

具有三体相互作用的自旋链系统中的几何相位与量子相变*

单传家†

(湖北师范学院物理与电子科学学院, 黄石 435002)

(2012年4月9日收到; 2012年6月12日收到修改稿)

本文首先对具有三体相互作用的一维自旋链系统的哈密顿量进行了对角化. 然后通过一个旋转操作求解了系统基态的几何相位, 通过数值计算几何相位及其导数随外界参数的变化, 考虑三体相互作用对几何相位以及量子相变的影响, 结果表明几何相位可以很好的用来表征该系统中的量子相变, 并且发现三体相互作用不但引起相变点平移, 而且可以产生新的临界点.

关键词: 几何相位, 量子相变, 三体相互作用

PACS: 03.65.Vf, 64.70.Tg, 75.10.Pq

1 引言

量子相变^[1]是发生在绝对零度, 由于量子涨落而引起的量子多体系统的物理性质的突变. 当系统的哈密顿量中的参数改变时, 基态会出现能级交叉或者免交叉, 从而形成了一个非解析点. 当前普遍关注的其中一个问题是如何刻画量子多体系统的量子相变. 基于量子物理的视角, 量子纠缠、保真度以及量子关联都可以用来判定系统是否存在量子相变^[2-13]. 固态自旋链系统当前是一个非常重要的理论模型, 已经深入地应用于描述量子多体系统的相变以及动力学相变演化问题的研究. 几何相位的发现是近几十年来量子力学中的重要进展, Berry^[14]发现在参数空间中, 当多体系统的哈密顿量进行绝热循环演化时, 除了会产生动力学相位还会积累一个与路径无关的相位, 即几何相位. 量子相变和几何相位两者之间的密切联系引起了凝聚态和几何相位领域工作的研究人员的关注和兴趣. 大量研究结果表明, 系统在不经过量子相变,

但是只通过计算多体系统的几何相位就可以确定体系的临界特性和临界指数. 量子多体系统的量子相变行为可以通过几何相位的性质来描述, 即对量子多体系统进行一个旋转操作, 然后求解该系统的几何相位, 进而去描述多体系统的基本性质. Carollo 和 Pachos^[15]首先对量子自旋链系统中的几何相位和临界性质、量子相变之间的关系进行了研究, 他们发现在各向同性自旋模型中, 在参数空间中变化时, 基态和激发态的几何相位不同可以用来描述量子相变, 这个非平庸的特性可以用来判断是否发生量子相变. 但是这个结论只能用来解释系统的一级相变, 很难用来描述另外的重要的二级相变. 随后 Zhu^[16,17]作了进一步的深入研究, 发现系统基态的几何相位及其导数的奇异性可以更好的来表征量子相变, 并且指出这种基态几何相位的不可收缩特性可以用来探测系统的量子相变点. 随后 Hama 对这个理论结果给出了一般情况时的证明^[18]. 更为有趣的结论是, 基态的几何相位在量子相变点附近具有很好的标度特性. 量子相变系统中实验观测几何相变的尤为重要, Peng 等^[19]第一次

* 国家自然科学基金 (批准号: 11105049), 湖北省自然科学基金 (批准号: Q20112501, 2011CDC010) 和湖北师范学院青年项目 (批准号: 2010C20) 资助的课题.

† E-mail: scj1122@163.com

在实验上证实了几何相位能够刻画量子系统能级结构,观测了 XY 模型基态几何相位,并成功揭示了该模型的能级特征. 实验上,该小组采用绝热演化的方法制备了系统的基态,从而克服了基态制备的困难;对于几何相的观察,则利用量子干涉仪的方法,添加一个辅助量子比特来获取相位信息,从而成功观测了几何相. 这些工作为量子相变和几何相位两个重要课题之间架起了桥梁,研究多体系统的几何相位和量子相变的关系是一个有意义的课题. 大量研究者讨论了各种理论模型中几何相位和量子相变的相关问题 [20-24].

