环状非有心球谐振子势场赝自旋对称性的三对角化表示

张民仓[†]

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710062)

(2012 年 5 月 4 日收到; 2012 年 6 月 20 日收到修改稿)

提出一个包含非有心电耦极矩势的环状谐振子模型, 在能够负载波动算子三对角化矩阵表示的完全平方可积 L^2 空间讨论了这一势场的赝自旋对称性. 利用三对角化矩阵方案, 给出了波函数角向分量和径向分量展开系数满足的三项递推关系式. 角向波函数和径向波函数分别以 Jacobi 多项式和 Laguerre 多项式表示, 由径向分量展开系数递推关系式的对角化条件得到束缚态的能量谱. 并以 Descartes 多项式的符号法则讨论了能量方程的代数结构.

关键词: 非有心电耦极矩, 三对角化表示, Dirac 方程, 赝自旋对称性

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 02.30.Gp

1 引 言

在核物理学的研究中, 赝自旋对称性的提出已有 40 多年的历史, 最初提出这一概念是用以解释在球形核中观察到的单核子某些能级间的准简并现象 [1,2]. 具有非相对论量子数 $(n_r, \ell, j = \ell + 1/2)$ 和 $(n_r - 1, \ell + 2, j = \ell + 3/2)$ 的两个能级是准简并的, 其中 n_r, ℓ, j 分别表示单核子的径向、轨道及总角动量量子数, 当 n_r, ℓ 固定时, 这样的一对准简并态被称之为赝自旋相伴态. 球形核中单核子能级的这种双重结构能够用赝轨道角动量 $\tilde{\ell} = \ell + 1$ 与赝自旋角动量 $\tilde{s} = 1/2$ 的耦合 $j = \tilde{\ell} \pm \tilde{s}$ 描述. 赝自旋相伴态具有相同的赝轨道角动量量子数 $\tilde{\ell}$, 例如赝自旋相伴态 $(n_r p_{3/2}; (n_r - 1) f_{5/2})$, $\tilde{\ell} = 2$; $(n_r d_{5/2}; (n_r - 1) g_{7/2})$, $\tilde{\ell} = 3$; $(n_r f_{7/2}; (n_r - 1) h_{9/2})$, $\tilde{\ell} = 4$, 等 [3]. 赝自旋对称性很好地解释了核物理学中的许多现象 [4−6] .

三维球谐振子模型是一个可精确求解的势函数, 在量子力学的建立和发展初期起到了重要的奠基作用并在许多领域有着广泛的应用 [7]. 例如球谐振子作为有心势模型, 很好地描述了核的单粒子运动及球形变和轴形变核的壳层结构 [8,9]. 近年来, 1/2 自旋粒子在相对论性球谐振子势场中的运动引起了人们的注意. 陈惕生等 [10] 在 Dirac 哈密顿量中引入空间坐标平方函数的标量势 $S(\boldsymbol{r})$ 和矢量势 $V(\boldsymbol{r})$, 建立了一个类谐振子势的二阶微分方程. 在 $\Delta = V(\boldsymbol{r}) - S(\boldsymbol{r}) = 0$ 的条件下解析地得到这一方程的束缚态解, 与在前 Kukulin[11] 的结论相一致的, 并且在 $\Sigma = V(\boldsymbol{r}) + S(\boldsymbol{r}) = 0$ 的条件下方程也有解析解. Ginocchio 在自旋对称性 $\Delta = V(\boldsymbol{r}) - S(\boldsymbol{r}) = 0$ 的条件下, 求解了三轴对称, 轴对称及球谐振子势的 Dirac 方程, 并由此讨论了嵌入在原子核中反核子的光谱结构 [12]. 然而考虑到原子核实际上是偏离轴对称或球对称谐振子模型, 人们提出了一类非谐振子模型, 它们是在谐振子上附加其他形式的势函数构成 [13−15]. Lisboa 等 [16] 研究了普遍的 Dirac 振子势场中 1/2 自旋粒子的运动, 得到了相应的 Dirac 方程的束缚态解和能量本征值, 显示了在 $\Delta = 0$ 和 $\Sigma = 0$ 的条件下 Dirac 振子势的自旋对称性和赝自旋对称性.

带电粒子与非有心电耦极矩势 $V(r,\theta) = \cos\theta/r^2$ (球坐标系) 间的相互作用是物理学的基础问题, 在核物理学和分子物理学的发展初期就

† E-mail: mincangzhang@snnu.edu.cn

得到人们的重视 [17,18]. 在后的理论研究和实验发现证明当凝结分子的恒电耦极矩超过某个最小的临界值后, 电子俘获就会出现 [19−22], 这引起人们对非有心电耦极矩势的重新审视. 然而, 在上面提及的相关研究的问题中并未包括非有心电耦极矩势. 我们认为这一事实的主要原因有可能是在 Alhaidari 利用三对角化矩阵方案得到非有心电耦极矩势的严格解析解之前 [23], 人们一直认为这一势场并不属于已有的可精确求解函数的范畴.

