

等腰直角三角形的二维量子谱和经典轨道*

刘祥龙[†] 朱满座 路璐

(西安电子科技大学工程学院, 西安 710071)

(2012年5月2日收到; 2012年6月10日收到修改稿)

本文研究了等腰直角三角形中基于其波函数和能级结构的二维量子谱. 虽然这个量子台球系统的本征态是无法分离的, 但是关于两个变量的问题是完全可解的. 通过对二维量子系统的波函数做相应的傅里叶变换, 得到了系统的二维量子谱, 把得到的结果和经典的二维量子台球轨道做相应性的对比发现: 傅里叶变换的量子谱的峰值位置和经典轨道的长度之间存在着很好的对应关系, 这说明经典计算的结果和量子计算的结果符合得非常好, 从而进一步验证了周期轨道理论的正确性.

关键词: 等腰直角三角形, 量子谱, 经典轨道, 量子台球

PACS: 03.65.Sq

1 引言

自从1975年, Easki^[1]提出量子点和量子线的概念以来, 人们对半导体量子点的各种性质在基础理论和实验两个方面进行了广泛的研究. 同时随着Gutzwiller^[2]的态密度周期轨道理论的提出, 人们对混沌系统中的量子经典的研究已经做了许多的工作.

近来, 分子束外延等技术的巨大进步, 已经使得制造点形状和点大小控制得很好的量子点系统成为了可能. 在许多的应用当中, 量子激光器的性能与量子线激光器相比, 具有更低的阈值电流密度, 更高的特征温度和更高的增益等优越特性^[3-5]. 近些年来, 纳米器件、微腔结构及其输运问题已经成为人们研究的前沿课题. 因而对不同类型的量子点的研究具有重要的理论意义和实用价值, 而量子台球可以作为研究它们的理想模型.

近些年来, 人们应用周期轨道理论已经研究了許多体系中一个粒子量子化的本征值谱和经典轨道之间的对应关系. 本文采用了等腰直角三角形势阱中的能量本征值和本征波函数^[6]计算了该体系

下的傅里叶变换, 并与经典轨道作比较, 从而得出量子谱函数和经典轨道之间的对应关系.

2 量子谱函数及其傅里叶变换

我们首先考虑一个二维系统的哈密顿量 (Hamiltonian) 为

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q). \quad (1)$$

此时我们假设系统中的两个任意两个点 A 和 B , 则量子谱函数^[7]定义为

$$\rho_{AB}(E) \equiv \sum_n \psi_n^*(A)\psi(B)\delta(E - E_n), \quad (2)$$

其中 n 为标记量子态的下标, E_n 为本征能量, ψ_n 为本征波函数. 类似于闭合轨道的平均振子强度密度的推导, $\rho_{AB}(E)$ 也可以表示为

$$\rho_{AB}(E) = \rho_{AB}^0(E) + \sum_i C_i \sin(S_i + \varphi_i), \quad (3)$$

其中, 右边为一个平滑背景项和一些正弦振荡项的求和, 求和包含了从 A 到 B 的所有允许的经典轨道, 振幅 C_i 是与轨道的稳定性有关的量, S_i 是经典

* 陕西省自然科学基金资助的课题.

[†] E-mail: xianglongliu007@163com

作用量 $S_i = \int_A^B p dq$, 积分沿经典轨道进行, φ_i 为相位, 包含 Maslov 相位修正, 该式给出了量子谱函数与经典轨道之间关系.

该等腰直角三角形量子台球系统可以通过一个其内有单位质量粒子运动的等腰直角三角形势阱来模拟, 其直角边的长度为 a , 如图 1 所示.

