动力行为, 故本文在上述工作的基础上, 首先建立了如下一类具有一般广义阻尼力的相对转动系统非线性动力学系统:

$$x''+K_1f(x')+K_2x=F(t), \tag{2}$$

其中 $f(x')$ 为相对转速 x' 的任意函数, $F(t)$ 为外干扰力或称为外激励, 然后针对具有周期性载荷的二端面相对转动系统的非线性动力学方程, 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该方程周期解的存在性、有界性和惟一性结果. 显然方程 (1) 是方程 (2) 的特殊情形, 故本文推广了文献 [22] 的结论. 笔者曾用这种方法成功地解决了一些非线性问题的周期解问题 [24−28].

2 动力学模型

我们设 J 为圆柱体任意两个横截面间的转动

* 国家自然科学基金 (批准号: 11071205, 11101349) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK2011042) 资助的课题.

† E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn

惯量, K 为扭转刚度, θ_1 和 θ_2 分别为两个横截面的转角, T_1 和 T_2 分别为两个横截面的外加力矩. 如果在文献 [15] 中, 取阻尼力 (阻尼力矩) 为

$$T_1^{\mathrm{c}} = -f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \tag{3}$$

$$T_2^{\mathrm{c}} = f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \tag{4}$$

其中 $f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ 为相对转速差的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}(T_i^{(a)} - I_i\ddot{\theta}_i)\delta\theta_i = 0, \tag{5}$$

其中 $T_i^{(a)} = T_i + T_i^{\mathrm{c}}$, 则 (5) 式的第一项为

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^{(a)}\delta\theta_i = \sum_{a=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i^{(a)}\frac{\partial\theta_i}{\partial q_r}\right)\delta q_r, \tag{6}$$

其中 $q_r(r=1,2)$ 为广义坐标, n 为自由度数目, s 为作用下数目. 广义力 (广义力矩) 为

$$Q_r = \sum_{i=1}^{n} T_i^{(a)}\frac{\partial\theta_i}{\partial q_r}\delta q_r \quad (r=1,2). \tag{7}$$

将 (3) 和 (4) 式代入 (7) 式后得本系统的广义力 (广义力矩) 为

$$\begin{aligned} Q_1 =& (T_1 + T_1^{\mathrm{c}})\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_1} + (T_2 + T_2^{\mathrm{c}})\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_2} \\ =& T_1 + T_1^{\mathrm{c}} = T_1 - f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Q_1 =& (T_1 + T_1^{\mathrm{c}})\frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1} + (T_2 + T_2^{\mathrm{c}})\frac{\partial\theta_2}{\partial\theta_2} \\ =& T_2 + T_2^{\mathrm{c}} = T_2 + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2). \end{aligned} \tag{9}$$

将 (8) 和 (9) 式代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial E}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r \quad (r=1,2)$$

得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}J\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6}J\ddot{\theta}_2 + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(\theta_1 - \theta_2) \\ =& T_1, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}J\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}J\ddot{\theta}_2 - f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K(\theta_1 - \theta_2) \\ =& T_2. \end{aligned} \tag{11}$$

在工程中最关心相对转角的变化, 故将 (10) 式减去 (11) 式得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}J(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + 2f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + 2K(\theta_1 - \theta_2) \\ =& T_1 - T_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 + \frac{12}{J}f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{12K}{J}(\theta_1 - \theta_2) \\ =& \frac{6}{J}(T_1 - T_2), \end{aligned}$$

在上式中, 令 $x = \theta_1 - \theta_2$, $K_1 = \dfrac{12}{J}$, $K_2 = \dfrac{12K}{J}$, $F(t) = \dfrac{6}{J}(T_1 - T_2)$, 我们就得到了方程 (2), 即

$$x'' + K_1 f(x') + K_2 x = F(t).$$

在工程中, 设备的启动、制动、停机以及运转中的不稳定都可能造成设备的损坏和性能的降低, 而 (2) 式是描述二端面转轴相对转动的非线性动力学方程, 正是解决运转过渡过程的理论基础. 本文针对具有周期性载荷的二端面相对转动系统的非线性动力学方程, 即我们假定 (2) 式中的 $F(t)$ 为连续且以 ω 为周期的函数, 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该方程周期解的惟一性结果.