一般地说, 环状非有心势场具有如下所示的形式:

$$V(\boldsymbol{r}) = V_r(r) + r^{-2}V_\theta(\theta), \tag{1}$$

其中

$$V_r(r) = \frac{A'}{r} + \frac{B'}{r^2} + C'r^2,$$
$$V_\theta(\theta) = \alpha'\cos\theta + \frac{\beta' + \gamma'\cos\theta}{\sin^2\theta}. \tag{2}$$

于是, 我们能通过选择合适的势场参数 $\{A', B', C', \alpha', \beta', \gamma'\}$ 来处理各种不同的特殊情况. 例如, 文献 [14] 所讨论的问题对应于势场参数 $A' = \alpha' = \gamma' = 0$. 如果使得 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, 便可发现我们在前的工作 [24] 对应于势场参数 $B' = -\beta'$. 在本文的研究中, 如果选取势场参数 $A' = B' = \gamma' = 0$, 则可以给出如下所示的另一新的环状非有心电耦极矩势模型:

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 + \frac{\hbar^2\sigma\cos\theta}{Mr^2} + \frac{\hbar^2\eta}{Mr^2\sin^2\theta}, \tag{3}$$

其中的 M, ω 分别表示粒子的静质量和频率. 参数 σ 为电偶极矩, η 是与势函数环状性质相关的参数.

本文简要介绍 Alhaidari 提出的三对角化矩阵方案及与之相联系的 L^2 空间, 在赝自旋对称性条件下把环状非有心电耦极矩势函数 (3) 满足的 Dirac 方程分解为角向分量和径向分量. 利用三对角化矩阵方案得到角向波函数和径向波函数展开系数满足的三项递推关系, 并由径向波函数展开系数递推关系的对角化条件得到其束缚态的能谱结构. 最后, 利用 Descartes 的多项式符号法则讨论了能量方程的代数结构.

2 L^2 空间及其基函数

最近, Alhaidari 提出和建立了求解波动方程的三对角化矩阵方案, 其主要动机和目的是为了寻求那些不能由传统方法 (对角化方案) 求解问题的波动方程的解析解. 例如三维非有心电耦极矩势 [25,26], 二维电四极矩势 [27], 一维单波双曲函数势 [28], 以及 Yukawa 势 [29]. 当然, 三对角化矩阵方案也必然能给出所研究问题的传统解 [30]. 三对角化矩阵方案并不要求本征值方程的波动算子有对角化表示, 只需波动算子的矩阵表示是三对角化的并具有对称性. 即是说, 波动算子作用于函数空间的基上应具有普遍形式 $(H-E)|\phi_m\rangle \approx |\phi_m\rangle + |\phi_{m-1}\rangle + |\phi_{m+1}\rangle$, 并且满足

$$\langle\phi_n|H-E|\phi_m\rangle = (a_n - z)\delta_{n,m} + b_n\delta_{n,m-1} + b_{n-1}\delta_{n,m+1}. \tag{4}$$

其中的 z 和系数 $\{a_n, b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是实数, 并且一般是能量, 角动量及势场参数的函数. 利用本征值方程 $(H-E)|\psi\rangle = 0$ 可以把波函数 $|\psi\rangle$ 展开为 $\varSigma_m f_m|\phi_m\rangle$, 并由基函数的左投影 $\langle\phi_n|$ 得到波函数展开系数满足的三项递推关系

$$zf_n = a_nf_n + b_{n-1}f_{n-1} + b_nf_{n+1}. \tag{5}$$

于是求解波动方程便转化为寻求波函数 ψ 的展开系数满足的一个三项递推关系式. 在大多数情况下, 这一递推关系容易由我们熟知的正交多项式得到. 显然, 由方程 (4) 能够看出体系的分立谱容易由递推关系式的对角化得到. 这要求对于全部的指标数 n, 有

$$b_n = 0, \quad a_n - z = 0. \tag{6}$$

在坐标为 x 的组态空间, 波函数 $\psi_E(x)$ 可以展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(E)\phi_n(x)$, 而与此相联系的 L^2 空间的基函数可以取为

$$\phi_n(x) = A_nw_n(x)P_n(x). \tag{7}$$

其中的 A_n 是归一化常数, $P_n(x)$ 是与坐标 x 相关的 n 阶多项式, $w_n(x)$ 为符合条件 $w_n(x_\pm) = 0$ 的权重函数. $x_-(x_+)$ 分别为组态空间的左、右边界条件. 通常在三对角化矩阵方案里, 两类组态空间是经常用到的. 一类空间的边界 $x_\pm$ 是有限的, 并且有

$$w_n(x) = (x - x_-)^\alpha(x - x_+)^\beta,$$
$$P_n(x) = {}_2F_1(-n, b, c; x). \tag{8}$$