该模型内的势函数可以表示为

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \infty, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

如图 1 所示, $\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq x + y \leq a)$

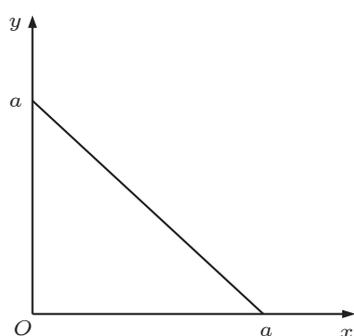


图 1 等腰直角三角形中量子点的分布区域

其相应的定态薛定谔方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V\right)\psi = E\psi. \quad (5)$$

该方程可以通过分离变量法来求解, 由于势能在 Ω 区域内为 0, 则通过 (5) 式可以得到能量本征值 E_{mn} 为

$$E_{mn} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2M} \frac{m^2 + (m + 2n - 1)^2}{a^2}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

其相应的本征波函数为

$$\Psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{a} \left(\sin \frac{(m + 2n - 1)\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} + \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{(m + 2n - 1)\pi y}{a} \right), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

但是当 $m = m + 2n - 1$ 时, 其中一些波函数会出现简并. 换言之, 当 m 和 n 取不同的值时, 会得到一些相同的本征态. 因此我们必须注意不要对同一个本征态做重复计算.

(3) 式中的经典作用量 S_i 的表达式是 $S_i = \int_A^B p dq$. 对于量子台球系统 [8,9], 我们还可以将其

表示为 $S = KL$, 其中 $K = \sqrt{2E}$, L 是经典轨道的长度, 量子谱的傅里叶变换是 [7,10]

$$\tilde{\rho}_{AB}(L) = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \rho_{AB}(E) \exp(iKL) dE, \quad (8)$$

其中, E_{\min} 和 E_{\max} 是选定的能量的上下限, 这两个值的选定必须要满足变换的精度要求, 由此我们得到实际计算傅里叶变换的另一个表达式 [7]

$$\tilde{\rho}_{AB}(L) = \sum_n \psi_m^*(x_1, y_1) \psi_m(x_2, y_2) \exp(iKL). \quad (9)$$

为了与经典结果作比较, 我们对方程 (3) 作同样的傅里叶变换, 采用旋转波近似, 可得

$$\tilde{\rho}_{AB}(L) \approx \tilde{\rho}_{AB}^0(L) + \sum_i \bar{k} C_i \left[-\frac{\exp(-i\varphi_i)}{2i} \right] \times \Delta(L - L_i), \quad (10)$$

其中

$$\Delta(x) \equiv \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \exp(ixk) dk \quad (11)$$

是一个峰值在 $x = 0$ 处的函数, 而

$$\tilde{\rho}_{AB}^0(L) = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \tilde{\rho}_{AB}^0(E) \exp(i\sqrt{2EL}) dE,$$

\bar{k}_i 是 k 在区间 $[k_{\min}, k_{\max}]$ 上的平均值 [11]

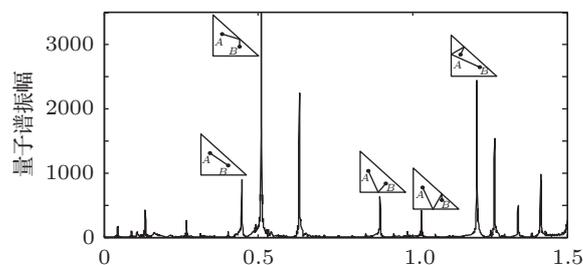


图 2 量子谱随经典轨道长度的变化

3 结果及验证

考虑到计算的精确性与简便性, 我们选取了以下参数 (为了计算的方便本文的计算中采用的全是归一化后的参数):

$$\begin{aligned} \hbar = M = 1, & \quad a = 1, \\ x_1 = 0.2a, & \quad y_1 = 0.5a, \\ x_2 = 0.6a, & \quad y_2 = 0.3a, \\ m = n = 1000. & \end{aligned}$$

表 1 图 2 中峰点的位置与从 A 到 B 的经典轨道的长度的对应关系

轨道	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	$L_{8'}$
碰撞次数	0	1	1	1	2	2	2	2	2
轨道长度	0.4472	0.5099	0.8246	0.8944	0.9055	1.0296	1.1045	1.1314	1.1314
峰值位置	0.4474	0.5103	吸收 (by L_4)	0.8942	吸收 (by L_4)	1.028	吸收 (by L_9)	吸收 (by L_9)	简并
轨道	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	$L_{13'}$	L_{14}	L_{15}	
碰撞次数	2	3	3	3	3	3	4	4	
轨道长度	1.2083	1.2166	1.2649	1.2728	1.4213	1.4213	1.4422	1.4422	
峰值位置	1.208	吸收 (by L_9)	1.264	吸收 (by L_{11})	1.414	简并	吸收 (by L_{13})	简并	

