

# 光格中旋量玻色-爱因斯坦凝聚的高阶非线性孤子激发\*

谢元栋†

(华南师范大学物理与电信工程学院, 广州 510006)

(2012年3月29日收到; 2012年5月21日收到修改稿)

研究了一维光格中旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的高阶非线性作用下的孤子激发, 得出了用椭圆积分表示的明孤子解和特定参数条件下的暗孤子解析解, 并求得了能量表达式.

**关键词:** 旋量玻色-爱因斯坦凝聚, 高阶非线性, 椭圆积分, 孤子激发

**PACS:** 03.75.Lm, 05.30.Jp

## 1 引言

自从爱因斯坦预言玻色-爱因斯坦凝聚 (BECs) 现象以来, 特别是在实验上实现以后, 许多研究者对 BECs 进行了多角度的大量理论和实验研究. 因其应用前景不可限量, 研究高潮迭起.

当玻色-爱因斯坦凝聚体陷在磁阱中时, 自旋矢量的内在自由度被冻结. 但若陷在光阱中, 这些自由度就会被解放出来并显现出很多独特性质, 比如自旋磁畴<sup>[1]</sup>和织构<sup>[2]</sup>. 在紧约束近似下, 光格中旋量玻色-爱因斯坦凝聚体会经历铁磁相变<sup>[3,4]</sup>, 产生宏观磁矩, 这些磁矩会相互作用, 反过来产生自旋波、椭圆函数波和孤子<sup>[5,6]</sup>. 因其孤子的参数高度可调, 因此研究起来十分方便. 作为自旋体系与传统的固体材料构成的体系相比, 光格中旋量 BECs 有许多优势. 在固体材料中自旋联系主要靠格点 (费米子) 间的交换相互作用, 其强度取决于固体材料的结构, 参数在实验中不能自如地调节; 当把固体材料冷却到极低温度时, 热过程不能完全忽略; 另外, 固体磁材料的杂质和缺陷也要考虑. 而对于光格中旋量 BEC, 由于与固体材料的结构大不相同, 这些困难自动消除. 首先, 光格中 BEC 体是

玻色子而不是费米; 其次, 格点间的相互作用是长程相互作用, 交换相互作用可忽略; 再次, 参数可以调节.

本文在光格中旋量 BEC 的海森堡自旋链模型基础上, 研究高阶非线性作用下的孤子激发, 得到了一些有意义的结果, 为进一步研究低温下物态提供有价值的参考.

## 2 模型的建立

一维光格中旋量玻色-爱因斯坦凝聚主要由两类相互作用控制: 自旋变化引起的碰撞和偶极相互作用 (磁致偶极相互作用和光致偶极相互作用)<sup>[5-8]</sup>. 哈密顿量取下列形式<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_n \int \hat{\psi}_n^+(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_L(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}_n(\mathbf{r}) \\
 & + \sum_{n,m,n',m'} \int \hat{\psi}_n^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m^+(\mathbf{r}) [V_{nn'mm'}^{\text{coll}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \\
 & + V_{nn'mm'}^{d-d}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{n'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \\
 & + H_B, \tag{1}
 \end{aligned}$$

其中  $V_L(\mathbf{r})$  为格点势;  $n, n', m, m' = -F, \dots, F$  表示角动量为  $F$  的原子的塞曼亚能级对应的角动量;

\* 广东省科技厅农业科技重点项目 (批准号: 2012A020200011) 和国家自然科学基金 (批准号: 11074080) 资助的课题.

† E-mail: xieyd@scnu.edu.cn

$V_{nn'mm'}^{\text{coll}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  和  $V_{nn'mm'}^{d-d}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  分别表示两体基态碰撞和偶极相互作用,  $H_B$  表示与外磁场相互作用引起的能量. 当光学势足够深时, 自旋算符可以展开为  $\hat{\psi}_n(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \hat{C}_n(i)$ , 其中  $\phi_i(\mathbf{r})$  为第  $i$  个微势阱的凝聚态波函数,  $\hat{C}_n(i)$  是玻色算符, 满足玻色对易关系  $[\hat{C}_m(i), \hat{C}_n(j)] = \delta_{mn} \delta_{ij}$ . 在紧约束近似下, 若只考虑跟自旋有关的项, 应用二次量子化理论, 则一维光格中旋量玻色-爱因斯坦凝聚海森堡自旋链模型的哈密顿量可以写成<sup>[7]</sup>

$$H = \sum_i \left[ \lambda'_a \hat{S}_i^2 - \gamma_B \hat{S}_i \cdot \mathbf{B} - \sum_{j \neq i} J_{ij} (\hat{S}_i^- \hat{S}_j^+ + \hat{S}_i^+ \hat{S}_j^-) - \sum_{j \neq i} J_{ij}^{\text{md}} \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \right], \quad (2)$$

