

多进制量子图态纠缠的确定*

徐健 陈小余[†] 李海涛

(浙江工商大学信息与电子工程学院, 杭州 310018)

(2012年3月14日收到; 2012年6月7日收到修改稿)

图态是可以与数学上的图对应起来的多组分纠缠态, 图的顶点在此扮演多进制量子位而连线则表示两个多进制量子位之间的相互作用. 图态在量子纠错码、多体量子计算和单向量子计算中起重要作用. 本文系统研究多进制图态纠缠, 使用迭代计算等方法计算了局域么正变换和图同构下不等价的所有 9 点图以下的三进制图态的纠缠及部分四进制和五进制图态的纠缠, 纠缠测度可以是几何纠缠、相对熵纠缠和鲁棒性纠缠. 我们对计算结果进行了分类, 并分析了所得到的最近分离态.

关键词: 纠缠, 多进制图态, 迭代算法

PACS: 03.67.Mn, 03.65.Ud

1 引言

量子纠缠作为量子信息一种最基本的资源, 它在量子纠错、量子通信、量子密码及量子计算等领域起非常重要的作用. 至今, 已经提出了多种不同的纠缠度量方法, 其中有几何度量^[1]、相对熵纠缠^[2,3]、鲁棒性纠缠^[4]等多组分纠缠度量. 图态^[5,6]在构造量子码中起关键作用, 它是稳定子态的一个子集, 其结构可以由数学中的图简明地表示. 图态最早是由测量基与单向量子计算^[7,8]的相关问题中提出的, 作为多组分量子纠缠态的一类, 它是单向量子计算模型特定的算法资源. 作为量子多组分纠缠态的一个重要分支, 图态在量子通信和量子信息处理中将得到越来越广泛的应用.

图态纠缠的度量比一般的量子多组分态纠缠度量要相对简单, 这里因为可以采用图的语言来进行描述, 避免了繁琐的多变量极值问题. 量子比特系统图态的纠缠已经得到了广泛的研究^[9-13], 研究了图态的 Schmidt 测度^[9], 证明了(对数)几何测度、相对熵纠缠、对数鲁棒性纠缠三种纠缠测

度对图态是相等的^[10], 其上界由局域测量所能区分的正交态的个数决定^[11], 还可以在图上用最大不相连点数直接表示^[12], 局域测量上界还被应用于一般多组分纯态^[13]. 研究了非整数的量子图态纠缠及其最近乘积态^[14]. 量子多进制系统图态的研究用于多进制量子纠错码^[15,16], 同时量子多进制^[17](高维)和多组分系统^[18]也有很多实验研究. 对于量子多进制图态, 根据其特性, 我们可以首先确定纠缠的上下界^[12], 如果上下界相等即能确定纠缠量, 如果不相等则进一步计算, 从而减少了图态纠缠度量的复杂性. 下面介绍通过确定图态纠缠上下界得到纠缠值的方法. 图定义为 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{1, \dots, n\}$ 是顶点的集合, $E \in [V]^2$ 是边的集合. 在图态研究使用的图中, 不存在从一个顶点到自身的边, 对于 d 进制而言, 两个顶点之间最多只有 $d - 1$ 条边. 如果顶点 a 和 b 是同一条边的端点, 则 a 和 b 相邻. 根据图 G 中顶点之间的相邻关系, 可以定义 $n \times n$ 邻接矩阵 Γ . 矩阵元 Γ_{ab} 等于顶点 a 和 b 间连接的边的数目. 给定顶点 a , 定义所有和 a 相邻的顶点组成的集合为 a 的邻点集 $N_a := \{b \in V | \{a, b\} \in E\}$. 在图定义的基础上,

* 国家自然科学基金(批准号: 60972071)、浙江省自然科学基金(批准号: Q12F020072)和浙江省科技计划项目(批准号: 2009C31060)资助的课题.