为了行文方便, 我们假定 $\int_0^{\omega} F(t)\mathrm{d}t = 0$, 并取如下记号: $X = \{x | x \in C(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$, 其模为 $|\varphi|_0 = \max\limits_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)|, \forall\varphi \in X$ 和 $Y = \{x | x \in C^1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$, 其模为 $\|\varphi\| = \max\{|\varphi|_0, |\varphi'|_0\}, \forall\varphi \in Y$. 显然 X 和 Y 是两个 Banach 空间. 同时定义算子

$$L : D(L) \subset X \longrightarrow Y, Lx = x'' \tag{12}$$

和 $N : X \longrightarrow Y$,

$$[Nx](t) = -K_1 f(x') - K_2 x + F(t), \forall t \in \boldsymbol{R}, \tag{13}$$

其中 $D(L) = \{x | x \in C^2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$. 易见 $\mathrm{Ker}(L) = \boldsymbol{R}, \mathrm{Im}(L) = \{x | x \in Y, \int_0^{\omega} x(s)\mathrm{d}s\}$, 因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子 [29]. 再定义投影算子:

$$P : X \to \mathrm{Ker}L,\ Px = x(0),$$

$$Q : Y \to \mathrm{Im}Q,\ Qy = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} y(s)\mathrm{d}s,$$

那么 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L$. 令 $L_P = L|_{\mathrm{Ker}}P \cap D(L) : \mathrm{Ker}P \cap D(L) \longrightarrow \mathrm{Im}L$, 定义 $L_p^{-1} : \mathrm{Im}L \longrightarrow \mathrm{Ker}P \cap D(L)$ 为算子 L_P 的逆算子. 由数学分析的知识和周期函数的性质可知

$$\begin{aligned} [L_p^{-1}y](t) =& -\frac{t}{\omega}\int_0^{\omega}(\omega - s)y(s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^{t}(t-s)y(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{14}$$

从 (13) 和 (14) 式可知, N 在 $\bar{\Omega}$ 是 L-紧的, 这里 Ω 是 X 中的任意有界开集.

3 对应自治系统的周期解问题

取系统 (2) 的对应自治系统

$$x''+K_1f(x')+K_2x=0, \tag{15}$$

当 f 为严格单调增或严格单调减函数时, 系统 (15) 无闭轨 [30], 即方程 (15) 不存在周期解.

4 系统周期解的存在性结果

定理 1 在系统 (2) 中, 如果 $f(0)=0, |K_2|\omega^2 < 4$, 则系统 (2) 至少存在一个 ω-周期解.

证明 考虑方程 $Lx=\lambda Nx, \lambda\in(0,1)$, 其中 L 和 N 分别由 (12) 和 (13) 式所定义. 如果 $x(t)$ 是算子方程 $Lx=\lambda Nx, \lambda\in(0,1)$ 的任一解, 则

$$x''+\lambda K_1f(x')+\lambda K_2x=\lambda F(t). \tag{16}$$

将方程 (16) 两边同乘以 $x''(t)$, 然后从 0 到 ω 积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^\omega |x''(t)|^2\mathrm{d}t =&\lambda K_2\int_0^\omega |x'(t)|^2\mathrm{d}t\\ &+\lambda\int_0^\omega F(t)x''(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{17}$$

由文献 [31] 的引理 2.1, 我们知道

$$|x'|_0\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\omega |x''(t)|\mathrm{d}t. \tag{18}$$

结合 (17) 式 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}\int_0^\omega |x''(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant&\frac{|K_2|\omega^2}{4}\int_0^\omega |x''(t)|^2\mathrm{d}t\\ &+|F|_0\sqrt{\omega}\left(\int_0^\omega |x''(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2},\end{aligned}$$

结合条件 $|K_2|\omega^2<4$ 可知存在 $M_1>0$, 使得

$$\int_0^\omega |x''(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant M_1.$$