本文首先对具有三体相互作用的一维自旋链系统的哈密顿量进行了对角化. 然后通过一个旋转操作求解了系统基态的几何相位,通过数值计算几何相位及其导数随外界参数的变化,考虑三体相互作用对几何相位以及量子相变的影响,结果表明几何相位可以很好的用来表征该系统中的量子相变,并且发现三体相互作用不但引起相变点平移,而且可以产生新的临界点.

2 理论模型

在本文,我们考虑一维海森堡各向异性 XY 自旋链系统,该体系由 N 个相互作用的自旋 $1/2$ 粒子组成,除了自旋链中最近邻的相互作用,我们还引入了一种各向异性的三体相互作用,系统总的哈密顿量可以写为

$$H = - \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{1+\gamma}{2} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \frac{1-\gamma}{2} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \lambda \sigma_i^z \right) - \alpha \left(\frac{1+\gamma}{2} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^x + \frac{1-\gamma}{2} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^y \right) \right]. \quad (1)$$

一维 XY 自旋链模型的哈密顿量可以通过以下三个变换实现精确的对角化,即 Jordan-Wigner 变换、傅里叶变换,以及波戈留波夫变换. 首先,利用 Jordan-Wigner 变换,引入上升下降算符 ($a_i^+ a_i^-$) 和费米算符 (c_i),

$$\sigma_i^+ = \frac{1}{2}(\sigma_i^x + i\sigma_i^y) = c_i^+ \exp \left(i\pi \sum_{j=1}^{i-1} c_j^+ c_j \right),$$

$$\sigma_i^- = \frac{1}{2}(\sigma_i^x - i\sigma_i^y) = \exp \left(-i\pi \sum_{j=1}^{i-1} c_j^+ c_j \right) c_i, \quad \{c_i, c_j^+\} = \delta_{i,j}. \quad (2)$$

此时系统的哈密顿量为

$$H = - \sum_{i=1}^N \left[(\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+) + \gamma (\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^-) + \lambda \sigma_i^z + \alpha (\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^- + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^+) + \alpha \gamma (\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^+ + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^z \sigma_{i+2}^-) \right]. \quad (3)$$

然后通过傅里叶变换

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k d_k \exp \left(i \frac{2\pi j k}{N} \right), \quad (4)$$

可以得到系统的哈密顿量为

$$H = - \sum_{i=1}^N \left[c_{i+1}^+ c_i + c_i^+ c_{i+1} + \gamma (c_i^+ c_{i+1}^+ + c_{i+1}^- c_i^-) + \lambda (1 - 2c_i^+ c_i) + \alpha (c_{i+2}^+ c_i + c_i^+ c_{i+2}) + \alpha \gamma (c_i^+ c_{i+2}^+ + c_{i+2}^- c_i^-) \right] = \sum_k d_k d_k^+ \left[\exp \left(-i \frac{2\pi k}{N} \right) + \alpha \exp \left(-i \frac{4\pi k}{N} \right) \right] - \sum_k d_k^+ d_k \left[\exp \left(i \frac{2\pi k}{N} \right) + \alpha \exp \left(-i \frac{4\pi k}{N} \right) \right] + \gamma \left\{ \sum_k d_k d_{-k} \left[\exp \left(-i \frac{2\pi k}{N} \right) + \alpha \exp \left(-i \frac{4\pi k}{N} \right) \right] - \sum_k d_k^+ d_{-k}^+ \left[\exp \left(i \frac{2\pi k}{N} \right) + \alpha \exp \left(-i \frac{4\pi k}{N} \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

通过波戈留波夫变换,

$$\begin{aligned} \beta_k^+ &= \cos \frac{\theta}{2} d_k^+ + i \sin \frac{\theta}{2} d_{-k}, \\ \beta_{-k}^+ &= \cos \frac{\theta}{2} d_{-k}^+ - i \sin \frac{\theta}{2} d_k, \\ \beta_k &= \cos \frac{\theta}{2} d_k - i \sin \frac{\theta}{2} d_{-k}^+, \\ \beta_{-k} &= \cos \frac{\theta}{2} d_{-k} + i \sin \frac{\theta}{2} d_k^+. \end{aligned} \quad (6)$$

