

双稳系统随机共振的能量输入机理*

林敏[†] 黄咏梅

(中国计量学院计量测试工程学院, 杭州 310018)

(2012年3月15日收到; 2012年6月6日收到修改稿)

从布朗粒子运动所遵循的 Langevin 方程出发, 分析了周期性外力提供给布朗粒子的瞬时功率和平均功率, 揭示了双稳系统随机共振的能量输入机理. 理论分析与数值仿真结果表明, 布朗粒子吸收的瞬时功率随时间作周期性变化, 其变化的频率是周期性外力的 2 倍, 而其幅值和均值的大小都受控于噪声强度. 改变布朗粒子所处热环境的参数, 能有效地控制周期性外力的能量输入形式.

关键词: 双稳系统, 随机共振, 随机能量, 瞬时功率

PACS: 02.50.-r, 05.10.Gg, 05.40.Jc

1 引言

随机共振^[1-3]的动力学特性常用 Langevin 方程来描述, 并将热随机力作为方程的输入, 而热随机力的强度为输入变量, 布朗粒子的位置为输出变量. 人们通过计算输出变量的功率谱, 采用信噪比、功率谱放大率和驻留时间分布等量来刻画随机共振^[4-16]. 1998 年, Sekimoto 在布朗粒子运动所遵循的 Langevin 方程的基础上, 通过引入内能、热量和功等物理量建立了 Langevin 方程的动力学与热力学的联系, 提出了基于单一随机轨线的能量守恒^[17]. 2001 年, Iwai 等采用随机能量法分析了 Langevin 方程所描述的非平衡过程的能量转化关系, 提出了用外部驱动力所作的功作为双稳系统随机共振的一种度量^[18-22]. 随后, 林敏等提出了以“能量”为研究核心的随机能量共振及控制方法^[23,24].

运动可以有不止一种的度量方法, 布朗运动涉及热能与机械能的相互转化, 而能量的变化可以用功的大小来度量. 运动着的布朗粒子将在空间划出一条轨线, 在轨线上的各点都受到外力的作用. 在一定长度的路径上, 外力对布朗粒子所作的功与各

段的元功有关, 最终的功是轨线上各段元功的代数和. 由于各个时刻的元功有时为正有时为负, 因此, 采用瞬时功率能反映各不同时刻的作功情况. 功率可以将布朗粒子的运动状态和作用力综合为一个单一量值, 进而通过这一指标来度量振动能量的传递, 它兼顾了力和速度以及它们的相位关系, 振动信息丰富, 便于实施振动系统的优化控制和优化设计^[25,26].

要维持布朗粒子在双稳势中的运动, 就必须由外界不断地供给能量. 而随机共振的产生, 则需外界提供更大的能量. 由于作用到布朗粒子的外力是周期性的, 外力对布朗粒子所作的功时大时小、时正时负, 通常采用一个周期内的平均功率作为能量的输入量. 随着噪声强度的变化, 布朗粒子的运动状态也发生变化, 而运动状态的改变将伴随着能量输入大小的变化, 即周期性外力提供给布朗粒子的功率随噪声强度而变, 随机共振时的能量输入应达到极值. 本文分析了自由布朗粒子和受束缚布朗粒子的动力学特性, 从布朗粒子运动所遵循的 Langevin 方程出发, 分析了过阻尼条件下布朗粒子沿单一随机轨线的内能和功的变化关系, 通过引入功率这一能量指标来刻画周期性外力与布朗粒子之间的能量传递, 分析了布朗粒子吸收的瞬时功

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972207) 和浙江省自然科学基金 (批准号: Y7080111) 资助的课题.

[†] E-mail: linm@cjl.edu.cn

率和平均功率与热噪声强度的关系, 揭示了双稳系统随机共振的能量输入机理.

