

混沌微扰导致的量子退相干*

赵文奎^{1)2)3)†} 王建忠¹⁾ 豆福全¹⁾

1) (北京理工大学物理学院, 北京 100081)

2) (北京应用物理与计算数学研究所, 计算物理国家重点实验室, 北京 100088)

3) (北京大学应用物理与技术研究中心, 高能密度物理数值模拟教育部重点实验室, 北京 100084)

(2012年5月22日收到; 2012年7月1日收到修改稿)

研究了无限深势阱内两个粒子的耦合导致的量子退相干和量子行为趋近于经典混沌运动的过程. 当一个粒子的质量减小时, 它对另外一个粒子经典混沌扩散的影响逐渐减小. 强混沌机理使得轻粒子的作用类似于噪声, 从而有效得抑制另外一个粒子的量子相干性. 轻粒子的退相干效应随着有效普朗克常数的减小逐渐增强. 在这个过程中, 另外一个粒子的量子扩散从动力学局域化行为逐渐过渡到经典极限. 当有效普朗克常数足够小时, 它的量子扩散与经典混沌扩散相符合. 该粒子的线性熵随时间演化迅速趋近于饱和值, 并且饱和值随着有效普朗克常数减小以指数函数形式从零趋近于 1.

关键词: 退相干, 量子 — 经典过渡, 量子混沌

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Yz, 05.45.Mt

1 引言

量子行为如何过渡到经典行为是物理学的一个基础问题, 从量子力学基本原理形成以来物理学家对这个问题提出了各种解释. 退相干理论对量子 — 经典过渡的解释被广泛接受^[1-4]. 该理论指出: 实际情况中物理系统与外界环境之间总是存在相互作用. 这种不可避免的耦合可以破坏微观体系的量子相干性, 因而系统的量子行为出现经典特征. 通常以为环境自由度的数目越多, 越容易导致系统的退相干, 例如 Caldeira-Leggett 模型中环境由无穷多个简谐振子组成^[5-9]. 该模型中环境的作用类似于热库 (heat bath) 对系统产生耗散效应, 从而破坏量子相干性. 最近的研究表明: 与一个粒子的耦合足以导致系统的退相干. 有意义的是: 当外部粒子的经典运动是强混沌状态时, 它导致的退相干效应与热库相当^[10,11]. 这些研究加深了我们对量子 —

经典过渡的认识: 1) 外界环境的混沌动力学机理能有效促进退相干; 2) 环境自由度很少时足以抑制系统的量子动力学特征^[12-14].

当外界环境包含的自由度很少时, 它对系统的经典运动的影响就会很小. 更有意义的研究表明: 即使外界扰动对系统的经典运动几乎没有影响, 这种微扰仍然导致系统的量子退相干. 例如, 这种微扰可以破坏周期驱动转子的量子动力学局域化^[15], 抑制粒子在双势阱中的量子隧穿^[16]. 这些有意义的研究结果对理解量子退相干非常重要. 在文献 [15] 中作者假设两个转子的相互作用强度正比于有效普朗克常数 ($\epsilon \propto \hbar$), 在半经典邻域 ($\hbar \rightarrow 0$) 两个粒子的耦合趋近于 0, 因而它们的经典运动互不影响. 文献 [16] 中作者考虑的情况是两个耦合粒子的质量相差几个数量级. 在经典运动中质量非常小的粒子具有的能量远小于另外一个粒子的能量, 从而对重粒子的运动几乎没有影响. 在实际物理系统中子系统的的质量不同是普遍现象, 并且一般情况

* 国家高技术研究发展计划 (863 计划) (批准号: 2011AA120101) 和国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (批准号: 2011CB921503) 资助的课题.

† E-mail: zwlphys@yahoo.cn

下一粒微尘对重物体的经典运动影响可以忽略. 但是这种类似于微尘的影响能够破坏波函数的量子相干性, 从而抑制体系的量子特征.

本文研究了与一个粒子的耦合导致的混沌系统的退相干和量子—经典过渡. 考虑的系统是无限深势阱内周期驱动的两个耦合粒子, 相互作用势是排斥势. 驱动足够强时, 粒子的经典运动出现强混沌特征, 即轨迹在相空间随机扩散. 本文的研究结果表明: 当排斥势的有效范围远远小于势阱宽度时, 随着其中一个粒子 (比方说粒子 2) 质量的减小, 它对另外一个粒子 (粒子 1) 经典运动的影响逐渐减小. 当它们的质量差别非常大时 (即 $m_2 \ll m_1$), 粒子 1 的经典混沌扩散几乎不受影响. 由于粒子 2 的质量非常小, 两个粒子之间的耦合足以导致它的强混沌运动. 这使得粒子 2 相当于噪声, 从而有效得促进粒子 1 的退相干 [10,11]. 随着有效普朗克常数 (\hbar) 减小, 粒子 2 的退相干效应逐渐增强. 在这个过程中, 粒子 1 的量子扩散从动力学局域化行为逐渐过渡到经典扩散. 当 \hbar 足够小时它的量子扩散与经典极限相吻合. 在粒子 2 的影响下, 粒子 1 的线性熵随时间演化迅速趋近于饱和值, 并且线性熵的时间平均值以 \hbar 的指数函数形式从零趋近于 1.

2 量子 and 经典混沌扩散

考虑无限深势阱内周期驱动的两个耦合粒子, 系统的哈密顿量为

$$H = H_1 + H_2 + H_I \quad (1)$$

其中

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x_i) + K_i \cos(x_i) \times \sum_n \delta(t - nT), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$V(x_i) = \begin{cases} 0, & 0 < x_i < L, \\ +\infty, & x_i < 0, x_i > L, \end{cases} \quad (3)$$

$$H_I = \varepsilon \exp[-\lambda(x_1 - x_2)^2]. \quad (4)$$

其中 m_i, x_i, p_i 分别表示粒子的质量, 坐标和动量. K_i 和 T 分别表示驱动强度和周期, L 是势阱宽度, ε 是耦合强度, $\varepsilon > 0$ 表示排斥相互作用, λ 控制 H_I 的有效范围. 我们用劈裂算符方法数值积分含时薛定谔方程从而得到任意时刻的波函数. 初始波函数为 $\psi(0) = \phi_1(0)\phi_2(0)$,

其中 $\phi_i(0) = \sqrt{2/L} \sin(\frac{\pi x_i}{L})$ 表示第 i 个粒子的基态. 数值计算经典运动方程时, 相空间轨道 (p_1, x_1, p_2, x_2) 的初值为 $p_1 = p_2 = \frac{\hbar\pi}{L}$, x_1 和 x_2 在 $[0, L]$ 内均匀取值. 每条轨道的概率为 $|\psi(0)|^2$ 对应于量子初态.

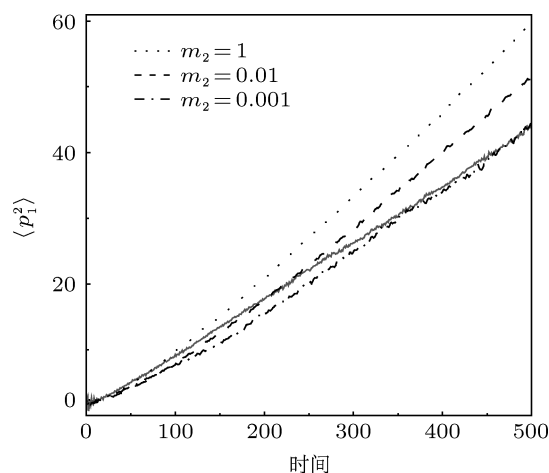


图 1 粒子 1 的经典扩散 ($\langle p_1^2 \rangle$) (实线表示未受外界影响的经典扩散. 参数取值为 $K_1 = 1.8, m_1 = 1, K_2 = 0, \lambda = 10, \varepsilon = 2, L = \pi$)

无限深势阱边界的不连续性导致粒子的经典运动不满足 KAM 理论. 驱动强度非常弱时, 经典相空间出现网格结构, 轨迹沿网格扩散. 驱动足够强时, 相空间是完全的混沌海 [17,18]. 有意义的是: 随着驱动强度增加系统的准能级谱由 Poisson 分布过渡到 Wigner 分布, 表明系统的量子动力学行为具有退局域化特征 [18]. 经典强混沌运动特征是粒子动量平方的系综平均值随时间线性增长即 $\langle p^2(t) \rangle = D_{cl}t$, $\langle \dots \rangle$ 表示对相空间轨道的平均, D_{cl} 是扩散系数依赖于周期驱动强度和势阱宽度 L [19-21]. 事实上势阱的奇异性使得解析得到 D_{cl} 的表达式非常困难 [18].

我们研究了不同质量的粒子 2 对粒子 1 经典扩散 ($\langle p_1^2 \rangle$) 的影响. 数值计算中粒子 1 的质量为 $m_1 = 1$, 对应的驱动强度为 $K_1 = 1.8$, 这足以保证它的经典运动处于强混沌区域. 当 $m_2 \ll m_1$ 时, 两个粒子的耦合很容易导致粒子 2 的经典混沌运动. 因此在数值计算中我们把粒子 2 对应的驱动强度设为零即 $K_2 = 0$. 其他参数的取值为: 势阱宽度 $L = \pi$, 耦合强度为 $\varepsilon = 2, \lambda = 10$. 此时排斥势的有效作用范围约为 $1/\lambda \approx 0.1$ 远小于势阱宽度, 因此两个粒子的耦合等效于碰撞势. 我们

用 4 阶 Runge-Kutta 方法数值积分经典运动方程, 每个周期分为 10^5 步, 轨道数目为 10000. 图 1 中的结果表明: 粒子 1 的 $\langle p_1^2 \rangle$ 随时间线性增长, 这正是经典混沌运动的特征 [19–21]. 当 $m_2 = 1$ 时 $\langle p_1^2 \rangle$ 随时间的增长明显快于未受扰动时的情况, 这表明两个粒子的耦合促进了粒子 1 的经典扩散. 随着 m_2 减小, $\langle p_1^2 \rangle$ 逐渐接近于未受外界扰动时的值, 当 $m_2 = 0.001$ 时相符合. 这充分证明: 粒子 2 对粒子 1 经典运动的影响随 m_2 而减小. 当 $m_2 \ll m_1$ 时粒子 2 类似于一粒微尘, 它对粒子 1 经典运动的影响就可以忽略.

经典扩散系数的定义是 $D_{cl} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle p_{cl}^2 \rangle}{t}$, 由于 $\langle p_{cl}^2 \rangle$ 在混沌状态中随时间线性增长, D_{cl} 可以度量这种扩散行为. 与此类似, 我们可以把量子扩散系数定义为 $D_{qm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle p_{qm}^2 \rangle}{t}$. 量子相干性会抑制周期驱动粒子的经典混沌扩散, $\langle p_{qm}^2 \rangle$ 随时间的增长逐渐趋近于饱和值 ($D_{qm} \sim 0$), 这种现象就是动力学局域化 [18–21]. 在数值计算中, 当 $m_2 \ll 1$ 时粒子 2 的基矢数目可以非常少, 例如 $m_2 = 0.001$ 时粒子 1 和 2 的基矢数分别为 8192 和 64. 为了保证数值计算的精确性, m_2 增加时粒子 2 的基矢数也要增加. 我们数值计算了 500 个周期的波函数演化, 从而得到粒子 1 的量子扩散系数 D_{qm} . 图 2 中的结果表明: 随着 \hbar 的减小, 粒子 1 的 D_{qm} 从零逐渐增加到对应的经典极限 D_{cl} . 这表明: 粒子 1 的量子扩散从动力学局域化行为逐渐过渡到经典混沌扩散. 我们还可以看到: 在量子—经典过渡的过程中, m_2 越大粒子 1 的 D_{qm} 越大. 这是因为随着 m_2 的增加粒子 1 受到的影响增加, 它的经典扩散系数 D_{cl} 就随 m_2 增长, 这与图 1 中的结果相符合. 当粒子 1 不受外界影响时, 即使 \hbar 非常小它的量子扩散与经典扩散演化足够长时间 ($t_b \sim \ln(1/\hbar)$) 后会出现差别. 在实际情况中系统与外界环境存在相互作用, 体系的量子相干性很容易被这种相互作用破坏, 因而系统的量子行为出现经典特征.

度量退相干的常用物理量是线性熵 $S_L = 1 - \text{Tr}_1(\rho_1^2)$, 其中 $\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho_{12})$ 表示粒子 1 的约化密度矩阵, $\text{Tr}_2(\dots)$ 表示在整个系统的密度矩阵 ρ_{12} 中对粒子 2 的自由度求迹. 如果两体系统的量子态是纯态即粒子 1 和 2 之间没有纠缠, 线性熵

为零 $S_L = 0$. 当两个粒子的纠缠度最大时, 粒子 1 的约化密度矩阵是最大混合态. 此时量子相干性消失, 线性熵为 $S_L = 1 - 1/N$, N 是粒子 1 的希尔伯特空间的维度. 从上面的结果我们看到: 经典运动中可以忽略的扰动 (即 $m_2 = 0.001$) 能够导致粒子 1 的量子—经典过渡. 我们数值计算了这个过程中粒子 1 的线性熵. 图 3(a) 表明: 粒子 1 的 S_L 随时间演化迅速趋近于饱和值, 并且饱和值随 \hbar 的减小而增长, 这表明了退相干逐渐发生的过程. 当 $m_2 \ll m_1$ 时, 两个粒子的耦合足以导致粒子 2 的经典强混沌运动. 理论研究表明经典混沌运动可以促进退相干 [10–14]. 因此这个强混沌运动的微小粒子在半经典邻域能够破坏粒子 1 的量子相干性. 我们进一步研究了线性熵的时间平均值 $\langle S_L \rangle_t$ 对 \hbar 的依赖关系. 如果演化时间足够长, $\langle S_L \rangle_t$ 将趋近于 S_L 的饱和值. 图 3(b) 中的结果表明: 随着 \hbar 的增长, $\langle S_L \rangle_t$ 以指数函数形式从 1 迅速衰减到 0. 我们还可以看到: \hbar 固定时 m_2 越大 $\langle S_L \rangle_t$ 越大, 原因是粒子 2 对粒子 1 的影响随 m_2 增长, 这与图 2 中的结果相一致. 在弱耦合 ($\varepsilon \ll 1$) 情况下, 粒子 2 的经典运动随 K_2 的增长会从规则行为过渡到混沌状态. 此时我们就可以研究粒子 2 的经典运动特征对退相干的影响. 事实上 K_2 的增加会促进线性熵 S_L 随时间的增长, 即粒子 2 的混沌运动能够有效的导致退相干. 当 K_2 足够强时 S_L 的增长会渐近不变, 这时 S_L 的增长速率正比于经典混沌运动的 Lyapunov 指数 [10–15].

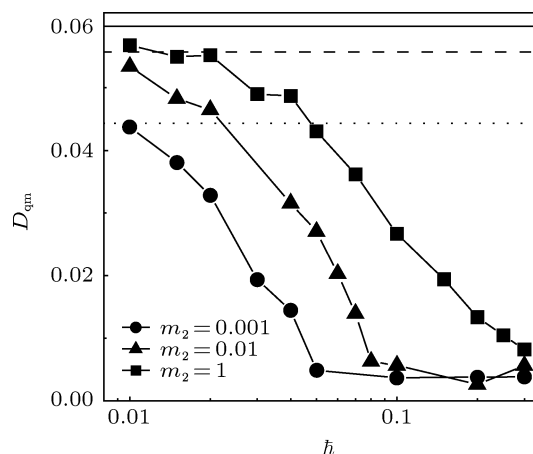


图 2 粒子 1 的量子扩散系数 D_{qm} 随 \hbar 的变化 (平行的实线, 虚线和点线表示经典扩散系数, 分别对应于 $m_2 = 1$, $m_2 = 0.01$ 和 $m_2 = 0.001$. 其他参数取值与图 1 相同)

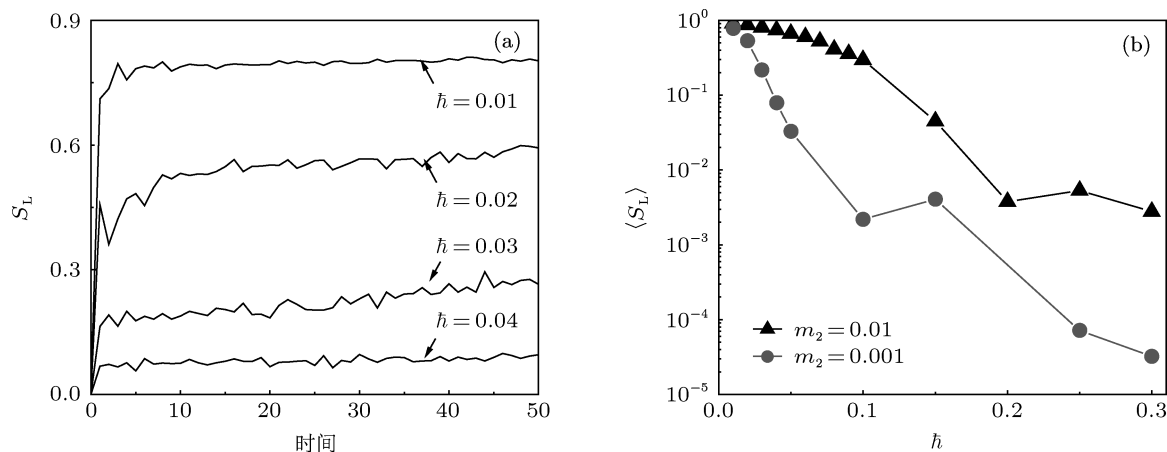


图3 (a) 粒子1的线性熵 S_L 随时间的变化, 对应于 $m_2 = 0.001$; (b) 线性熵的时间平均值 $\langle S_L \rangle_t$ 随 \hbar 的变化 (其他参数取值与图1相同)

3 结论

本文研究了与一个自由度的纠缠导致的混沌系统的退相干和量子—经典过渡. 考虑的模型是无限深势阱内两个耦合粒子, 粒子间的相互作用是 Gaussian 排斥势. 对粒子的周期驱动足够强时, 它们的经典运动出现强混沌特征. 当排斥势的有效作用范围远小于势阱宽度时, 两个粒子的耦合非常接近于碰撞势. 此时随着 m_2 的减小, 粒子2对粒子1经典运动的影响逐渐减小, 当 $m_2 \ll m_1$ 时这

种影响甚至可以忽略. 由于 m_2 非常小, 两个粒子的耦合足以导致粒子2的经典强混沌运动. 这使得粒子2类似于噪声, 能有效得抑制粒子1的量子相干性. 随着 \hbar 的减小, 粒子1的量子行为从动力学局域化现象逐渐过渡到经典混沌扩散. 在这个过程中, 粒子1线性熵的时间平均值以 \hbar 的指数函数从0趋近于1. 在实际物理系统中子系统的质量不同是普遍现象, 并且质量非常轻的粒子在一般情况下对重物体的影响总是非常微弱. 因此本文的研究结果对理解混沌系统的量子—经典过渡有一定的意义.

- [1] Joos 2003 *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, Berlin)
- [2] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
- [3] Schlosshauer M 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 1267
Schlosshauer M 2008 *Found. Phys.* **38** 796
- [4] Pattanayak A K, Sundaram B, Greenbaum B D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 014103
- [5] Feynman R P, Vernon F L 1963 *Ann. Phys. (Leipzig)* **24** 118
- [6] Caldeira A O, Leggett A J 1983 *Physica (Amsterdam)* **121A** 587
- [7] Wisniacki D, Toscano F 2009 *Phys. Rev. E* **79** 025203(R)
- [8] Toscano F, De Matos Filho R L, Davidovich L 2005 *Phys. Rev. A* **71** 010101(R)
- [9] Toscano F, Wisniacki D A 2006 *Phys. Rev. E* **74** 056208
- [10] Rossini D, Benenti G, Casati G 2006 *Phys. Rev. E* **74** 036209
- [11] Bandyopadhyay J N 2009 *EPL* **85** 50006
- [12] Adachi S, Toda M, Ikeda K 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 659
- [13] Graham R, Kolovsky A R 1996 *Phys. Lett. A* **222** 47
- [14] Park H K, Kim S W 2003 *Phys. Rev. A* **67** 060102(R)
- [15] Petitjean C, Jacquod Ph 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 194103
- [16] Jie Q L, Hu B, Dong G 2006 *arXiv:quantph/0601025*
- [17] Liu J, Cheng W T, Cheng C G 2000 *Commun. Theor. Phys.* **33** 15
Liu J, Hu B, Li B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1749
- [18] Hu B, Li B, Liu J, Gu Y 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4224
- [19] Izrailev F M 1990 *Phys. Rep.* **196** 299
Fishman S, Grepel D R, Prange R E 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 509
- [20] Shepelyansky D L 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 677
Shepelyansky D L 1987 *Physica D* **28** 103
- [21] Casati G, Chirikov B V, Izrailev F M, Ford J 1979 *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, edited by Casati G and Ford J, *Lecture Notes in Physics* (Vol. 93) (Springer, Berlin)
- [22] Lakshminarayan A 2001 *Phys. Rev. E* **64** 036207
Bandyopadhyay J N, Lakshminarayan A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 060402
- [23] Cohen D, Heller E J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2841
- [24] Wisniacki D A, Cohen D 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046209
- [25] Wisniacki D A, Ares N, Vergini E G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 254101

Decoherence by a classically small influence*

Zhao Wen-Lei^{1)2)3)†} Wang Jian-Zhong¹⁾ Dou Fu-Quan¹⁾

1) (*School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

2) (*National Key Laboratory of Science and Technology on Computation Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*)

3) (*HEDPS, Center for Applied Physics and Technology, Peking University, Beijing 100084, China*)

(Received 22 May 2012; revised manuscript received 1 July 2012)

Abstract

Via a system of two kicked particles that are coupled in an infinite square well, we numerically show that the interaction with a particle of very small mass is able to lead to a quantum-to-classical transition on condition that the corresponding classical dynamics is almost unaffected. With the decrease of the mass of one of the particles, its effect on the classical dynamics of the other one decreases. Such an effect is even negligible if the mass of the particle is small enough. The classically chaotic dynamics of this small particle is effective for promoting the decoherence of the heavy particle. Therefore its quantum behavior exhibits the transition from the dynamical localization to the classically chaotic diffusion with the decrease of the effective Planck's constant \hbar . Under the perturbation from the small particle, the linear entropy is rapidly saturated as time passes by. With the decrease of \hbar , the time-averaged linear entropy exponentially increases from zero to almost unity.

Keywords: decoherence, quantum-classical transition, quantum chaos

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Yz, 05.45.Mt

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2011AA120101), and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB921503).

† E-mail: zwlphys@yahoo.cn