如果我们假定如下的关系:

$$\begin{aligned} & \sin \theta_k \left(\lambda - \cos \frac{2\pi k}{N} - \alpha \cos \frac{4\pi k}{N} \right) \\ &= \cos \theta_k \gamma \left(\sin \frac{2\pi k}{N} + \alpha \sin \frac{4\pi k}{N} \right), \\ & \sin \theta_k = \frac{\gamma \left(\sin \frac{2\pi k}{N} + \alpha \sin \frac{4\pi k}{N} \right)}{\varepsilon_k}, \\ & \cos \theta_k = \frac{\lambda - \cos \frac{2\pi k}{N} - \alpha \cos \frac{4\pi k}{N}}{\varepsilon_k}. \end{aligned} \quad (7)$$

最后得到对角化的结果

$$H = \sum_k \Lambda_k \left(\beta_{k,\lambda}^+ \beta_{k,\lambda} - \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

同时得到

$$\begin{aligned} \Lambda_k = & \left\{ \left(\lambda - \cos \frac{2\pi k}{N} - \alpha \cos \frac{4\pi k}{N} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\gamma \sin \frac{2\pi k}{N} + \alpha \gamma \sin \frac{4\pi k}{N} \right)^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

3 三体自旋相互作用效应

为了方便研究该体系的几何相位, 我们通过旋转算符操作 $U_\varphi = \prod_{j=-M}^M \exp(i\varphi\sigma_j^z/2)$, 绕着 Z 轴旋转 φ 角度, 可以得到新的哈密顿量 $H_\varphi = U_\varphi H U_\varphi^\dagger$. 因系统的能谱不依赖于 φ , 所以哈密顿量 H 和 H_φ 描述的体系的临界性质是一样的. 利用文献的方法

可以计算该系统的几何相位

$$\begin{aligned} \beta_g &= \frac{\pi}{M} \sum_{k=1}^M (1 - \cos \theta_k), \\ \cos \theta_k &= \frac{\lambda - \cos \frac{2\pi k}{N} - \alpha \cos \frac{4\pi k}{N}}{\varepsilon_k}. \end{aligned} \quad (9)$$

为了清楚地表达量子相变和几何相位的关系, 在下面的工作中, 我们引入了多体中的三体相互作用, 重点研究了几何相位及几何相位的导数随外界参数的变化行为.

在图 1 中, 我们计算了该系统中几何相位 β_g 和几何相位的一阶导数 $d\beta_g/d\lambda$, 随参量 λ 和 α 的变化曲线. 我们知道当不存在三体相互作用时, 也就是 $\alpha = 0$, 对应着纯的 XY 自旋链系统模型, 朱诗亮^[16,17] 计算了系统中几何相位 β_g 和几何相位的一阶导数 $d\beta_g/d\lambda$, 研究结果发现几何相位的一阶导数 $d\beta_g/d\lambda$, 在整个 XY 自旋链模型中, 在量子相变线 $\lambda_c = 1$, 几何相位的导数都出现奇异, 表现出非解析性特性, 进一步求解了在临界点附近的标度行为. 在我们的研究中, 由于多提中三体相互作用的引入, 发现这个奇异点会发生明显的偏移. 我们首先假设三体相互作用大于 0 ($\alpha > 0$), 跟纯的 XY 自旋链模型相比较, 这个量子相变的区域由临界线 $|\lambda| = 1$ 移动到线 $|\lambda - \alpha| = 1$ 处, 除此之外, 我们还发现了另外一条临界线, 当 $\alpha > 1/2$ 时, $\lambda = -\alpha$. 这个结果充分说明三体相互作用对基态几何相位有着很明显的影 响, 从而进一步影响该系统中的量子相变. 为了更清晰的描述这个结论, 我们画出了二维的图形.