2 Langevin 方程与功率流

2.1 Langevin 动力学方程

对于自由的布朗粒子, Langevin 将周围的介质分子对布朗粒子的作用力分成热随机力和阻尼力两部分, 则质量为 m 的自由布朗运动方程为

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = \xi(t) - \gamma v, \quad (1)$$

式中, x 和 v 是布朗粒子的位移和速度. $\xi(t)$ 是热环境作用到布朗粒子的随机力, 它具有 $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(0) \rangle = 2k_B T \delta(t)$ 的统计性质, 而 k_B 为 Boltzmann 常数、 T 为热力学温度, 常用强度 $D = k_B T$ 的高斯白噪声模拟热随机力; γ 是阻尼系数. (1) 式表明自由布朗运动是靠热运动 (温度) 驱动的, 其运动特性由热环境的参数 $k_B T$ 和 γ 所决定.

当布朗粒子被束缚在双稳势场中, 并受到周期性外力的作用, 则它的动力学方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ m \frac{dv}{dt} &= -V'(x) + A \cos(\omega t) + \xi(t) - \gamma v, \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4}$ 是双稳势函数, $A \cos(\omega t)$ ($A \ll 1$ 是幅值、 ω 是频率) 是外界作用到布朗粒子的弱周期力. 布朗粒子在确定性的有序力与无序的涨落力的共同作用下运动, 而这些作用力与布朗粒子运动路径的空间累积形成了能量的交换.

2.2 瞬时功率与平均功率

在过阻尼条件下 (2) 式的惯性项可以忽略, 适当选择单位使 $\gamma = 1$, 则 (2) 式可改写为随机共振的典型方程

$$v = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \xi(t), \quad (3)$$

$$U(x, t) = V(x) - xA \cos(\omega t),$$

$U(x, t)$ 是考虑外力 $A \cos(\omega t)$ 作用后系统随时间变化的势函数. 采用随机能量方法^[17], 一个周期内外力对布朗粒子所作的功 (输入能量) 为

$$W = \int_0^\tau \left\langle \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right\rangle_\xi dt$$

$$= \int_0^\tau \langle x(t) \rangle_\xi A \omega \sin(\omega t) dt, \quad (4)$$

式中 $\langle \rangle_\xi$ 表示在噪声 ξ 的样本空间上求集合平均. 则周期力传递给布朗粒子的功率 $P(t)$ 为

$$P(t) = \langle A \cos(\omega t) \cdot v \rangle_\xi = \langle x(t) \rangle_\xi A \omega \sin \omega t, \quad (5)$$

在绝热近似 ($A \ll 1, D \ll 1$, 且输入信号的频率远小于 Kramers 时间的倒数) 的假设条件下, $x(t)$ 的统计均值^[2,3] 可表示为

$$\langle x(t) \rangle_\xi = X(D) \cos[\omega t + \varphi(D)], \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} X(D) &= \frac{A \langle x^2 \rangle_0}{D} \frac{2r_K}{\sqrt{4r_K^2 + \omega^2}}, \\ \varphi(D) &= -\arctan\left(\frac{\omega}{2r_K}\right), \end{aligned}$$

其中 $r_K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4D}\right)$ 为 Kramers 逃逸率, $\langle x^2 \rangle_0 = \sqrt{\frac{D}{2}} \frac{D_{-3/2}(-1/\sqrt{2D})}{D_{-1/2}(-1/\sqrt{2D})}$ 是由 D 决定的静态未扰动系统 ($A = 0$) 的方差, 其中 $D_n(x)$ 是抛物柱面函数.

将 (6) 式代入 (5) 式可得

$$\begin{aligned} P(t; D) &= A \omega X(D) \sin \omega t \cdot \cos[\omega t + \varphi(D)] \\ &= -\frac{1}{2} A \omega X(D) \sin \varphi(D) \\ &\quad + \frac{1}{2} A \omega X(D) \sin(2\omega t + \varphi(D)). \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式表明瞬时功率 $P(t)$ 包含两部分, 一是与时间无关的常数项 $-\frac{1}{2} A \omega X(D) \sin \varphi(D)$, 二是以外力频率的 2 倍作周期性变化的项 $\frac{1}{2} A \omega X(D) \sin(2\omega t + \varphi(D))$. 可见, $P(t)$ 是一个随时间作周期性变化的量, 则一个周期内的平均功率 \bar{P} 为