[†] E-mail: xychen@zjgsu.edu.cn

每个顶点对应一个多进制量子位, 图态就是对应的 Hilbert 空间 $H = (C^d)^{\otimes n}$ 中的 n 量子位的纯态. 对于二进制图态有

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\mu \in \mathbf{Z}_2^n} (-1)^{\frac{1}{2}\mu\Gamma\mu^T} |\mu\rangle, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ 将其推广到 d 进制, 即得到

$$|G\rangle = \sum_{\mu \in \mathbf{Z}_d^n} \alpha_\mu |\mu\rangle, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{Z}_d = \{0, 1, \dots, d-1\}$, $\alpha_\mu = d^{-\frac{n}{2}} \omega^{\frac{1}{2}\mu\Gamma\mu^T}$, $\omega = \exp(i2\pi/d)$. 相应于二进制的量子位称为量子比特, 通常 d 进制量子位称为 qudit, 若 d 为素数 p , 即 p 进制的量子位可称为 qubit, 其中三进制的称为 qutrit. 图态是下列稳定子的唯一的本征值为 $+1$ 的共同本征态:

$$K_a = X_a Z_{N_a} = X_a \prod_b (Z_b)^{\Gamma_{ab}},$$

其中 $X = \sum_{l \in \mathbf{Z}_d} |l+1\rangle \langle l|$, $Z = \sum_{l \in \mathbf{Z}_d} \omega^l |l\rangle \langle l|$. 图态与乘积态之间的保真度为

$$f = |\langle G | (|\psi_0\rangle |\psi_1\rangle \cdots |\psi_{n-1}\rangle)| \\ = \left| \sum_{\mu} \alpha_\mu^* x_{0\mu_0} x_{1\mu_1} \cdots x_{(n-1)\mu_{n-1}} \right|, \quad (3)$$

其中

$$|\psi_i\rangle = \sum_{j=0}^{d-1} x_{ij} |j\rangle, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (4)$$

满足条件 $\sum_{j=0}^{d-1} |x_{ij}|^2 = 1$. 图态的 (对数) 几何纠缠便可以通过下式得出:

$$E_g = \min_{\phi \in \text{Pro}} (-\log_d |\langle G/\phi \rangle|^2) \\ = -\log_d \left(\max_{\phi \in \text{Pro}} f^2 \right), \quad (5)$$

其中 Pro 表示乘积态集合. 因图态是纯态, 几何纠缠对乘积态求极值即可. 这是因为分离态总是可以写成乘积态的概率和, 即分离态 $\sigma = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$, 其中 $|\phi_i\rangle$ 为乘积态. 这可以由分离态的定义 $\sigma = \sum_j q_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B$, 以及态 ρ_j^A, ρ_j^B 的谱分解而得到, 其中 q_j 为概率分布. 从而 $\langle G | \sigma | G \rangle = \sum_i p_i |\langle G | \phi_i \rangle|^2 \leq \max_{\phi \in \text{Pro}} |\langle G | \phi \rangle|^2$.

2 多进制量子图态纠缠上下界的确定

2.1 图态的纠缠上界

仿照量子比特图态有关公式的推导^[12], 对于素数进制的图态而言, 有下式成立:

$$N \leq D_H / (1 + R(|G\rangle)) = D_H / p^{E_R(|G\rangle)} \\ = D_H / p^{E_g(|G\rangle)}, \quad (6)$$

其中 N 是使用局域变换和经典通信所能区分的图态基量子态 $\{|G_i\rangle, i = 1, \dots, N\}$ 的最大个数, 图态基是在图态上作用泡利 Z 算符的结果; $D_H = d^n$ 是总的希尔伯特空间的维数; $E_g(|G\rangle), E_R(|G\rangle), R(|G\rangle)$, 分别是几何纠缠、相对熵纠缠以及鲁棒性纠缠, 其定义与量子比特系统类似, 只是将对数的底改为 d . 对于图态而言, 它的几何纠缠、相对熵纠缠及对数鲁棒性纠缠是相等的, 即 $E \equiv E_g(|G\rangle) = E_R(|G\rangle) = \log_d(1 + R(|G\rangle))$.