而另一类空间是半边有界的, 这里 x_- 有界, x_+ 无界并具有性质

$$w_n(x) = (x - x_-)^\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta(x - x_-)},$$

$$P_n(x) = {}_1F_1(-n, c; x), \tag{9}$$

其中的 ${}_2F_1(-n, b, c; x)$ 为超几何函数, 而 ${}_1F_1(-n, c; x)$ 为合流超几何函数. 对于束缚态, 参数 α, β, b 及 c 都是实的, α 和 β 是正的. 它们通常都与相应问题的物理参数有关, 对于束缚态也与指标数 n 有关.

3 Dirac 方程与赝自旋对称性

具有静质量 M 和总能量 ε 的自旋为 1/2 的粒子, 在引力标量势 $S(\boldsymbol{r})$ 和斥力矢量势 $V(\boldsymbol{r})$ 中运动时满足与时间无关的 Dirac 方程为 ($\hbar = c = \omega = 1$)

$$H_{\mathrm{D}}\psi = \varepsilon\psi, \tag{10}$$

其中的 Dirac 哈密顿量为

$$H_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta M + \nu, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{12}$$

这里的 $\boldsymbol{\sigma}$ 为三维矢量, 其分量是 Pauli 矩阵. 方程 (11) 中的矩阵势 ν 一般可看作 16 个线性无关矩阵的线性组合, 这 16 个矩阵按其在 Lorentz 变换下的性质可以分为标量, 赝标量, 矢量, 赝矢量和张量 [31]. 在下面的研究中, 矩阵势 ν 仅含有标量势和矢量势. 在 Pauli-Dirac 表象中, 使得

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{13}$$

则由方程 (10) 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi &= [\varepsilon - M - \varSigma]\varphi, \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varphi &= [\varepsilon + M - \varDelta]\chi. \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\varSigma = V(\boldsymbol{r}) + S(\boldsymbol{r})$, $\varDelta = V(\boldsymbol{r}) - S(\boldsymbol{r})$. 在赝自旋对称性条件下 ($\varSigma = 0$), 方程 (14) 变为

$$[\boldsymbol{p}^2 - (\varepsilon^2 - M^2) + \varDelta(\varepsilon - M)]\chi = 0. \tag{15}$$

若取 $\varDelta$ 为 (3) 式所定义的环状非有心电耦极矩势模型, 整理后可得 Dirac 旋量的下分量 χ 满足的方程为

$$\begin{aligned} &\bigg[\boldsymbol{p}^2 - (\varepsilon^2 - M^2) + (\varepsilon - M)\bigg(\frac{1}{2}Mr^2 + \frac{\sigma\cos\theta}{Mr^2} \\ &+ \frac{\eta}{Mr^2\sin^2\theta}\bigg)\bigg]\chi(\boldsymbol{r}) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

在球坐标系下, Dirac 旋量的下分量 χ 可以写为下面的形式:

$$\chi(r, \theta, \phi) = r^{-1}R(r)\varTheta(\theta)\varPhi(\phi)\tilde{\chi}_s, \tag{17}$$

其中 $s = \pm 1/2$, $\tilde{\chi}_s$ 表示自旋向上或自旋向下的旋量. 把方程 (17) 代入方程 (16), 得到下面的一组二阶微分方程:

$$\begin{aligned} &\bigg[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{2}(\varepsilon - M)Mr^2 + \frac{2E_\theta}{r^2} \\ &- (\varepsilon^2 - M^2)\bigg]R(r) = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\bigg[-\frac{1}{2}(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \bigg(\frac{\varepsilon - M}{2M}\bigg)\sigma x \\ &+ \frac{(\varepsilon - M)\eta/2M + E_\phi}{1 - x^2} - E_\theta\bigg]\varTheta(x) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\bigg(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2} + 2E_\phi\bigg)\varPhi(\phi) = 0. \tag{20}$$

这里 $x = \cos\theta$, E_θ 和 E_ϕ 为无量纲的分离常数. Dirac 旋量的下分量波函数 χ 具有的平方可积性要求, 并注意下式中的绝对值符号的大小:

$$\begin{aligned} \int |\chi|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \int_0^\infty |R|^2 \mathrm{d}r \int_{-1}^1 \Big|\varTheta\Big|^2 \mathrm{d}x \\ \times \int_0^{2\pi} \Big|\varPhi|^2 \mathrm{d}\phi. \end{aligned} \tag{21}$$