其中  $\lambda'_a = \frac{\lambda_a}{2} \int d^3\mathbf{r} |\phi_n(\mathbf{r})|^4$ , 而  $\lambda_a$  是正比于三重隧穿与单重隧穿中自旋波散射长度之差<sup>[9,10]</sup>. 偶极相互作用的表达式

$$\begin{aligned}
 J_{ij}^z &= \frac{\mu_0 \gamma_B^2}{16\pi \hbar^2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{|\phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 |\phi_i(\mathbf{r})|^2}{|\mathbf{r}|^3} \\
 &\quad - \frac{3\mu_0 \gamma_B^2}{16\pi \hbar^2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{z'^2 |\phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 |\phi_i(\mathbf{r})|^2}{|\mathbf{r}|^5}, \\
 J_{ij} &= \frac{\gamma U_0}{24\Delta \hbar^2 k_L^3} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{-r^2/L_c^2} \\
 &\quad \times e^{(-r_\perp^2 - |r_\perp - r'_\perp|^2)/W_L^2} \cos(k_L z - k_L z') \\
 &\quad \times \cos(k_L z) \mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_- |\phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 \\
 &\quad \times |\phi_i(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} J_{ij}^z, \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中光波波数  $k_L = \frac{2\pi}{\lambda_L}$ , 横向坐标  $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $W_L$  是格点激光束的宽度,  $U_0$  表示光学格点势的深度,  $\mathbf{e}_\pm$  是球谐振基单位矢量. 张量  $\mathbf{W}$  表达式为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \frac{3}{4} \left[ (\mathbf{\Pi} - 3\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_0) \left( \frac{\sin \xi}{\xi} + \frac{\cos \xi}{\xi^3} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \mathbf{\Pi} - \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_0 \right) \frac{\cos \xi}{\xi} \right], \quad (4)
 \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{\Pi}$  是单位张量, 而  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$ ,  $\xi = k_L |\mathbf{r}|$ ;  $J_{ij} = J_{ij}^{\text{ld}} - \frac{1}{4} J_{ij}^{\text{md}}$ ,  $J_{ij}^{\text{md}}$  表示磁偶极相互作用,  $J_{ij}^{\text{ld}}$  表示光致偶极相互作用. 为了方便计算, 用各格点平均值  $J_{\text{LD}}$  和  $J_{\text{MD}}$  来表示  $J_{ij}^{\text{ld}}$  和  $J_{ij}^{\text{md}}$ . (2) 式中的自旋矢量  $\mathbf{S}$  有三个分量:  $S^x$ ,  $S^y$  和  $S^z$ . 通常定义  $S^+ = S^x + iS^y$ ,  $S^- = S^x - iS^y$ .  $S^+$  为自旋升算符,  $S^-$  为自旋降算符. 这两个算符使  $S^z$  的一个本征态跃迁到另一个本征态, 这在有关自旋计算中

非常方便. 本文讨论的自旋  $S \gg 1$ . 容易证明

$$S^2 = \frac{1}{2} (S^+ S^- + S^- S^+) + (S^z)^2, \quad (5)$$

进一步引进偏差算符  $\hat{n} = S - S^z$ , 其本征值为  $n = S - m$ . 对于态  $|n\rangle$  有

$$\begin{aligned}
 \hat{S}^- |n\rangle &= \sqrt{(2S - n)(1 + n)} |n + 1\rangle, \\
 \hat{S}^+ |n\rangle &= \sqrt{(2S - n + 1)\sqrt{n}} |n - 1\rangle. \quad (6)
 \end{aligned}$$