设在图中至多可以找到 A 个点, 相互之间无连线, 则可以对该 A 个点同时做 X 测量, 得到这些点上 X 算符的本征值, 对余下的所有点进行 Z 测量, 并把测量结果通过经典信道传输给 A 个点, 因此我们可以通过局域测量和经典通信同时测得 A 个点的稳定子算符的本征值, 对图态中的量子态进行重新排序得

$$|G_{k_1 k_2 \dots k_A 00 \dots 0}\rangle = Z_1^{k_1} Z_2^{k_2} \cdots Z_A^{k_A} |G\rangle, \quad (7)$$

可以确定我们测量得到的就是这些态之一, 因此, 我们通过 LOCC 能区分的相互正交的态的数目是 $N = d^A$, 由 (6) 式可得纠缠上界

$$E \leq E_{\text{LOCC}} = n - \log_d N = n - A, \quad (8)$$

因此, 寻求纠缠上界问题就简化为求图态所基于图的最大不相邻点的集合. 当得到这个最大顶点数时, 我们就可以使用顶点数目 n 减去这个最大不相邻顶点数, 得到纠缠的上界.

2.2 图态的纠缠下界

对于多进制量子图态的纠缠下界, 可以通过放松完全可分的限制而得到. 定义一个二组分划分的几何纠缠测度 E_{gbi} , 因为完全可分态是二组分划分态的一个子集, 根据几何纠缠的定义可得

$$E_g \geq E_{gbi}. \quad (9)$$

寻找下界的方法就是找一个合适的二组分划分法使得两组分纠缠尽量大, 纯态两组分划分的纠缠就是其约化态的熵, 可以直接计算. 更简单地, 我们可以利用图来得到, 对于较复杂的图, 可以采用图态的局域补变换使图得到简化. 可以采用控制相位门消去组分内的所有连线, 同时采用局域补变换消去二组分之间同一顶点对另一组分中多个点的连线, 剩下的二组分之间的成对连线的数目就是二组分纠缠值. 通过适当的划分和变换, 我们可以得到最优数目的扩展 Bell 态, 即可以得出二组分划分最大纠缠值, 它决定图态的下界. 求下界的一种实用的次优方法是在图上寻找最大不相邻边的数目, 每一条边代表一个扩展 Bell 态, 不相邻即代表独立.

3 图态纠缠的计算

3.1 迭代算法

图态 $|G\rangle$ 的纠缠可以用 (5) 式计算, 设

$$L = |f|^2 - \sum_i \lambda_i \left(\sum_j |x_{ij}|^2 - 1 \right), \quad (10)$$

其中 λ_i 是拉氏乘子. 对上式等号左右求 x_{ij} 的偏导数, 得到

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} f^* - \lambda_i x_{ij}^* = 0. \quad (11)$$

因此我们可以得出递推公式

$$x_{ij}^* = \frac{f^*}{\lambda_i} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}, \quad (12)$$

具体计算可以先任意给定 $T_i = f^*/\lambda_i$ 的值, 对给定的 i , 计算出各 x_{ij}^* 然后用归一化条件 $x_{ij}^* \leftarrow x_{ij}^*/(\sum_j |x_{ij}^*|^2)^{1/2}$ 重新赋值. 迭代算法达到稳定状态就结束. 注意到

$$f = \sum \alpha_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}}^* x_{0\mu_0} x_{1\mu_1} \cdots x_{(n-1)\mu_{n-1}}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} = \sum_{\substack{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \\ \mu_{i+1}, \dots, \mu_{n-1}}} \alpha_{\mu_0, \dots, \mu_{i-1}, j, \mu_{i+1}, \dots, \mu_{n-1}}^* \times x_{0\mu_0} \cdots x_{(i-1)\mu_{i-1}} x_{(i+1)\mu_{i+1}} \cdots x_{(n-1)\mu_{n-1}}. \quad (14)$$

这样通过迭代, 我们得到最后一轮稳定的 x_{ij} , 可以代入方程则得到 f , 进而求得纠缠值 E .