$$\begin{aligned} \bar{P}(D) &= \frac{1}{2\pi/\omega} \int_t^{t+2\pi/\omega} P(t; D) dt \\ &= -\frac{1}{2} A \omega X(D) \sin \varphi(D). \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式表明 \bar{P} 的正、负值取决于相位差 $\varphi(D)$. 如果 $\varphi(D)$ 在 $-\pi < \varphi(D) < 0$, 则 $\bar{P} > 0$, 外力对布朗粒子在一个周期内作正功. 而 \bar{P} 的数值大小既与外作用力的参数有关, 又与布朗粒子运动的幅值 $X(D)$ 和相位 $\varphi(D)$ 有关. 由 (8) 式和 (6) 式, 当 $D \rightarrow 0$ 或 $D \rightarrow \infty$ 时, $\bar{P}(D) \rightarrow 0$. 图 1 是 (8) 式中的参数取 $A = 0.2, \omega = 0.002\pi$ 时, \bar{P} 与 D 之间关系的近似理论曲线, 图 1 表明随着噪声强度 D 的

变化,外力在一个周期内提供给布朗粒子的平均功率总是大于0,且存在着明显的单峰曲线现象.

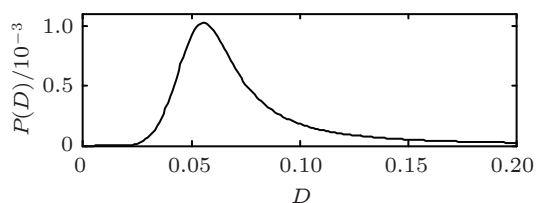


图1 $\bar{P}(D)$ 与 D 之间关系的近似理论曲线 ($A = 0.2$, $\omega = 0.002\pi$)

当噪声强度分别取 $D = 0.04, 0.06$ 和 0.10 时,瞬时功率 $P(t)$ 随时间 t 的变化如图 2 所示. 图 2 表明,当布朗粒子处于不同噪声强度的热环境下,周期性外力以不同的方式给布朗粒子传递能量,时而功大时而功小,又时而作正功时而作负功. 瞬时功率 $P(t)$ 与噪声强度 D 的关系密切,调节噪声强度能有效地控制周期性外力对布朗粒子做功的大小.

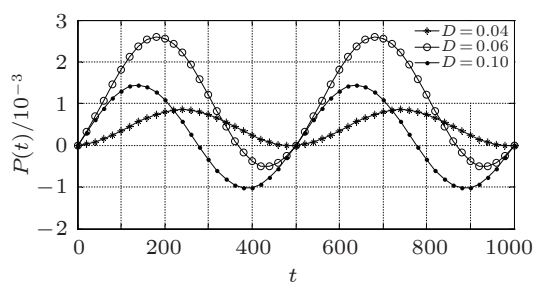


图2 随机共振的瞬时功率 $P(t)$ 随 t 在一个周期内变化的近似理论曲线 ($D = 0.04, 0.06, 0.10$)

3 数值仿真结果与分析

周期性外力提供给布朗粒子的功率 P 与外力的参数 A, ω 和布朗粒子的运动 $x(t)$ 有关,而 $x(t)$ 的 $X(D)$ 和 $\varphi(D)$ 又是噪声强度 D 的函数. 因此,不同的 D 值, $X(D)$ 和 $\varphi(D)$ 具有不同的量值,从而使得布朗粒子吸收的瞬时功率具有不同的时间变化形式. 本文分析噪声强度 D 对 $P(t)$ 的控制作用,着重研究不同噪声强度下的瞬时功率变化形式,从而揭示随机共振的能量输入机理. 仿真分析以 (3) 式为动力学方程,方程中的随机力 $\xi(t)$ 采用高斯分布的白噪声来模拟,噪声强度用 D 表示;采用四阶 Runge-Kutta 法,仿真步长 $h = 0.5$,考虑到布朗粒子运动的随机性,瞬时功率和平均功率的计算采

用 500 个周期的均值.