定义产生算符  $a^+$  和湮灭算符  $a$ , 满足  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ,  $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$  和  $a^+a|n\rangle = n|n\rangle$ , 满足玻色对易关系:

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_i'] = [a_i^+, a_i'] = 0. \quad (7)$$

采用 Holstain-Primakoff (HP) 变换

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_i^+ &= (\sqrt{2S - a_i^+ a_i}) a_i, \\
 \hat{S}_i^- &= a_i^+ \sqrt{2S - a_i^+ a_i}, \\
 \hat{S}_i^z &= S - a_i^+ a_i. \quad (8)
 \end{aligned}$$

低温下,  $a_i^+ a_i \ll 2S$ , 方程 (8) 中的  $\hat{S}_i^+$  和  $\hat{S}_i^-$  可以用泰勒级数展开, 只考虑最邻近格点的相互作用, 精确到六阶, (2) 式可以写成

$$\begin{aligned}
 H &= \lambda'_a N S(S+1) - \gamma_B B_z S N + \gamma_B B_z \sum_i a_i^+ a_i \\
 &\quad - \sum_i \sum_{j \neq i} (J_{ij}^{\text{md}} S^2 - J_{ij}^{\text{md}} S a_j^+ a_j) \\
 &\quad - J_{ij}^{\text{md}} S a_i^+ a_i + J_{ij}^{\text{md}} a_i^+ a_i a_j^+ a_j) \\
 &\quad - \sum_i \sum_{j \neq i} (2J_{ij} S a_i^+ a_j + 2J_{ij} S a_i a_j^+) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} J_{ij} (a_i^+ a_i^+ a_i a_j + a_i^+ a_j^+ a_j a_i) \\
 &\quad + a_j a_i^+ a_i^+ a_i + a_j^+ a_j a_j a_i^+) \\
 &\quad + \frac{J_{ij}}{4} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{S} (a_i^+ a_i a_i a_j^+ a_j^+ a_j) \\
 &\quad + a_i^+ a_i^+ a_i a_i^+ a_i a_j + a_i^+ a_i a_i^+ a_i a_i a_j^+ \\
 &\quad + a_i^+ a_j^+ a_j a_j^+ a_j a_j + a_i a_j^+ a_j^+ a_j a_j^+ a_j). \quad (9)
 \end{aligned}$$

在理想情况下, 把系统制备在相干态  $|\psi\rangle = \{|\psi_i\rangle\} = \mathbf{\Pi}_i |\psi_i\rangle$ , 其中  $|\psi_i\rangle = \exp(-|\psi_i|^2) \exp(-\psi_i a^+) |0\rangle$ ,  $|0\rangle = |GS\rangle = |N, N\rangle$  是基态<sup>[5]</sup>. 采用自旋相干态  $|\psi\rangle$  及含时变分原理, 则哈密顿量 (2) 的运动方程可以转化成概率幅方程, 其中  $\alpha_i = \langle \psi | a_i | \psi \rangle$  为第  $i$  个格点的概率幅<sup>[5,6,8-10]</sup>. 应用海森堡表象得到概率幅满足的动力学方程

$$i\hbar \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = \hbar \alpha_i + 4JS(2\alpha_i - \alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})$$

$$\begin{aligned}
 & -2J_{\text{MD}}\alpha_i(|\alpha_{i+1}|^2 + |\alpha_{i-1}|^2) \\
 & + J(|\alpha_{i+1}|^2\alpha_{i+1} + |\alpha_{i-1}|^2\alpha_{i-1} \\
 & + 2|\alpha_i|^2\alpha_{i+1} + 2|\alpha_i|^2\alpha_{i-1}) \\
 & + \left(J + \frac{J}{16S}\right)(\alpha_{i+1}^+ + \alpha_{i-1}^+)|\alpha_i|^2 \\
 & + \frac{J}{16S}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1})|\alpha_i|^2 \\
 & - \frac{J}{S^2}|\alpha_i|^2(|\alpha_{i+1}|^2\alpha_{i+1} + |\alpha_{i-1}|^2\alpha_{i-1}) \\
 & + \frac{J}{16S}[|\alpha_{i+1}|^4\alpha_{i+1} + |\alpha_{i-1}|^4\alpha_{i-1}) \\
 & + |\alpha_i|^4(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1})], \quad (10)
 \end{aligned}$$

这里  $h = \gamma_B B_z + 4J_{\text{MD}}S - 8JS$ . 文献 [11] 对非线性光学中弱非局域介质五次方非线性项加以考虑, 得出了用椭圆积分表示的隐函数解. 下面借助该参考文献的某些数学结果和方法来讨论高阶近似下满足哈密顿量 (9) 式的旋量 BEC 的孤子解.