波函数 χ 的分量要满足边界条件: $R(0) = R(\infty) = 0$, $\varPhi(\phi) = \varPhi(\phi + 2\pi)$, $\varTheta(0)$ 与 $\varTheta(\pi)$ 有限. 方程 (20) 满足边界条件的归一化解为

$$\varPhi_\varLambda(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(\pm\mathrm{i}\varLambda\phi\Big), \quad \varLambda = 0, 1, 2, \cdots \tag{22}$$

给出了 $E_\phi = \varLambda^2/2$. 量子数 $\varLambda$ 是赝轨道角动量在对称轴上的投影 [32].

4 Dirac 方程的精确解

首先求解 $\chi(r, \theta, \phi)$ 的 θ 分量满足的方程 (19). 由三对角化矩阵方案, 我们可以在一个完全平方可积的基函数 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ 上, 把 θ 分量波函数 $\varTheta(\theta)$ 展开为 $\varTheta(\theta) = \varSigma_{n=0}^\infty f_n^\varLambda(E_\theta)\varphi_n(x)$, 基函数 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ 必须满足组态空间坐标 $x \in [-1, +1]$ 的边界条件. 通常可取

$$\varphi_n(x) = A_n(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta P_n^{(\mu,\nu)}(x). \tag{23}$$

$P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ 是 n 阶 Jacobi 多项式, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 实的无量纲参数 $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\mu, \nu > -1$. 需要指出的是 (23) 式中的参数 β 与方程 (11) 中的 β 并不相

同. A_n 是与 Jacobi 多项式 $P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ 相关的归一化常数

$$A_n =\sqrt{\frac{(2n+\mu+\nu+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\mu+\nu+1)}{2^{\mu+\nu+1}\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(n+\nu+1)}}. \tag{24}$$

如果定义 θ 分量方程 (19) 的哈密顿量为

$$H_\theta = -\frac{1}{2}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\varepsilon - M}{2M}\right)\sigma x + \frac{(\varepsilon - M)\eta/2M + E_\phi}{1-x^2}, \tag{25}$$

利用下面给出的 Jacobi 多项式满足的微分公式

$$\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - [(\mu+\nu+2)x+\mu-\nu]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + n(n+\mu+\nu+1)\right\}P_n^{(\mu,\nu)} = 0, \tag{26}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\mu,\nu)} = -n\left(x+\frac{\nu-\mu}{2n+\mu+\nu}\right)P_n^{(\mu,\nu)} + 2\frac{(n+\mu)(n+\nu)}{2n+\mu+\nu}P_{n-1}^{(\mu,\nu)} = 0. \tag{27}$$

则 θ 分量波动算子 $(H_\theta - E_\theta)$ 作用于基函数 (23), 可得

$$\begin{aligned}&|H_\theta - E_\theta|\varphi_n\rangle \\ =&\Bigg[\frac{n}{2}\left(x+\frac{\nu-\mu}{2n+\mu+\nu}\right)\left(\frac{\mu-2\alpha}{1-x}+\frac{2\beta-\nu}{1+x}\right) \\ &- \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{\beta^2}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &+ \left(\alpha\beta + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{n}{2}(n+\mu+\nu+1) \\ &+ \frac{Cx}{2} + \frac{D+\Lambda^2}{2(1-x^2)} - E_\theta\Bigg]|\varphi_n\rangle \\ &- \frac{(n+\mu)(n+\nu)}{2n+\mu+\nu}\left(\frac{\mu-2\alpha}{1-x}+\frac{2\beta-\nu}{1+x}\right) \\ &\times \frac{A_n}{A_{n-1}}|\varphi_{n-1}\rangle.\end{aligned} \tag{28}$$

其中的 $C = (\varepsilon - M)\sigma/M$, $D = (\varepsilon - M)\eta/M$. 考虑到 Jacobi 多项式满足如下的递推关系和正交性质:

$$\begin{aligned}&xP_n^{(\mu,\nu)} \\ =&\frac{\nu^2-\mu^2}{(2n+\mu+\nu)(2n+\mu+\nu+2)}P_n^{(\mu,\nu)} \\ &+ \frac{2(n+\mu)(n+\nu)}{(2n+\mu+\nu)(2n+\mu+\nu+1)}P_{n-1}^{(\mu,\nu)} \\ &+ \frac{2(n+1)(n+\mu+\nu+1)}{(2n+\mu+\nu+1)(2n+\mu+\nu+2)}P_{n+1}^{(\mu,\nu)},\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(1-x)^\mu(1+x)^\nu P_n^{(\mu,\nu)}P_{n'}^{(\mu,\nu)}\mathrm{d}x \\ =&\frac{2^{\mu+\nu+1}\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(n+\nu+1)}{(2n+\mu+\nu+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\mu+\nu+1)}\delta_{nn'}.\end{aligned} \tag{30}$$