由 (18) 式, 我们有 $|x'|_0\leqslant\dfrac{\sqrt{\omega}}{2}\left(\displaystyle\int_0^\omega |x''(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$, 从而存在 $M_2>0$, 使得

$$|x'|_0\leqslant M_2. \tag{19}$$

对方程 (16) 两边从 0 到 ω 积分可得 $\displaystyle\int_0^\omega K_1f(x'(t))+K_2x(t)=0$, 由积分中值定理得, 存在 $\xi\in[0,\omega]$, 使得 $K_1f(x'(\xi))+K_2x(\xi)=0$, 即 $x(\xi)=-\dfrac{K_1}{K_2}f(x'(\xi))$, 令 $\xi=m\omega+\bar{\xi}$, 其中 $\bar{\xi}\in[0,\omega]$, m 是一个整数, 则对 $t\in[\bar{\xi},\bar{\xi}+\omega]$ 有

$$\begin{aligned}|x(t)| =&\left|x(\bar{\xi})+\int_{\bar{\xi}}^t x'(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant|x(\bar{\xi})|+\int_0^\omega |x'(t)|\mathrm{d}t\\ &\leqslant\left|-\frac{K_1}{K_2}f(x'(\xi))\right|+\int_0^\omega |x'(t)|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

结合 (19) 式有

$$|x|_0\leqslant\left|\frac{K_1}{K_2}\right|f_{M_2}+\omega M_2:=M_3,$$

其中 $f_{M_2}=\max\limits_{x'(t)\in[-M_2,M_2]}|f(x'(t))|$.

令 $M=\max\{M_2,M_3\}$, $\Omega=\{x\in X: |x^{(i)}|_0<M, i=0,1\}$ 和 $\Omega_1=\{x\in\partial\Omega: x\in\mathrm{Ker}L\}$, 则 $\forall x\in\partial\Omega_1$,

$$QNx=-\frac{K_2}{\omega}\int_0^\omega x(t)\mathrm{d}t\neq 0.$$

另一方面, 考虑到 $K_2\neq 0$, 不妨假设 $K_2>0$, 故令 $J:\mathrm{Im}Q\longrightarrow\mathrm{Ker}L$ 为恒同映射, 且取变换

$$H(x,\mu)=-\mu x+(1-\mu)JQNx, (x,\mu)\in\Omega\times[0,1],$$

那么 $\forall(x,\mu)\in(\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L)\times[0,1]$, 则有

$$H(x,\mu)=-K_2(1-\mu)\omega\int_0^\omega x\mathrm{d}t-\mu x\neq 0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\\ =&\deg\{H(x,0),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\\ =&\deg\{H(x,1),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\\ =&\deg\{-I,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0.\end{aligned}$$

根据 Mawhin 重合度拓展定理 [29], 可知, 方程 (2) 至少存在一个 ω-周期解.

5 系统周期解的惟一性结果

定理 2 在系统 (2) 中, 如果 $f(0)=0, |K_2|\omega^2 < 4$, 且对 $\forall x,y$, 满足 $(f(x)-f(y))(x-y)>0$, 则系统 (2) 存在惟一一个 ω-周期解.

证明 定理 1 已经证明了方程 (2) 至少存在一个 ω-周期解. 假设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是方程 (2) 的两个不同 ω-周期解, 则

$$\begin{aligned}&(u(t)-v(t))''+K_1(f(u'(t))-f(v'(t)))\\ &+K_2(u(t)-v(t))=0,\end{aligned}$$

在上式两边同乘以 $(u(t)-v(t))'$ 并从 0 到 ω 上积分, 有

$$\int_0^{\omega}(f(u'(t))-f(v'(t)))(u'(t)-v'(t))\,\mathrm{d}t =0. \tag{20}$$

由条件可知

$$\int_0^{\omega}(f(u'(t))-f(v'(t)))(u'(t)-v'(t))\,\mathrm{d}t>0,$$

这与 (20) 式矛盾. 此矛盾意味着相对转动非线性动力系统 (2) 有惟一 ω-周期解.