### 3 演化方程和明孤子及暗孤子解

在长波极限下, 采用连续极限, 即

$$\begin{aligned}
 a_l(t) = \alpha(z, t), a_{l\pm 1}(t) = \alpha(z, t) \pm \frac{\partial \alpha}{\partial z} l \\
 + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \pm \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial z^3} \\
 + \frac{l^4}{4!} \frac{\partial^4 \alpha}{\partial z^4} + \dots, \quad (11a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |a_{l\pm 1}(t)|^2 = |\alpha(z, t)|^2 \pm \frac{\partial |\alpha|^2}{\partial z} l + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 |\alpha|^2}{\partial z^2} \\
 \pm \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 |\alpha|^2}{\partial z^3} + \frac{l^4}{4!} \frac{\partial^4 |\alpha|^2}{\partial z^4} + \dots, \quad (11b)
 \end{aligned}$$

这里  $l$  是格点常数. 则关于  $\alpha(z, t)$  的方程为

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} = h_3 \alpha - \left(4JS - \frac{J}{16S}\right) l^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \\
 - 2J_{\text{MD}} l^2 \frac{\partial^2 |\alpha|^2}{\partial z^2} \alpha + \left(6J - 4J_{\text{MD}}\right. \\
 \left. + \frac{J}{8S}\right) \alpha |\alpha|^2 + \left(\frac{3J}{8S} - \frac{2J}{S^2}\right) \alpha |\alpha|^4. \quad (12)
 \end{aligned}$$

求如下形式的行波解

$$\alpha(z, t) = \phi(\eta) e^{i(kz - \frac{E}{\hbar}t)}, \quad (13)$$

其中  $\phi(\eta)$  是  $\eta = z - vt$  的实函数. 把方程 (13) 代入方程 (12) 得到

$$k = \frac{\hbar v}{8JS l^2}, \quad (14)$$

$$(1 + \gamma\phi^2)\phi_{\eta\eta} + \gamma\phi\phi_{\eta}^2 + 3\delta\phi^5 + 2\mu\phi^3 - \lambda\phi = 0, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \gamma = \frac{J_{\text{MD}}}{JS}, \quad \mu = \frac{2J_{\text{MD}} - 3J}{4JS l^2}, \\
 \delta = \frac{J}{8S} - \frac{2J}{3S^2}, \quad \lambda = \frac{h_2 + 4JS l^2 k^2 - E}{4JS l^2}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

方程 (15) 与文献 [11] 中的方程 (8) 类似. 以下仿照该参考文献求其解并说明其意义.

#### 3.1 明孤子解

方程 (15) 在无穷型边界条件下, 当  $\eta \rightarrow \infty$  时,  $\phi$  及其各阶导数均为零 (边界条件), 故取积分常数为零, 存在孤子解. 两边积分一次并取积分常数为零得

$$(1 + \gamma\phi^2) \left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 + \delta\phi^6 + \mu\phi^4 - \lambda\phi^2 = 0. \quad (17)$$

设存在  $\phi_a$ , 当  $\phi = \phi_a$  时,  $\phi' = 0$ .  $\phi_a$  可以用来描述孤子幅值. (15) 式孤子存在条件:  $\mu > 0$  时,  $\delta > 0, \gamma > 0$ , 即  $\frac{1}{4}J_{\text{MD}} < J_{\text{LD}} < \frac{11}{12}J_{\text{MD}}$  和任意  $\phi_a$ ;  $\mu > 0$  时,  $\delta < 0, \gamma > 0$ , 即  $J_{\text{LD}} > \frac{11}{12}J_{\text{MD}}$  或  $J_{\text{LD}} < \frac{1}{4}J_{\text{MD}}$  和  $\phi_a^2 < \left|\frac{2\mu}{\gamma}\right| = \phi_c^2$ ; 当  $\mu < 0$  时,  $\delta > 0, \gamma > 0$  和  $\phi_a^2 > \phi_c^2$ . (15) 式可以进一步写成下列形式