由此我们可知, 只需选取参数 $\alpha^2 = \beta^2$, $\alpha = \mu/2$, $\beta = \nu/2$, 便可以实现 θ 分量波动算子的三对角化矩阵表示 $\langle\chi_n|H_\theta - E_\theta|\chi_{n'}\rangle$. 由于 $\mu^2 + \nu^2 = 2(D+\Lambda^2)$, 因而 $\mu^2 = \nu^2 = (D+\Lambda^2)$ 要求量子数 Λ 满足 $\Lambda^2 > -D$. 为此我们从左边投影基函数 $\langle\varphi_n|$ 于方程 (28), 可得

$$\begin{aligned}&2\langle\varphi_n|H_\theta - E_\theta|\varphi_{n'}\rangle \\ =&\left[\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\right]\delta_{n,n'} \\ &+ \frac{C}{2}\sqrt{\frac{n(n+2\mu)}{(n+\mu)^2-1/4}}\delta_{n,n'-1} \\ &+ \frac{C}{2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+2\mu+1)}{(n+\mu+1)^2-1/4}}\delta_{n,n'+1}.\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\mu = \sqrt{D+\Lambda^2}$. 我们以表示式 $2E_\theta = \ell(\ell+1) = (\ell+1/2)^2 - 1/4$ 引进了无量纲参数 ℓ. 由方程 (18) 可以看出, ℓ 担当了球对称问题中角动量量子数的角色. 但在 (31) 式中 ℓ 虽然与能量有关却并不要求必须是整数. 当参数 E_θ 是正值时, ℓ 必须满足 $\ell > 0$ 或者 $\ell < -1$[25]. 角向波动算子的三对角化矩阵表示 (31) 使得 θ 角向方程 (19) 等同于下面的角向波函数展开系数满足的三项递推关系式:

$$\begin{aligned}&\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 f_n^\Lambda \\ =&\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)^2 f_n^\Lambda + \frac{C}{2}\sqrt{\frac{n(n+2\mu)}{(n+\mu)^2-1/4}}f_{n-1}^\Lambda \\ &+ \frac{C}{2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+2\mu+1)}{(n+\mu+1)^2-1/4}}f_{n+1}^\Lambda.\end{aligned} \tag{32}$$

我们定义一个新的多项式

$$f_n^\Lambda(E_\theta) =\sqrt{\frac{(n+\mu+1/2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\mu+1)}{2^{2\mu}\Gamma^2(n+\mu+1)}} \times p_n^\Lambda(\sigma,\ell). \tag{33}$$

θ 角向波函数展开系数满足的递推关系式 (32) 可

由此表示为

$$\begin{aligned}&\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 p_n^{\Lambda}\\ =&\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)^2 p_n^{\Lambda}+\frac{C}{2}\frac{(n+\mu)}{(n+\mu+1/2)}p_{n-1}^{\Lambda}\\ &+\frac{C}{2}\frac{(n+1)(n+2\mu+1)}{(n+\mu+1)(n+\mu+1/2)}p_{n+1}^{\Lambda}.\end{aligned}\tag{34}$$

定义 $p_0^{\Lambda}(\sigma,\ell)=1$, 能够实现波函数的任意归一化. 于是 θ 角向波函数 $\Theta(\theta)$ 在 L^2 空间可以表示为

$$\Theta(\theta)=\Sigma_n P_n^{\Lambda}(\sigma,\ell)\varphi_n(\theta).\tag{35}$$

下面求解径向方程 (18). 在一个新的完全平方可积的基函数 $\{\xi_k(y)\}_{k=0}^{\infty}$ 上, 可以把径向波函数 $R(r)$ 展开为 $R(r)=\Sigma_{k=0}^{\infty}g_k(E)\xi_k(y)$. 基函数必须满足具有坐标 $y\in[0,\infty]$ 的组态空间的边界条件, 基函数可以选取为

$$\xi_k(y)=B_k y^{\tau}\,\mathrm{e}^{-\rho y}L_k^{\delta}(y),\tag{36}$$

其中 $y=(\lambda r)^2$, $k=0,1,2\cdots$, $L_k^{\delta}(y)$ 是 k 阶 Laguerre 多项式. τ,ρ 都是取正值的实参数, $\delta>-1$, $B_k=\sqrt{2|\lambda|\Gamma(k+1)/\Gamma(k+\delta+1)}$ 是与 Laguerre 多项式的正交归一性质相联系的归一化常数. 利用下面的给出的 Laguerre 多项式的微分公式

$$\left[y\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}+(\delta+1-y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+k\right]L_k^{\delta}(y)=0,\tag{37}$$

$$y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}L_k^{\delta}(y)=kL_k^{\delta}(y)-(k+\delta)L_{k-1}^{\delta}(y),\tag{38}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\xi_k(y)=&4\lambda^2 y\Bigg[\frac{k}{y}\left(\frac{2\tau-\delta-1/2}{y}-2\rho\right)\\ &+\frac{\tau(\tau-1/2)}{y^2}\\ &-\frac{\rho(2\tau+1/2)}{y}+\rho^2\Bigg]\xi_k(y)\\ &-4\lambda^2(k+\delta)\Bigg(\frac{2\tau-\delta-1/2}{y}\\ &+1-2\rho\Bigg)\frac{B_k}{B_{k-1}}\xi_{k-1}.\end{aligned}\tag{39}$$

其中应用了关系式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}=2|\lambda|\sqrt{y}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$.

由于径向方程的哈密顿为 $H_r=-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{(\varepsilon-M)Mr^2}{2}+\dfrac{2E_\theta}{r^2}$, 选取常数 $\rho=1/2$, 则径向波动算子 $[H_r-(\varepsilon^2-M^2)]$ 作用于 (36) 式所给出的基函数可得

$$\begin{aligned}[H_r-(\varepsilon^2-M^2)]\xi_k=&4\lambda^2\Bigg[-\frac{k(2\tau-\delta-1/2)+(\tau-1/4)^2-(\ell+1/2)^2/4}{y}+k+\tau+\frac{1}{4}-\frac{y}{4}\\ &+\frac{\Xi y}{4\lambda^4}-\frac{(\varepsilon^2-M^2)}{4\lambda^2}\Bigg]|\xi_k\rangle+4\lambda^2\frac{(k+\delta)(2\tau-\delta-1/2)}{y^2}\frac{B_k}{B_{k'-1}}|\xi_{k-1}\rangle.\end{aligned}\tag{40}$$

其中, $\Xi=(\varepsilon-M)M/2$.

根据下面 Laguerre 多项式之间的递推关系式及正交归一性质

$$\begin{aligned}yL_k^{\delta}(y)=&(2k+\delta+1)L_k^{\delta}(y)-(k+\delta)L_{k-1}^{\delta}(y)\\ &-(k+1)L_{k+1}^{\delta}(y),\end{aligned}\tag{41}$$

$$\int_0^{\infty}y^{\delta}\,\mathrm{e}^{-y}L_k^{\delta}(y)L_{k'}^{\delta}(y)\mathrm{d}y=\frac{\Gamma(k+\delta+1)}{\Gamma(k+1)}\delta_{kk'}.\tag{42}$$

只要参数之间满足关系 $\delta=2\tau-1/2$, $(\tau-1/4)^2-(\ell+1/2)^2/4=0$, 即 $2\tau=\begin{cases}\ell+1,\ell>0\\ -\ell,\ell<0\end{cases}$. 便能得到如下所示的径向波动算子的三对角化表示 $\langle\xi_k|H_r-E|\xi_{k'}\rangle$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda^2}\langle\xi_k|H_r-(\varepsilon^2-M^2)|\xi_{k'}\rangle\\ =&\left[\left(2k+\delta+1\right)\left(\frac{\Xi}{\lambda^4}+1\right)-\frac{(\varepsilon^2-M^2)}{\lambda^2}\right]\delta_{k',k}\\ &-\left(\frac{\Xi}{\lambda^4}-1\right)\Big[\sqrt{k(k+\delta)}\delta_{k',k+1}\\ &+\sqrt{(k+1)(k+\delta+1)}\delta_{k',k-1}\Big].\end{aligned}\tag{43}$$

由此获得径向波函数展开系数满足的三项递推关系式

$$\begin{aligned}&\left[(2k+\delta+1)\frac{\Omega_+}{\Omega_-}-\frac{(\varepsilon^2-M^2)/\lambda^2}{\Omega_-}\right]g_k\\ &-\sqrt{k(k+\delta)}g_{k-1}-\sqrt{(k+1)(k+\delta+1)}g_{k+1}\\ =&0.\end{aligned}\tag{44}$$

其中 $\Omega_{\pm}=\Xi/\lambda^4\pm1$. 递推关系式 (44) 能够以多项式

$$g_k(\varepsilon)=\sqrt{\Gamma(k+1)/\Gamma(k+\delta+1)}p_k(\varepsilon,\ell),\tag{45}$$

表示为

$$\left[(2k+\delta+1)\frac{\Omega_+}{\Omega_-}-\frac{(\varepsilon^2-M^2)/\lambda^2}{\Omega_-}\right]p_k \\ -(k+\delta)p_{k-1}-(k+1)p_{k+1}=0. \tag{46}$$

为了得到束缚态的分立能谱, 对 (43) 式施于对角化条件. 由 (6) 式可以看出, $b_n=0$ 要求 $\lambda^4=\Xi=(\varepsilon-M)M/2$, 而 $a_n-z=0$ 给出

$$(2k+\delta+1)\left(\frac{\Xi}{\lambda^4}+1\right)-\frac{(\varepsilon^2-M^2)}{\lambda^2}=0. \tag{47}$$

最后我们得到下面的分立能谱表示式:

$$(\varepsilon+M)\sqrt{\varepsilon-M} \\ =\sqrt{2M}\left(2k+\frac{1}{2}+\begin{cases}\ell+1,\ell>0\\ -\ell,\ell<0\end{cases}\right). \tag{48}$$

由方程 (31) 可以看出, 参数 ℓ 与 σ 和 η 有关, 因而能量谱方程 (48) 是参数 ω,σ 和 η 的隐含数 (虽然我们已定义了 ω 为 1). 相应地, 束缚态波函数的径向分量可以表示为

$$R(r)=\Sigma_k p_k(\varepsilon,\ell)\xi_k(y). \tag{49}$$

最后我们得到下面所示的旋量波函数

$$\psi(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{r})\\ \chi(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{\varepsilon-M}\tilde{\chi}_s\\ \tilde{\chi}_s\end{pmatrix} \\ \times r^{-1}R_k(r)\Theta_n(\theta)\exp(\mathrm{i}\Lambda\phi). \tag{50}$$

5 结论和讨论

能量谱方程 (48) 显示, 束缚态能量本征值 $\varepsilon=\varepsilon(k,\ell)$ 唯一地取决于 k 和 ℓ. 如果定义 $\tilde{\ell}=\ell+1$ 为赝轨道角动量, 于是具有量子数 $(k,\tilde{\ell})$ 的能级和 $(k-1,\tilde{\ell}+2)$ 的能级之间的差别消失, 显示了能级 $(k,\tilde{\ell})$ 和 $(k-1,\tilde{\ell}+2)$ 完全简并. 由于能谱方程 (48) 的右方值总是正的, 因而必有 $\varepsilon-M>0$. 否则, 能谱方程 (48) 的左边会有虚根, 而 $\varepsilon-M<0$ 则是没有物理意义的 [16]. 我们能够利用 Descartes 多项式的符号法则证明能谱方程 (48) 存在唯一的实数解. 能谱方程 (48) 可以改写为

$$x^3-2x^2-a^2=0, \tag{51}$$

其中

$$x=\frac{\varepsilon+M}{M}, \\ a=\frac{\sqrt{2}\left(2k+\frac{1}{2}+\begin{cases}\ell+1,\ell>0\\ -\ell,\ell<0\end{cases}\right)}{M}. \tag{52}$$

(51) 式为一实系数的 3 次代数方程. 实系数的 n 次代数方程的 Descarte 符号法则指出, 若实系数序列 $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ 的变号次数为 m, 则代数方程的正根个数不会多于 m, 或者为 $(m-1)$ 个的正偶数. 当 $m=1$ 时, 有且仅有一个单正根. (51) 式给出的代数方程系数的变号只有一次, 因而对于给定的静质量 M 及量子数 k 和 ℓ, 以上讨论的环状非有心谐振子势场中粒子惟一地具有 $E_b=\varepsilon-M>0$ 的分立束缚态能量. 本文提出的势模型包括了非有心电耦极矩势, 由于非有心电耦极矩势在前被认为是不属于已有的可严格求解函数的范畴, 因而我们是在能够负载波动算子三对角化矩阵表示的完全平方可积基空间讨论这一势场的赝自旋对称性. 显然, 三对角化矩阵方案使得求解波动方程的过程等价地变换为寻求波函数展开系数满足的一个三项递推关系式, 从而得到波动方程的解析解. 本文利用三对角化矩阵方案, 给出了波函数角向分量和径向分量展开系数满足的三项递推关系式. 角向波函数和径向波函数分别以 Jacobi 多项式和 Laguerre 多项式表示, 束缚态能量谱可由径向波函数展开系数满足的递推关系式的对角化条件得到. 并以 Descartes 多项式的符号法则讨论了能量方程的代数结构, 显示了这一势场存在严格的赝自旋对称性. 另外我们指出, 这一势场也具有严格的自旋对称性. 在此条件下 $\Delta=0$, 我们能够利用相同的方法得到 Dirac 旋量的上分量, 其能谱方程为

$$(\varepsilon-M)\sqrt{\varepsilon+M} \\ =\sqrt{2M}\left(2k+\frac{1}{2}+\begin{cases}\ell+1,\ell>0\\ -\ell,\ell<0\end{cases}\right). \tag{53}$$

[1] Arima A, Harvey M, Shimizu K 1969 *Phys. Lett.* B **30** 517
[2] Hecht K T, Adler A 1969 *Nucl. Phys.* A **137** 129
[3] Ginocchio J N 1999 *Phys. Rep.* **315** 231
[4] Dudek J, Nazarewicz W, Szymanski Z, Leander G A 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 1405
[5] Nazarewicz W, Twin P J, Fallon P, Garrett J D 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1654
[6] Zeng J Y, Meng J, Wu C S, Zhao E G, Xing Z, Chen X Q 1991 *Phys. Rev.* C **44** R1745
[7] Schiff L I 1955 *Quantum mechanics* 3rd ed. (McGraw-Hill, New York)
[8] Mayer M G 1950 *Phys. Rev.* **78** 16
[9] Nilsson S G 1955 *Dan. Mat. Fys. Medd.* **29** 16
[10] Chen T S, Lu H F, Meng J 2003 *Chin.Phys. Lett.* **20** 358
[11] Kukulin V I, Loyola G, Moshinsky M 1991 *Phys. Lett.* A **158** 19
[12] Ginocchio J N 2004 *Phys. Rev.* C **69** 034318
[13] Quesne C 1988 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **21** 3093
[14] Guo J Y, Han J C, Wang R D 2006 *Phys. Lett.* A **353** 378
[15] Berkdemir C, Cheng Y F 2009 *Phys. Scr.* **79** 1
[16] Lisboa R, Malheiro M, de Castro A S, Alberto P , Fiolhais M 2004 *Phys. Rev.* C **69** 024319
[17] Fermi E, Teller E 1947 *Phys. Rev*. **72** 399
[18] Wightman A S 1950 *Phys. Rev*. **77** 521
[19] Fox K, Turner J E 1966 *J. Chem. Phys.* **45** 1142
[20] Brown W B, Robers R E 1967 *J. Chem. Phys*. **46** 2006
[21] Coon S A, Holstein B R 2002 *Am. J. Phys.* **70** 513
[22] Jaramillo B, Núñez-Yépez H N, Salas-Brito A L 2010 *Phys. Lett.* A **374** 2707
[23] Alhaidari A D 2005 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **38** 3409
[24] Zhang M C, Huang-Fu G Q 2012 *Ann. Phys.* **374** 841
[25] Alhaidari A D 2008 *Ann. Phys.* **323** 1709
[26] Alhaidari A D, Bahlouli H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 110401
[27] Alhaidari A D 2007*J. Phys.* A: *Math. Theor.* **40** 14843
[28] Bahlouli H, Alhaidari A D 2010 *Phys. Scr.* **81** 025008
[29] Bahlouli H, Abdelmonem M S, Nasser I M 2010 *Phys. Scr.* **82** 065005
[30] Alhaidari A D 2005 *Ann. Phys.* **317** 152
[31] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics* Vol Ⅱ 3rd (Beijing: Science Press) (in Chinese) [曾谨言 2000 量子力学 (卷Ⅱ) 第三版 (北京: 科学出版社)]
[32] Ginocchio J N, Leviatan A, Meng J, Zhou S G 2004 *Phys. Rev.* C **69** 034303

Pseudospin symmetry for a noncentral electric dipole ring-shaped potential in the tridiagonal representation

Zhang Min-Cang†

(*College of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710062*, China*)

(Received 4 May 2012; revised manuscript received 20 June 2012)

Abstract

A noncentral harmonic oscillatory ring-shaped potential is proposed, in which the noncentral electric dipole is included. The pseudospin symmetry for this potential is investigated by working in a complete square integrable basis that supports a tridiagonal matrix representation of the wave operator. The resulting three-term recursion relations for the expansion coefficients of the wavefunctions (both angular and radial) are presented. The angular/radial wavefunction is written in terms of the Jacobi/Laguerre polynomials. The discrete spectrum of the bound state is obtained by diagonalizing the radial recursion relation. The algebraic property of energy equation is also discussed, showing the exact pseudospin symmetry

Keywords: noncentral electric dipole, tridiagonal representation, Dirac equation, pseudospin symmetry
PACS: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 02.30.Gp

† E-mail: mincangzhang@snnu.edu.cn