3.2 改进的迭代算法

对于大多数图态, 使用上述迭代方法就可以成功计算出其纠缠值, 然而, 也存在一些图态, 它们在迭代的过程中可能会出现死循环、嵌套循环、以及迭代效率低下等问题. 为此我们提出了新的解决方案, 即在迭代的过程中, 我们不再使用上一轮 ($k-1$ 轮) 的 $x_i^{(k-1)}$ 直接进入下一轮迭代, 而是用上一轮的 $x_i^{(k-1)}$ 以及上上一轮的 $x_i^{(k-2)}$ 的线性组合 $x_i^{(k)} = ax_i^{(k-1)} + bx_i^{(k-2)}$, 其中 a, b 为正实数且满足 $a + b = 1$, $x_i = (x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{i,d-1})^T$. 通过这样的算法改进, 迭代时就能成功地规避死循环等问题, 另外, 它大大地加快了程序迭代的效率, 改进前可能要迭代 100 次才能得到稳定值的情况在改进后可能只需要 20 次, 节约了迭代时间.

4 qutrit 图态纠缠

研究图的局域么正变换可以利用所谓局域补变换, 局域补不等价的量子 qutrit 图态在文献 [19] 已经给出, 去除其中的非连通图, 并按顺序编号, 则其中 2 点与 3 点图各 1 个、4 点图 3 个、5 点图 5 个、6 点图 21 个、7 点图 73 个、8 点图 659 个, 共计 763 个. 9 点图有 17588 个, 而至于 10 点图则有上百万个. 5 点以内连通图如图 1 所示. 我们已用局域补变换对图进行了简化.

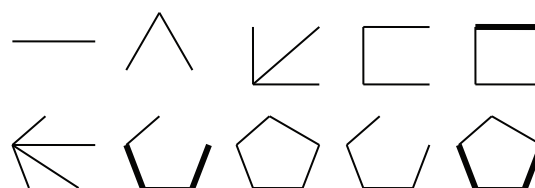


图 1 依次为 2 点图, 3 点图, 3 个 4 点图, 5 个 5 点图 (细实线表示一条邻接线, 粗实线表示两条邻接线)

由图可以写出邻接矩阵, 例如最后一个图的邻接矩阵为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

进而由 (1) 式得到图态.

在计算图态纠缠上下界之后, 我们发现纠缠上下界相等的 2—9 点图图态共有 915 个, 分布如表 1 所示. 对其余图态进行迭代计算, 得到其精确的纠缠值. 通过计算, 发现有一部分图态, 其纠缠值为整数; 剩下的图态, 它们的纠缠值是以小数结尾的, 只有有限的几种小数出现. 见表 2, 其中 k 为整数.

表 1 2—9 点图图态纠缠上下界相等的图态

E	图态数量
1	8
2	42
3	189
4	676

表 2 2—9 点图图态纠缠上下界不相等的图态

E	图态数量	示性数
k	14768	0
$k + 0.9583$	2022	1
$k + 0.9628$	339	3
$k + 0.7381$	168	2
$k + 0.6883$	138	4
$k + 0.6735$	1	—

对于 $E = k + 0.9583$ 这类图态, 其最简单的图态是 5 顶点的 5 环图, 两根连线是双股连线 ($\Gamma_{ab} = 2$), 这两根连线不共顶点, 其中有三根连线是单股连线 ($\Gamma_{ab} = 1$). 设将两根单股连线的共同顶点标记为第一个 qutrit, 其余顺序编号, 则最近分离态 (图态在其上的投影绝对值最大的分离态) 为

$$\Phi = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes |\psi_4\rangle \otimes |\psi_5\rangle,$$