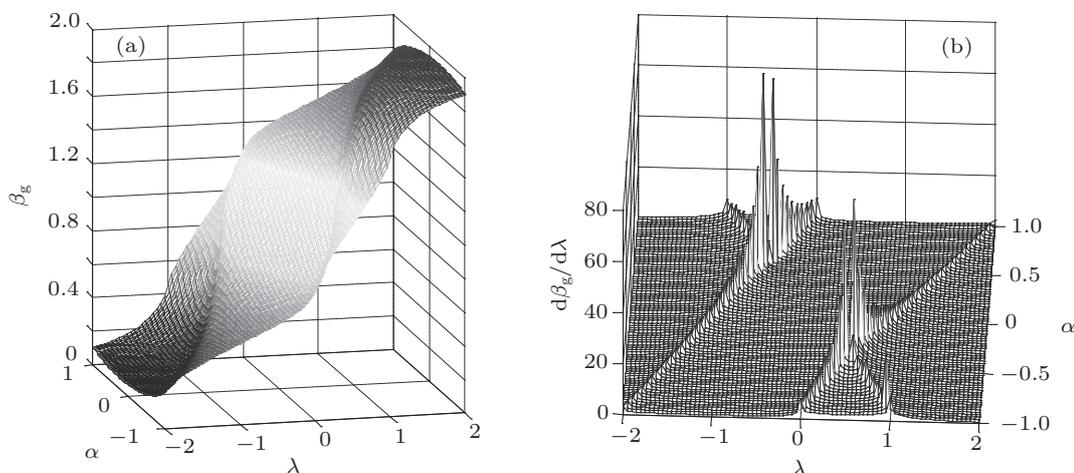


图 1 几何相位 β_g 以及几何相位的一阶导数 $d\beta_g/d\lambda$, 随参量 λ 和 α 的变化图形 ($N = 10001$)

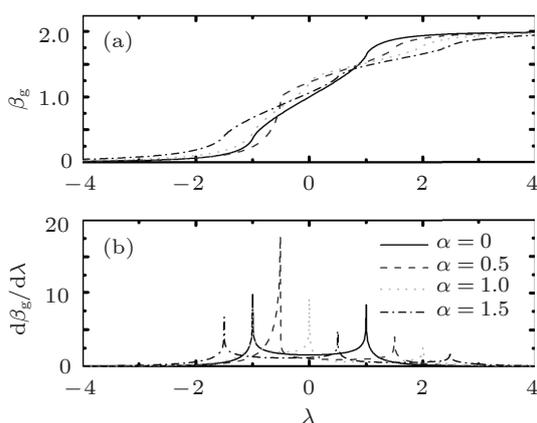


图2 几何相位 β_g 以及几何相位的一阶导数 $d\beta_g/d\lambda$, 在不同的三体相互作用下, 随参量 λ 的变化图形 ($N = 10001$)

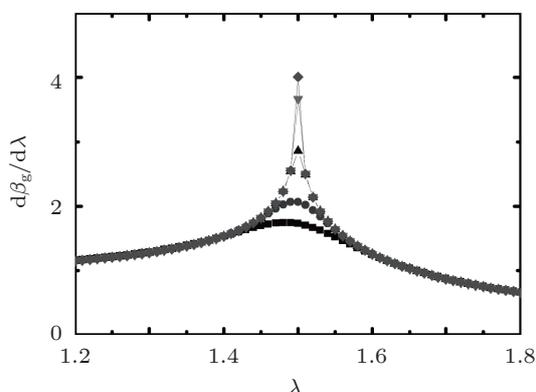


图3 几何相位的一阶导数 $d\beta_g/d\lambda$, 在临界点附近随参量 λ 的变化曲线, $\alpha = 0.5$, $N = 101, 201, 1001, 5001, 10001$. 随着系统尺寸 N 的增加, 导数的尖峰高度迅速增加

从图2中几何相位的导数计算, 我们看出几

何相位导数在临界点处表现出非解析的特性. 当 $\alpha = 0$, $\lambda = \pm 1$, 正好对应纯的 XY 自旋链模型的临界点; 当 $\alpha = 0.5$, $\lambda = -0.5, 1.5$, 当 $\alpha = 1$, $\lambda = 0, 2, -1$, 此时就出现了三个临界点. 不失一般性, 比如取 $\alpha = 0.5$ 处, 在不同系统尺寸 $N = 101, 201, 1001, 5001, 10001$ 时, 图3展示了几何相位一阶导数 $d\beta_g/d\lambda$ 随外界参数的变化曲线. 从图中可以看出, 对于有限大小的系统, 该系统并没有完全意义上的奇异点. 但是我们可以发现随着系统尺寸变的越来越大, 在不解析点处几何相位导数的数值越来越高, 并且最大值出现的位置会越接近系统中的量子相变点.