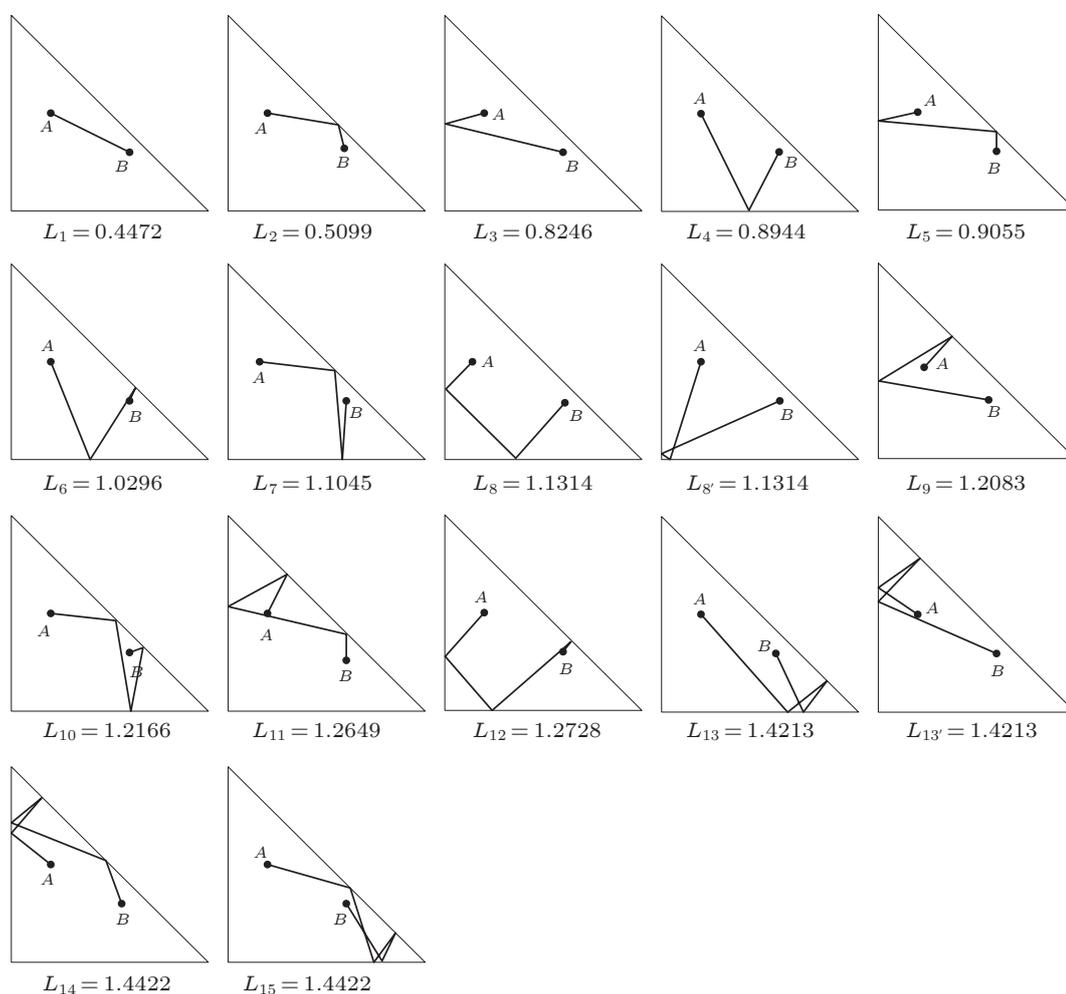


图 3 从 A 到 B 的可能的几种经典轨道

从我们的上述研究可以看到, 等腰直角三角形系统中有一些简并的本征态和一些具有相同长度的经典轨道, 当轨道的长度相似时, 他们的量子谱就容易相互吸收. 如果将以上的问题考虑进去, 我们会发现, 除去在 $L = 0.632$ 和 $L = 1.342$ 两处的

峰点外, 图 2 中量子谱的峰点与图 3 中经典轨道的长度符合得非常好.