其中

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |0\rangle + e^{-i\frac{2\pi}{3}} |1\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= |0\rangle + |2\rangle, \\ |\psi_3\rangle &= |0\rangle + e^{i\frac{2\pi}{3}} |2\rangle, \\ |\psi_4\rangle &= |1\rangle + |2\rangle, \\ |\psi_5\rangle &= |0\rangle - 2e^{i\frac{2\pi}{3}} |1\rangle + e^{-i\frac{2\pi}{3}} |2\rangle, \end{aligned}$$

为分离态的各 qutrit(未归一化). 相应的纠缠可以严

格得出为

$$E = \frac{3}{2}(3 - \sqrt[3]{4}) + 2\log_3(3 - \sqrt{2}) \approx 2.9583, \quad (15)$$

如果我们忽略连线的股数, 仅以连通和非联通计, 得到的简化图称为骨架图, 则这里的 qutrit 五环骨架图与量子比特图态情况下的五环图 (第 8 号图) 是一样的. 注意到最近乘积态中第 5 个 qutrit $|\psi_5\rangle$ 是三个能级态的叠加, 而叠加系数的绝对值之比为 1:2:1, 对下文所述的其他图态, 我们可能得到其最近分离态中包含着 $|\psi_5\rangle$ 的变型, qutrit 包含的三个能级态的叠加而叠加系数的绝对值之比为 1:1:2 或 2:1:1, 我们将最近分离态中包含的这类 qutrit 的个数叫做图态的示性数, 各类图态的示性数见表 2, 同时纠缠为整数的图态的示性数为 0.

对于 $E = k + 0.9628$ 这类图态, 纠缠可利用最近分离态严格得到为, 例如

$$E = 2\sqrt{2} + \frac{1}{3}\log_3(3 - \sqrt[3]{3}) \approx 2.9628, \quad (16)$$

对应的骨架图包含 6 顶点的 3 棱柱图, 即量子比特情形下的第 19 号图.

对于 $E = k + 0.7381$ 这类图态, 严格的纠缠值可得到为, 例如

$$E = 5 - 3^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{2}\log_3 2 \approx 4.7381, \quad (17)$$

对应的骨架图包含 7 顶点的图, 不过对量子比特系统, 7 量子比特图不出现新的纠缠为小数的类型, 因此这是 qutrit 系统出现的新情况.

对于 $E = k + 0.6883$ 这类图态, 严格的纠缠值可得到为, 例如

$$E = 2 + \frac{2}{3}\log_2(3 - \sqrt[3]{3}) + 2\log_3 2 \approx 1.6883, \quad (18)$$

有些图可以明显看出来的包含有子图其骨干图为 6 顶点的 3 棱柱图, 但是子图的双股的位置和数量与 $E = k + 0.9628$ 的这类图态不同.

对于 $E = k + 0.6735$ 这类图态, 仅在 9 点图中发现一例, 严格的纠缠值可得到为

$$\begin{aligned} E &= 5 + \frac{3}{2}\log_3(3 - 2^{\frac{2}{3}}) + \frac{1}{2}\log_3(3 - 3^{\frac{1}{3}}) \\ &\approx 5.6735, \end{aligned} \quad (19)$$

该图的最近分离态有简单的规律, 但是不能用示性数表示.

表3 四进制图态纠缠

图态编号 No. 4.	E	图态编号 No. 4.	E	图态编号 No. 4.	E
1	1	13	2	25	2
2	2	14	2	26	3
3	1	15	2.5	27	3.5
4	1.5	16	2.5	28	3
5	1.5	17	2.5	29	3
6	2	18	2	30	3
7	1	19	2.5	31	3
8	2	20	1.5	32	3
9	2.5	21	1	33	3
10	2.4367	22	2	34	3
11	2.5	23	2	35	3
12	3	24	2	—	—

5 部分多进制 qudit 图态纠缠

下面来看一下四进制和五进制的情况. 连通且局域补不等价的图态数据同样来源于文献 [19].