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \delta\phi^2(\phi_a^2 - \phi^2) \\
 \times \frac{\phi^2 + \frac{2\lambda}{\delta(\sqrt{\mu^2 + 4\lambda} - \mu)}}{1 + \gamma\phi^2}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中  $\phi_a^2 = \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\delta} - \mu}{2\delta}$ . 设  $\delta > 0$ , 而  $\gamma > 0$  恒成立, 令  $a = \frac{2\lambda}{(\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\delta})}$ ,  $b = -\frac{1}{\gamma}$ , 则 (18) 式变为

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{\delta}{\gamma}\phi^2(\phi_a^2 - \phi^2)\frac{\phi^2 - a}{\phi^2 - b}. \quad (19)$$

以下分多种情况求明孤子解.

##### 3.1.1 第一类明孤子解

若  $\delta > 0$ , 而  $\gamma > 0$  恒成立,  $y_a = \phi_a^2 = y_a > 0 > a > b$ , 再令  $\phi^2(\eta) = y(\eta)$ , 则方程 (19) 的解为 [11-15]

$$\pm\eta = \frac{1}{2\sqrt{\gamma\delta y_a \sqrt{y_a - b}}} \left[ \Pi\left(\lambda_1, \frac{y_a - a}{y_a}, k_1\right) \right]$$

$$+ \gamma y_a F(\lambda_1, k_1) \Big], \quad (20)$$

其中

$$\lambda_1 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{y_a - y}{y_a - a}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{y_a - a}{y_a - b}}. \quad (21)$$

图 1 表示该参数区间的一个解. 若  $\phi_a^2 = y_a > 0 > b > a$ , 则在上面的表达式中互换  $a$  和  $b$ . 这两种情况下, 孤子波峰均取  $\phi_m^2 = y_a = y_m$ .

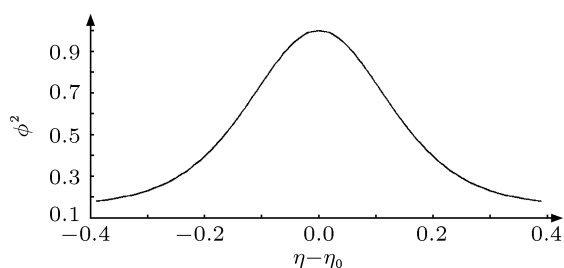


图 1 (20) 式表示的明孤子. 参数取  $y_a = 1, a = -1, b = -2, \delta = 1, \gamma = 1$

### 3.1.2 第二类明孤子解

对于  $\delta < 0, \gamma > 0, \lambda > 0, a > y_a > 0 > b$ ,  $\mu > 1/4(1 + \sqrt{1 - 8\delta\lambda})$  或  $\mu < 1/4(1 - \sqrt{1 - 8\delta\lambda})$  的最大值  $y_m = a$ , 方程 (19) 的解为

$$\pm \eta = \frac{1}{2\sqrt{|\gamma\delta|ay_a\sqrt{a-b}}} \left[ (a - y_a) \Pi \left( \lambda_2, \frac{ak_2^2}{y_a}, k_2 \right) + (1 + \gamma a) F(\lambda_2, k_2) \right], \quad (22)$$

其中

$$\lambda_2 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a-b)(y_a-y)}{(y_a-b)(a-y)}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{a-y_a}{a-b}}. \quad (23)$$

图 2 表示该参数区间的一个解.