3.1 单势阱内的 $P(t)$ 与 D 的关系

当没有噪声或噪声的强度较小时,处于双稳势中的布朗粒子仅受周期性外力的作用不能跃过势垒,而只能处在单一势阱内运动. 取周期性外力的幅值 $A = 0.2$, 频率 $\omega = 0.002\pi$, 图 3 是 $D = 0, 0.018$ 和 0.02 时,瞬时功率 $P(t)$ 随时间 t 的变化曲线. 图 3 表明 $P(t)$ 的取值时大时小、时正时负, $P(t)$ 变动的幅值取决于 D 值的大小,变化的规则与噪声强度 D 的取值关系密切. 但不同 D 值对应的 $P(t)$ 都有着近似的周期性变化,前半个周期与后半个周期所作的功呈现出正、负大致相抵,即 $P(t) > 0$ 和 $P(t) < 0$ 所占的时间相当,因而一个周期内正负相抵所作的净功较小.

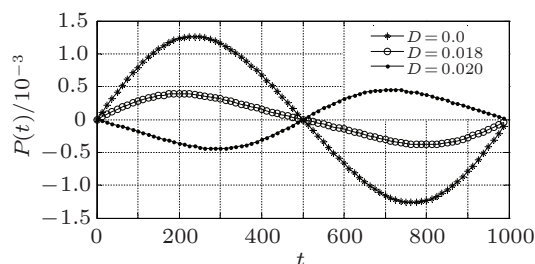


图3 单势阱内 $P(t)$ 随 t 变化仿真曲线 ($A = 0.2$, $\omega = 0.002\pi$)

3.2 双势阱之间的 $P(t)$ 与 D 关系

保持周期性外力的幅值 $A = 0.2$ 和频率 $\omega = 0.002\pi$ 不变,图 4 是当噪声强度 $D = 0.08$ 时,布朗粒子在周期力与噪声的共同作用下,在两势阱之间来回运动的瞬时功率 $P(t)$ 随时间 t 的变化曲线,数值仿真与近似理论曲线都呈现出以周期性外力频率的 2 倍作周期性变化. 由于布朗粒子跃过势垒而在两对称的势阱之间运动,在一个周期的前半个周期和后半个周期都有作正功的时间区间, $P(t) > 0$ 所占有的时间 T_+ 大于 $P(t) < 0$ 所占有的时间 T_- ,也就是在一个周期的大部分时间内周期性外力对布朗粒子作正功,布朗粒子吸收到较大的能量,反映了噪声在周期性外力对布朗粒子做功时所起的积极作用.

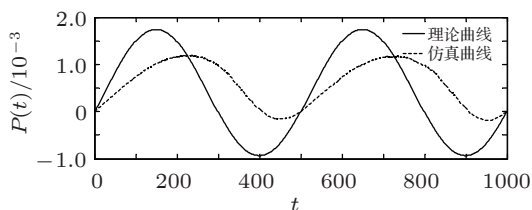


图4 $D = 0.08$ 随机共振时 $P(t)$ 随 t 在一个周期内的变化曲线 ($A = 0.2, \omega = 0.002\pi$)

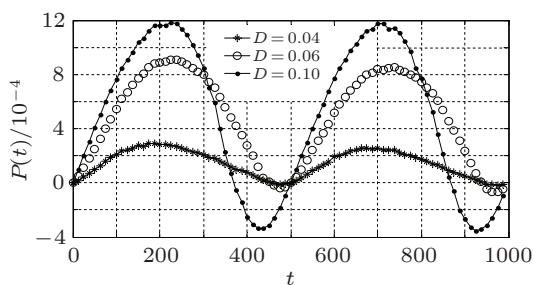


图5 双势阱间跃迁时 $P(t)$ 随 t 变化仿真曲线 ($A = 0.2, \omega = 0.002\pi$)

图5是噪声强度 $D = 0.04, 0.06$ 和 0.10 三个不同值时, $P(t)$ 随 t 变化的仿真曲线. 图5表明, 由于布朗粒子在两个对称的势阱之间作跃迁运动,

$P(t)$ 以周期性外力频率的2倍随时间变化, 功率的大、小和正、负交替变化, 与图2的近似理论曲线是一致的. 但仿真曲线与近似理论曲线在幅值大小和相位的量值上有些偏差.