5.1 四进制图态纠缠

由于四进制图态的构成太复杂, 数据库 [19] 中也只有 3—6 qudit 的图态共计 35 个, 将其转换为矩阵, 编号为 No. 4.1—No. 4.35 并直接计算其纠缠值, 结果列在表 3 中.

我们发现, 仅 No. 4.10 的尾数呈现出非整数状态 (以 0.5 结尾的除外), 它的纠缠为

$$E_{\text{No.4.10}} = 1 + 2 \log_2(3 - 3^{1/3}) + \frac{1}{4} \log_3 2 \approx 2.4367, \quad (20)$$

我们可以看到, 有 10 个图态的纠缠值是以 0.5 结尾的, 之所以会出现这样的情形, 是因为对于一个四进制图态而言, 我们定义它的几何纠缠是取 4 为底的对数. 注意到确定一个图态的纠缠上下界时, 方法仅限于 p 进制 (p 为素数) 图态. 在对四进制图态求纠缠时, 我们并没有计算其纠缠上下界, 其纠缠可能并不落于通过寻找最大不相邻顶点和最大不相邻边确定的上下界之间.

5.2 五进制图态纠缠

对于五进制图态, 数据库 [19] 中也只有 3—6

qudit 的图态 49 个, 同样将其转换为邻接矩阵并依次编号为 No.5.1—No.5.49. 直接使用迭代算法计算其纠缠值如表 4 所示.

求其纠缠上下界, 得到的值如表 4 中括号内数字所示, 其中 $E_u = n - A$ 为上界, 其中 $E_l = E_{gbi}$ 为下界, 这进一步验证了纠缠上下界求法适用于素数进制下的情形.

6 结论

本文在二进制纠缠计算的基础上, 将其方法推广到素数多进制的情况下, 提出图态纠缠上下界限和迭代计算几何纠缠的方法. 该算法是通过计算图态与其最近可分离纯态 (乘积态) 的最大保真度得来的. 通过迭代得出图态的最近乘积态, 进而计算可得图态的纠缠. 对于 d 进制, 我们采用对数的底为 d , 显示出纠缠值的规律. 计算了 2—9 qutrit 图态的纠缠, 对得到的非整数纠缠值给出了严格的表达式, 对其最近乘积态进行了分析, 结果表明在骨干图的意义下, 与量子比特系统可以联系起来, 特别在 5 环图和 6 点三棱柱图方面, 另外出现 7 点图和一例 9 点图的纠缠不是整数的新情况; 非整数纠缠的 qutrit 图态只有有限几类, 除一例 9 点图外, 其他都可以用我们提出的图态示性数进行分类. 计算了四、五进制图态的纠缠, 表明上下界对四进制不适用, 对五进制是正确的, 也就是二进制下的纠缠上下界能推广到素数进制, 但不能推广到四进制.

表 4 五进制图态纠缠及其上下界

图态 No.5.	$E(E_u, E_1)$	图态 No. 5.	$E(E_u, E_1)$	图态 No. 5.	$E(E_u, E_1)$
1	1(1, 1)	18	1(3, 1)	35	3(4, 3)
2	2(2, 2)	19	3(3, 3)	36	3(4, 3)
3	1(1, 1)	20	3(3, 2)	37	2(2, 2)
4	2(2, 2)	21	2(3, 2)	38	3(4, 3)
5	2(2, 2)	22	2(2, 2)	39	3(4, 3)
6	2(2, 2)	23	3(4, 3)	40	3(4, 3)
7	2(2, 2)	24	3(3, 3)	41	3(3, 3)
8	1(1, 1)	25	2(2, 2)	42	3(4, 3)
9	3(3, 2)	26	3(3, 3)	43	3(4, 3)
10	2.8485(3, 2)	27	2(2, 2)	44	3.7796(4, 3)
11	3(3, 2)	28	2(2, 2)	45	3(4, 3)
12	2(3, 2)	29	3(4, 3)	46	3.7318
13	3(4, 3)	30	2(2, 2)	47	3.6301(4, 3)
14	3(3, 3)	31	2(2, 2)	48	3.8009(4, 3)
15	3(3, 3)	32	2(2, 2)	49	3.7539(4, 3)
16	3(3, 3)	33	3(3, 3)	—	—
17	3(3, 3)	34	3(3, 3)	—	—