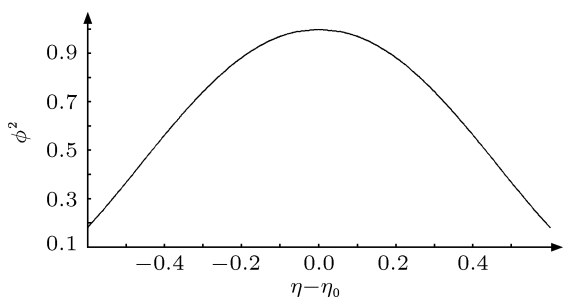


图 2 (22) 式表示的明孤子  $y_a = 1, a = 2, b = -2, \delta = -1, \gamma = 1$

### 3.1.3 第三类明孤子解

当  $\delta < 0, \gamma > 0, \lambda > 0, y_a > a > 0 > b$ , 此时参数满足  $1/4(1 - \sqrt{1 - 8\delta\lambda}) < \mu < 1/4(1 + \sqrt{1 - 8\delta\lambda})$ , 最大值取  $y_m = a$ , 方程 (19) 有解为

$$\pm \eta = \frac{1}{2\sqrt{|\gamma\delta|ay_a\sqrt{y_a-b}}} \left[ (y_a - a) \times \Pi \left( \lambda_3, \frac{y_a k_3^2}{a}, k_3 \right) + (1 + \gamma b) F(\lambda_3, k_3) \right], \quad (24)$$

其中

$$\lambda_3 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(y_a-b)(a-y)}{(a-b)(y_a-y)}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{a-b}{y_a-b}}. \quad (25)$$

图 3 表示该参数区间的一个解. 为了更加直观明确, 把三类孤子放在一起比较, 如图 4. 从图 4 中看出, 孤子的宽度和形状取决于各阶非线性参数.

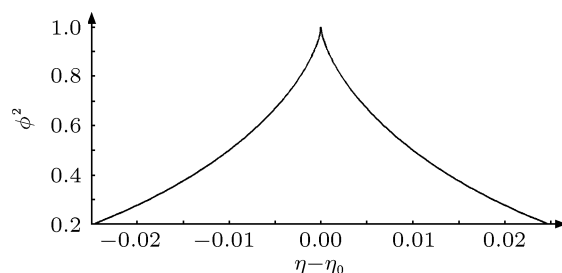


图 3 (24) 式表示的明孤子  $y_a = 2, a = 1, b = -2, \delta = -1, \gamma = 1$

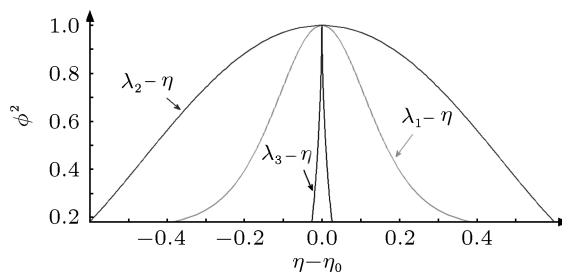


图 4 三类孤子比较

### 3.1.4 典型钟形孤子解

若孤子振幅取特殊值, 方程的分式部分退化为取决于系统参数的常数, 设

$$\phi_m^2 = \phi_a^2 = \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\delta} - \mu}{2\delta}, \quad (26)$$

当  $\delta\gamma > 0, a = b$ , 亦即  $\delta = \mu\gamma + \lambda\gamma^2$  时, 则方程 (19)

变为

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{\delta}{\gamma}\phi^2(\phi_m^2 - \phi^2), \quad (27)$$

其精确解为

$$\phi(\eta) = \phi_m \operatorname{sech}\left[\frac{\phi_m}{2}\sqrt{\frac{2\delta}{\gamma}}(\eta - \eta_0)\right], \quad (28)$$

其中  $\phi_m^2 = \phi_a^2 = \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\delta} - \mu}{2\delta} = \frac{\lambda\gamma}{\sigma}$ . (28) 式是典型的钟形孤子解.

把波函数归一化, 亦即

$$\frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(z, t)|^2 dz = 1. \quad (29)$$

代入椭圆积分解, 可以得到各种情况下的  $\lambda$ , 进而求得能量.