4 结论

分析了自由布朗运动和受束缚布朗粒子的随机动力学特性, 从能量传递和转换的角度建立了沿单一随机轨线的随机共振的功、能关系. 通过引入瞬时功率、平均功率等物理量, 研究了布朗粒子吸收的瞬时功率与噪声强度的关系. 结果表明, 在一定的周期性外力作用下, 通过调节噪声强度的大小, 布朗粒子的运动状态将发生变化, 从而引起周期性外力与运动状态交互作用的变化, 这些变化就伴随着能量输入大小的改变; 随机共振时布朗粒子吸收的瞬时功率随时间作周期性变化, 其变化的频率是周期性外力的2倍; 由于布朗粒子在两势阱之间的跃迁而引起相位的改变, 使得周期性外力能提供更多的能量, 从而产生随机共振的能量输入达到极值. 这为深入研究随机能量共振的产生机理提供了新的理论方法.

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *Phys. A* **14** L453
 [2] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P and Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
 [3] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
 [4] Qin G R, Gong D C, Hu G and Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎, 龚德纯, 胡岗, 温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
 [5] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江, 李蓉, 温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
 [6] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 952
 [7] Wang C J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030503
 [8] Dong X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010502
 [9] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wang W J, Hu S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1118 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇, 郭焱, 汪文津, 胡世广 2005 物理学报 **54** 1118]
 [10] Lin M, Huang Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6173 (in Chinese) [林敏, 黄咏梅 2007 物理学报 **56** 6173]
 [11] Dong X J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0070
 [12] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉, 刘立, 曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
 [13] Lin L, Yan Y, Mei D C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2240 (in Chinese) [林灵, 闫勇, 梅冬成 2010 物理学报 **59** 2240]
 [14] Guo Y, Xu W, Wang L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040503
 [15] Zhang L Y, Jin G X, Cao L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044207 (in Chinese) [张良英, 金国祥, 曹力 2011 物理学报 **60** 044207]
 [16] Chen Z S, Yang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 074301 (in Chinese) [陈仲生, 杨拥民 2011 物理学报 **60** 074301]
 [17] Sekimoto K 1998 *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **130** 17
 [18] Iwai T 2001 *Phys. A* **300** 350
 [19] Dan D, Jayannavar A M 2005 *Phys. A* **345** 404
 [20] Saikia S, Roy R, Jayannavar A M 2007 *Phys. Lett. A* **369** 367
 [21] Sekimoto K 2007 *Phys. Rev. E* **76** 060103(R)
 [22] Seifert U 2008 *Eur. Phys. J. B* **64** 423
 [23] Lin M, Zhang M L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020501 (in Chinese) [林敏, 张美丽 2011 物理学报 **60** 020501]
 [24] Lin M, Zhang M L, Huang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080509 (in Chinese) [林敏, 张美丽, 黄咏梅 2011 物理学报 **60** 080509]
 [25] Scharton T D, Lyon R H 1968 *J. Acoust. Soc. Am.* **43** 1332
 [26] Xiong Y P, Xing J T, Price W G 2005 *Proc. R. Soc. A* **461** 3381

The mechanism of energy input to bistable system to generate stochastic resonance *

Lin Min[†] Huang Yong-Mei

(College of Metrology Technology and Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

(Received 15 March 2012; revised manuscript received 6 June 2012)

Abstract

According to the Langevin equation that describes the Brownian particle motion, the instantaneous power and average power of Brownian particle provided by periodic external force are analyzed. The mechanism of energy input to a bistable system to generate stochastic resonance is revealed. The theoretical analysis and numerical simulation manifest that the instantaneous power absorbed by Brownian particle changes periodically. The change frequency is twice that of periodical external force, and its amplitude and average are controlled by the noise intensity. The energy input form of periodic external force can be controlled effectively by changing the parameters of thermal environment where Brownian particle is located.

Keywords: bistable system, stochastic resonance, stochastic energetic, instantaneous power

PACS: 02.50.-r, 05.10.Gg, 05.40.Jc

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972207), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y7080111).

[†] E-mail: linm@cjlu.edu.cn