- [1] Wei T C, Goldbart P M 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042307
- [2] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [3] Vedral V, Plenio M B 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1619
- [4] Vidal G, Tarrach R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 141
- [5] Schlingemann D, Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 012308
- [6] Cross A, Smith G, Smolin J A, Zeng B 2009 *IEEE Trans. Inf. Theory* **55** 433
- [7] Raussendorf R, Briegel H J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5188
- [8] Raussendorf R, Browne D E, Briegel H J 2003 *Phys. Rev. A* **68** 022312
- [9] Hein M, Eisert J, Briegel H J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 062311
- [10] Hayashi M, Markham D, Muraio M, Owari M, Virmani S 2008 *Phys. Rev. A* **77** 012104
- [11] Hayashi M, Markham D, Muraio M, Owari M, Virmani S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 040501
- [12] Markham D, Miyake A, Virmani S 2007 *New. J. Phys.* **9** 194
- [13] Jiang L Z, Chen X Y, Ye T Y 2011 *Phys. Rev. A* **84** 042308
- [14] Chen X Y 2010 *J. Phys. B* **43** 085507
- [15] Hu D, Tang W D, Zhao M S, Chen Q, Yu S Y, Oh C H 2008 *Phys. Rev. A* **78** 012306
- [16] Looi S Y, Griffiths R B 2011 *Phys. Rev. A* **84** 052306
- [17] Yin J, Qiang Y, Li X Q, Bao X H, Peng C Z, Yang T, Pan G S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060308 (in Chinese) [印娟, 钱勇, 李晓强, 包小辉, 彭承志, 杨涛, 潘阁生 2011 物理学报 **60** 060308]
- [18] Yan Z H, Jia X J, Xie C J, Peng K C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 014206 (in Chinese) [闫智辉, 贾晓军, 谢常德, 彭堃堃 2012 物理学报 **61** 014206]
- [19] Danielsen L E, <http://www.ii.uib.no/~larsed/nonbinary/>

Determining the entanglement of quantum nonbinary graph states*

Xu Jian Chen Xiao-Yu[†] Li Hai-Tao

(College of Information and Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

(Received 14 March 2012; revised manuscript received 7 June 2012)

Abstract

Graph states are multipartite entangled states that correspond to mathematical graphs, where the vertices of the graph now play the role of quantum multilevel systems and edges represent interactions of the systems. Graph states are the basis of quantum error correction and one-way quantum computer. We systematically study the entanglement of non-binary graph states. Using iterative algorithm and entanglement bounds, we calculate the entanglement of all the ternary graph states up to nine vertices and parts of quaternary and quinary graph states modulo local unitary transformations and graph isomorphisms. The entanglement measure can be the geometric measure, the measure of relative entropy of entanglement or the measure of logarithmic robustness. We classify the graph states according to the entanglement values obtained. The closest product states obtained in the calculations are studied.

Keywords: entanglement, nonbinary graph state, iterative algorithm

PACS: 03.67.Mn, 03.65.Ud

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60972071), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Q12F020072), and the Zhejiang Province Science and Technology Project (Grant No. 2009C31060).

[†] E-mail: xychen@zjgsu.edu.cn