当  $\delta > 0, \gamma > 0$  和  $y_a > 0 > a > b$  时, 得

$$3\sqrt{\frac{2\gamma}{\delta}}\sqrt{y_a - b}E(\lambda_{10}, k_1) = l, \quad (30a)$$

$$\lambda_{10} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{y_a}{y_a - a}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{y_a - a}{y_a - b}}; \quad (30b)$$

当  $\lambda_{10}, k_1$  很小时, 可得到第二类椭圆积分的近似表达式

$$E(\lambda_{10}, k_1) \approx \left(1 - \frac{k_1^2}{4}\right) \arcsin\sqrt{\frac{y_a}{y_a - a}}, \quad (31a)$$

如果  $y_a$  和  $a$  相差不大时, 可进一步简化为

$$E(\lambda_{10}, k_1) \approx \left(1 - \frac{k_1^2}{4}\right) \left[\sqrt{\frac{y_a}{y_a - a}} - \frac{1}{6}\frac{y_a}{y_a - a}\right]. \quad (31b)$$

由上式结合方程 (16) 可得到能量的表达式.

对于  $\delta > 0, \gamma > 0$  和  $y_a > 0 > b > a$ , 有

$$\frac{3}{\sqrt{2\gamma\delta}\sqrt{y_a - a}}[(1 + \gamma a)F(\lambda'_{10}, k'_1) + \gamma(y_a - a)E(\lambda'_{10}, k'_1)] = l, \quad (32)$$

$$\lambda'_{10} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{y_a}{y_a - b}}, \quad k'_1 = \sqrt{\frac{y_a - b}{y_a - a}}; \quad (33)$$

对于  $\delta < 0, \gamma > 0, a > y_a > 0 > b$ , 有

$$\frac{3}{\sqrt{2\gamma|\delta|\sqrt{a - b}}}[(1 + \gamma a)F(\lambda'_{20}, k'_2) + \gamma(y_a - a)\Pi(\lambda'_{20}, k'_2)] = l; \quad (34)$$

其中

$$\lambda'_{20} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(a - b)y_a}{(y_a - b)a}}, \quad k'_2 = \sqrt{\frac{y_a - b}{a - b}}. \quad (35)$$

对于  $\delta < 0, \gamma > 0, y_a > a > 0 > b$ , 有

$$\frac{3}{\sqrt{2\gamma|\delta|\sqrt{y_a - b}}}[(1 + \gamma y_a)F(\lambda'_{30}, k'_3) + \gamma(a - y_a)\Pi(\lambda'_{30}, k'_3)] = l, \quad (36)$$

其中

$$\lambda'_{30} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{(y_a - b)a}{(a - b)y_a}}, \quad k'_3 = \sqrt{\frac{a - b}{y_a - b}}. \quad (37)$$

以下对典型钟形孤子解 (28) 式对应的能量详加考查. 把波函数归一化得

$$6\phi_m\sqrt{\frac{\gamma}{2\delta}} = l, \quad (38)$$

由上式可以求得  $\phi_m$  的值. 进而可求得

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{6}l\sqrt{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^3}, \quad (39)$$

代入 (16) 式得能量

$$w = \gamma_B B_z + 4J_{MD}S - 8JS + 4JSI^2k^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}J^4SI^3\sqrt{\left(\frac{3S - 16}{24SJ_{MD}}\right)^3}, \quad (40)$$

最后一项是六阶非线性对能量的修正.

### 3.2 暗孤子解

方程 (15) 有暗孤子解. 对方程 (15) 积分一次得

$$(1 + \gamma\phi^2)\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 + \delta\phi^6 + \mu\phi^4 - \lambda\phi^2 = C. \quad (41)$$

设背景强度为  $y_b$ , 即当  $\eta \rightarrow \pm\infty$  时,  $y \rightarrow y_b$ , 则积分常数  $C = \delta y_b^6 + \mu y_b^4 - \lambda y_b$ . 方程 (41) 变为

$$y'^2 = -\frac{4\delta(1 + \mu)}{\gamma}y(y_b - y)^2 \times \frac{(y + y_b)/(1 + \mu)}{y + 1/\gamma}, \quad (42)$$

方程 (42) 表示暗孤子解, 可以是“黑”孤子和“灰”孤子, 取决于各参数的大小. 当分数部分分子和分母相等时, 亦即  $y_b = \frac{\lambda}{2(1 + \mu)} - \frac{1}{2\gamma}$  时变成黑孤子, 且有解析解:

$$\phi^2 = \phi_b^2 \tanh^2\left[\sqrt{\left|\frac{\delta(1 + \mu)}{3\gamma}\right|}\phi_b^2(\eta - \eta_0)\right]. \quad (43)$$

孤子的宽度为

$$w = \sqrt{\left|\frac{3\gamma}{\delta(1 + \mu)\phi_b^2}\right|}. \quad (44)$$

典型暗孤子解如图 5 所示. 参数取其他值时, 难求解析解.

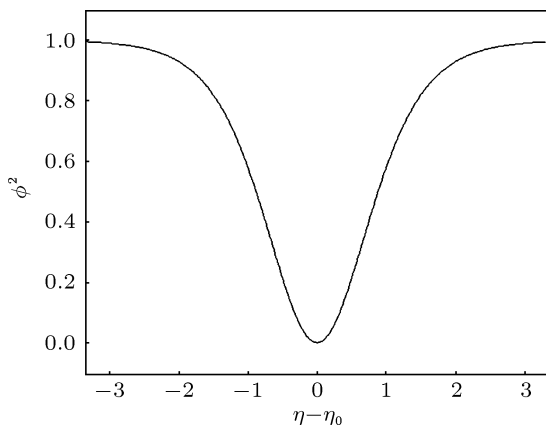


图5 典型暗孤子解

## 4 结论

分别求得了一维光格中旋量玻色-爱因斯坦凝聚在高阶非线性项作用下的明孤子和暗孤子解及其能级表达式. 借助于椭圆积分, 可以把明孤子和能量表示为隐函数解析解. 结果表明, 孤子宽度和形状取决于各级非线性参数. 与低阶非线性作用下孤子<sup>[5,6]</sup>比较, 毫无疑问, 这里的孤子内容更丰富, 能量表达式也更细致, 因而更有参考价值. 还求得了特殊参数条件下的暗孤子解析解. 这些结果对研究低温下物性有参考意义.

- [1] Miesner H J, Stamper-Kurn D M, Stenger J, Inouye S, Chikkatur A P, Ketterle W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2228
- [2] Ohmi T, Machida K 1999 *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 1822
- [3] Pu H, Zhang W P, Meystre P 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 140405
- [4] Cross K, Search C P, Pu H, Zhang W P, Meystre P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 033603
- [5] Xie Z W, Zhang W P, Chui S T, Liu W M 2004 *Phys. Rev. A* **69** 053609
- [6] Xie Y D 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 445
- [7] Zhang W P, Pu H, Search C, Meystre P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 060401
- [8] Yu Z X, Liang J Q, Jiao Z Y 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 837
- [9] Pushkarov D I, Pushkarov K I 1977 *Phys. Lett. A* **61** 339
- [10] Xiong Y Q, He B P, Li Y N 1995 *Special Subject Analysis in Modern Basic Physics* (Guangzhou: South China University of Technology Press) pp285–305 (in Chinese) [熊钰庆, 何宝鹏, 李永宁 1995 近代物理学基础专题分析 (广州: 华南理工大学出版社) 第 285—305 页]
- [11] Tsoy E N 2010 *Phys. Rev. A* **82** 063829
- [12] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations Scattering* (New York: Cambridge University Press)
- [13] Xie Y D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 023201 (in Chinese) [谢元栋 2012 物理学报 **61** 023201]
- [14] Greenhill A G 1959 *The Applications of Elliptic Functions* (New York: Dover Pub)
- [15] Byrd P F, Friedman M D 1954 *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* (Berlin: Springer Verlag)

# Soliton excitation with high-order nonlinearity of spinor Bose-Einstein condensate in an optical lattice\*

Xie Yuan-Dong<sup>†</sup>

(School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

(Received 29 March 2012; revised manuscript received 21 May 2012)

## Abstract

Soliton excitation with high-order nonlinearity of spinor Bose-Einstein condensate in an optical lattice is studied in detail. The exact solution for bright soliton which is expressed as an elliptic integral is found, and the analytic solution for dark soliton with particular parameters is presented. The energy is also found.

**Keywords:** spinor Bose-Einstein condensates, higher-order nonlinearity, elliptic integral, soliton excitations

**PACS:** 03.75.Lm, 05.30.Jp

---

\* Project supported by the Key Project for Agricultural Science and Technology of Guangdong Province, China (Grant No. 2012A020200011) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11074080).

<sup>†</sup> E-mail: xieyd@scnu.edu.cn