4 结论和讨论

通过引入三体相互作用强度, 研究该自旋链模型中量子相变和几何相位的关系. 结果发现三体相互作用导致纯 XY 模型中的奇异点发生明显的偏移. 不但平移相变点的位置, 并且会出现新的临界点. 研究结果充分说明了三体相互作用对基态几何相位和量子相变有着很大的影响, 有利于实验上用几何相位去探测临界现象. 在冷原子等体系, 通过控制光晶格中冷原子系统参数具有三体相互作用的自旋链模型是可以实验实现, 我们简单讨论一下实验观察到此现象的可能性, 在参数空间旋转一周可以得到一个相位, 通过改变外参量, 给出这个相位随外界参数的实验数据, 用数据拟合的方法就可以得到这个相位随参数的导数变化曲线, 得到临界点, 从而进一步得到几何相位在临界点附近的标度.

- [1] Sachdev S 1999 *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, Cambridge, England)
- [2] Osterloh A, Amico L, Falci G 2002 *Nature* **416** 608
- [3] Wu L A, Sarandy M S, Lidar D A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 250404
- [4] Yi X X, Cui H T, Wang L C 2006 *Phys. Rev. A* **74** 054102
- [5] Gu S J, Lin H Q, Li Y Q 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042330
- [6] Shan C J, Liu J B, Cheng W W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3687
- [7] You W L, Li Y, Gu S J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 022101
- [8] Chen S, Wang L, Gu S J, Wang Y P 2007 *Phys. Rev. E* **76** 061108
- [9] Zanardi P, Quan H T, Wang X G, Sun C P 2007 *Phys. Rev. A* **75** 032109
- [10] Quan H T, Song Z, Liu X F, Zanardi P, Sun C P 2006 *Phys. Rev. Lett* **96** 140604
- [11] Cheng W W, Liu J M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 012308
- [12] Zhu X, Tong P Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1623
- [13] Wang L C, Shen J, Yi X X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 50306
- [14] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **392** 45
- [15] Carollo A C M, Pachos J K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 157203
- [16] Zhu S L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 077206
- [17] Zhu S L 2008 *International Journal of Modern Physics B* **22** 561
- [18] Hama A 2006 quant-ph/0602091
- [19] Peng X, Wu S, Li J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 240405
- [20] Ma Y Q, Chen S 2009 *Phys. Rev. A* **79** 022116
- [21] Cheng W W, Shan C J 2010 *Physica B* **405** 4821
- [22] Wang L C, Yan J Y, Yi X X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040512
- [23] Yin S, Tong D M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 044303
- [24] Yi X X, Tong D M, Wang L C 2006 *Phys. Rev. A* **73** 052103

Berry phase and quantum phase transition in spin chain system with three-site interaction*

Shan Chuan-Jia[†]

(College of Physics and Electronic Science, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China)

(Received 9 April 2012; revised manuscript received 12 June 2012)

Abstract

In this paper, we diagonalize the Hamiltonian of the one-dimensional spin chain system with three-body interaction. Then we solve geometric phase of ground state in the system through a rotating operation. By the numerical calculation of the geometric phase and its derivative, we consider the three-body interaction effects on the geometric phase and quantum phase transition, the results show that the geometric phase can be well used to characterize quantum phase transition in this system, and find that three-body interaction not only can move the criticality region, but also can generate a new critical point.

Keywords: berry phase, quantum phase transition, three-site interaction

PACS: 03.65.Vf, 64.70.Tg, 75.10.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No 11105049), the Natural Science Foundation of Hubei Province (Grant Nos. Q20112501, 2011CDC010), and the Programme of Hubei Normal University (Grant No. 2010C20).

[†] E-mail: scj1122@163.com