如表 1 中所示, 量子谱与经典轨道之间有两处并不对应, 考虑到能量极限的存在, 我们认为这种误差是由能量的截断或系统的谐振造成的.

以上考虑的是关于直线 $y = x$ 偶对称的模式奇对称的模式如下:

$$\Psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{a} \left(\sin \frac{(m+2n)\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} + \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{(m+2n)\pi y}{a} \right),$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

4 结论

直到现在, 我们仍然运用等腰直角三角形系统中的本征波函数和本征能量来分析研究量子谱函

数及其傅里叶变换, 但是在此系统中存在着一些简并情况会导致问题的复杂化. 通过比较等腰直角三角形量子台球系统中的量子谱和经典轨道可以发现, 它们符合得非常好. 并且在这个方法当中, 从点 A 到点 B 的轨道是开放的, 即 A 点和 B 点是任意选取的. 尽管我们仅仅讨论了等腰直角三角形量子台球系统中经典量子通信的问题, 但我们分析这个系统的方法具有一般性, 它是可以在其他的系统中应用的. 多种动态的等腰直角三角形量子台球系统与纳米器件的传输性质紧密相关, 并且可以用来存储量子信息. 因此, 关于这些系统的研究在科学应用领域非常的重要.

-
- [1] Esaki L, Tus R 1970 *IBM J. Res. Dev.* **14** 61
- [2] Gutzwiller MC 1990 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer)
- [3] Liao Q H, Liu Z D, You S P, Cao C Q 2007 *Acta Sinica Quantum Optica* **13** 304 (in Chinese) [廖庆洪, 刘正东, 尤素萍, 曹昌祺 2007 量子光学学报 **13** 304]
- [4] Huang G M, Liu Y M 2009 *Journal of Atomic and Molecular Physics* **26** 447 (in Chinese) [黄钢明刘益民 2009 原子与分子物理学报 **26** 447]
- [5] Zhang L Q, Zhang Y H, Xu X Y, Wang Y J, Lin S L, Du M L 2007 *Journal of Atomic and Molecular Physics* **24** 69 (in Chinese) [张丽琴, 张延惠, 徐学友, 王雅静, 林圣路, 杜孟利 2007 原子与分子物理学报 **24** 69]
- [6] Zhu M Z, Wang Z X, Mei C 2011 *Journal of Atomic and Molecular Physics* (in press) (in Chinese) [朱满座, 王志霞, 梅超 2011 原子与分子物理学报 (in press)]
- [7] Jun L 2008 *Progress in Nature Science* **18** 927
- [8] Robinett R W 1998 *Math. Phys.* **39** 278
- [9] Robinett R W 1997 *Am. J. Phys.* **65** 1167
- [10] Lu J, Du M L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2450 (in Chinese) [陆军, 杜孟丽 2004 物理学报 **53** 2450]
- [11] Lin S L, Gao F, Hong Z P, Du M L 2004 *Chin. Phys. Lett.* **22** 9

Two-dimensional quantum spectra and classical orbits of isosceles- right triangular billiards*

Liu Xiang-Long[†] Zhu Man-Zuo Lu Lu

(School of Electronic Engineering Xi'dian University, Xi'an 710071, China)

(Received 2 May 2012; revised manuscript received 10 June 2012)

Abstract

The quantum spectra are derived from the wave-functions and the energy-functions of the isosceles-right triangular model. Although the eigenstates of the billiard system are not separable, the problem of functions with two variables is exactly solvable. The numerical results of the Fourier transform of quantum spectral functions are compared with the results from the classical orbits whose lengths match well with the positions of the spectra peaks. This result gives a new evident for the correspondence of quantum and classical mechanics.

Keywords: isosceles-right triangle, quantum spectra, classical orbits, quantum billiard

PACS: 03.65.Sq

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China.

[†] E-mail: xianglongliu007@163com