6 具体例子

考虑系统

$$x''+K_1f(x')+\frac{1}{14}x=\sin t, \tag{21}$$

其中

$$f(y)=\begin{cases} ll-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{y}, & y<-1,\\ 2y, & y\in[-1,1],\\ 2^{y}, & y>1,\end{cases}$$

显然, 系统 (21) 满足定理 2 的所有条件, 故由定理 2 可得系统 (21) 存在惟一的一个 2π- 周期解.

7 结 论

1) 本文针对一类具有一般广义阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力学模型. 讨论了对应自治系统的周期解问题. 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该模型的周期解存在惟一性结果, 推广了已有的结果.

2) 当阻尼力项为齐次多项式 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_{2k+1}\dot{x}^{2k+1}$ 时, 其中系数 $a_1>0, a_{2k+1}\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 显然满足本文定理 2 的所有条件, 即本文的结论同样可以研究文献 [22] 讨论的方程 (1).

3) 从我们举的例子可以发现阻尼力项 $f(y)$ 并不是齐次多项式, 所以不能用文献 [22] 的结论研究系统 (21), 故本文的结果推广和改进了文献 [22] 的相应工作.

[1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
[2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **15** 89
[3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16(S1)** 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16(S1)** 154]
[4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
[5] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯, 傅景礼, 陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
[6] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼, 陈立群, 薛云 2003 物理学报 **52** 256]
[7] Zhang K, Feng J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2985 (in Chinese) [张凯, 冯俊 2005 物理学报 **54** 2985]
[8] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
[9] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
[10] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
[11] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271
[12] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
[13] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429
[14] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
[15] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林, 刘彬 2002 物理学报 **51** 2191]
[16] Dong Q L, Wang K, Zhang C X, Liu B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese) [董全林, 王坤, 张春熹, 刘彬 2004 物理学报 **53** 337]
[17] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese) [王坤 2005 物理学报 **54** 5530]
[18] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987 (in Chinese) [王坤 2005 物理学报 **54** 3987]
[19] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese) [赵武, 刘彬 2005 物理学报 **54** 4543]
[20] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3852 (in Chinese) [赵武, 刘彬, 时培明, 蒋金水 2006 物理学报 **55** 3852]
[21] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明, 刘彬 2007 物理学报 **56** 3678]
[22] Wang K, Guan X P, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3648 (in Chinese) [王坤, 关新平, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 3648]
[23] Mo J Q, Cheng R J, Ge H X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040203 (in Chinese) [莫嘉琪, 程荣军, 葛红霞 2011 物理学报 **60** 040203]
[24] Li X J 2007 *Chin. Phys.* **16** 2837
[25] Li X J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1946
[26] Li X J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5366 (in Chinese) [李晓静 2008 物理学报 **57** 5366]
[27] Li X J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 020202
[28] Li X J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030201
[29] Gaines R E, Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations* (Berlin: Springer)
[30] Zhang J Y, Feng B Y 2000 *The Geometric Theory and Bifurcation Problem of Ordinary Differential Equations* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [张锦炎, 冯贝叶 2000 常微分方程几何理论与分支问题 (北京: 北京大学出版社)]
[31] Li X J 2009 *Nonlinear Analysis* **71** 2764

Periodic solution of relative rotation nonlinear dynamic model with commonly damped force and forcing periodic force*

Li Xiao-Jing† Chen Xuan-Qing

(*College of Mathematics and Physics, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou* 213001, *China*)

(Received 18 April 2012; revised manuscript received 15 May 2012)

Abstract

The periodic problem of the corresponding autonomous system is discussed. Some results on the existence and uniqueness of periodic solutions of the system are obtained by using the continuation theorem of coincidence degree theory. The results available from the literature are generalized. Furthermore, an example is given to illustrate our results are new.

Keywords: relative rotation, nonlinear dynamic system, periodic solution, existence and uniqueness

PACS: 02.30.Hq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11071205, 11101349) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2011042).

† E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn