

空气阻力对完全非弹性蹦球动力学行为的影响*

姜泽辉[†] 韩红 李儵然 王福力

(哈尔滨工业大学物理系, 哈尔滨 150001)

(2012年6月9日收到; 2012年7月16日收到修改稿)

一个在振动台面上蹦跳的小球具有复杂的运动形式, 如倍周期分岔和混沌. 如果球与台面间的碰撞是完全非弹性的, 则球的运动是倍周期的, 不存在混沌. 在分岔相图中, 鞍-结不稳定性引入“平台”结构, 同时存在倍周期轨道的密集区. 这里将研究空气的黏滞阻力对完全非弹性蹦球动力学行为的影响. 分析表明, 空气阻力很弱时, 分岔序列不受影响, 但分岔点的数值变大, “平台”和密集区加宽. 空气阻力较大时, “平台”与密集区重叠. 重叠区内原有产生倍周期运动的机理被破坏, 球的运动是混沌的.

关键词: 倍周期分岔, 蹦球, 混沌, 空气阻力

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 45.70.-n

1 引言

蹦球问题最早由费米提出, 用来解释宇宙射线中高能粒子的能量起源问题^[1]. 带电粒子与变化的磁场“碰撞”会被加速. 这一过程类似于一个小弹性球在固定竖板和振动竖板之间的碰撞弹跳. 小球与固定板碰撞后, 返回振动板并与其碰撞而获得能量. 对于蹦球的运动, 早期的研究主要围绕标准映射模型 (standard mapping) 展开. 后来人们对系统做了“简化”, 将固定板去掉, 振动板水平放置, 小球将在重力作用下返回到振动板上^[2-7]. 但是球的动力学行为仍然十分复杂, 既有周期解亦有非周期解, 还存在由倍周期级联分岔进入混沌^[8-12].

系统的控制参量为球与台面的碰撞恢复系数 e 及约化振动加速度 Γ , 其中 $\Gamma = A(2\pi f)^2/g$, A 和 f 分别为台面的振幅和频率, $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度. e 的大小决定了每次碰撞时系统的能量耗散程度, 并显著影响蹦球的运动形式. 对于弹性球 ($e = 1$), 不存在能量耗散, 其能量可以无限积累. 任何时刻, 球都不可能停留在台面上, 其运动是混沌的^[3,13]. 对于非弹性球 ($0 < e < 1$), 每次

碰撞系统都会损失掉部分动能. 除了倍周期分岔和混沌, 能量耗散还引入一种“震颤”解 (chattering dynamics). 蹦球经过一系列的快速小幅跳跃后, 就像被锁定在台面上一样. 一段时间后又突然被发射出来. 这种机理导致某些情况下球的运动最终是周期的^[14-17]. 一种极端情况是球与台面的碰撞是完全非弹性的 ($e = 0$). 每次碰撞后球损失掉其全部动能 (以台面为参照系), 碰撞后球的速度与台面速度相同, 因而对其先前的运动状态失去记忆. 这导致相空间可以划分为吸收区和发射区^[14,15]. 当球落入发射区时立刻被抛起, 而落入吸收区时则停留在台面上, 直到下一个振动周期被再次发射出来. 正是因为吸收区的存在, 不论连续蹦跳多少次, 完全非弹性蹦球的运动最终都是倍周期的. 对于完全非弹性蹦球同样存在倍周期分岔过程. 但倍周期级联分岔并不转入混沌, 而是在分岔相图中产生一些具有分形特征的复杂结构^[18,19].

完全非弹性蹦球已被用于解释受振颗粒床中冲击力的倍周期分岔^[20-23]及颗粒薄层中的分频表面驻波^[24,25]. 但是人们已经注意到振动可以在颗粒床中激发出很强的空气流动. 颗粒尺寸比较小时, 空气阻力的作用将不可忽略, 并对颗粒体

* 国家自然科学基金 (批准号: 10974038) 资助的课题.

[†] E-mail: zehuijiang@yahoo.com

系的动力学过程产生显著影响, 如颗粒的对流运动 [26–28] 及尺寸分离过程 (“巴西果” 效应) [29–33]. 精确分析空气阻力的影响通常较为困难, 因为这需要求解多相流的 Navier-Stokes 方程. 简便的办法是在蹦球模型的基础上将空气阻力包含进来. 最近, Paster 等 [28] 利用完全非弹性蹦球模型分析了空气黏滞阻力对受振玻璃颗粒体系中的对流及倍周期分岔过程的影响. 但研究主要集中于 Γ 较小时的 2 倍周期分岔点附近, Γ 较大时的情况仍不清楚.

Naylor 等 [34] 对空气阻力作用下非弹性蹦球 ($0 < e < 1$) 的蹦跳行为进行了分析. 他们的计算结果表明空气阻力对蹦球的运动有十分显著影响. 首先, 空气阻力使相图的结构变得更加复杂, 阻力越大复杂程度越高, 同时还伴有强烈的回滞现象. 其次, 空气阻力还会抑制 “震颤” 解, 致使球的运动成为完全混沌的. 最近, 周志刚等 [35] 亦对有空气阻力时非弹性蹦球蹦跳的混沌特性做了相关分析.

目前, 针对阻力作用下完全非弹性蹦球动力学行为的研究较少, 许多问题仍有待进一步澄清. 文献 [36] 分析了恒定阻力对完全非弹性蹦球动力学行为的影响, 结果表明恒定阻力并不改变蹦球的倍周期分岔序列, 只是将倍周期分岔点的数值变大. 这里将着重讨论空气黏滞阻力的影响. 空气阻力随球速的变化而改变其大小和方向, 这在一定程度上增加了解析难度, 但更为主要的是, 空气阻力将使蹦球的运动形式发生根本性改变. 分析表明阻力较大时将引入混沌, 产生混沌的原因是空气阻力破坏了原有形成倍周期运动的物理机理.

2 理论

台面沿竖直方向做简谐振动, 其位移随时间 t 的变化表示为 $x(t) = A \sin(\omega t)$, 其中, $\omega = 2\pi f$. $t = 0$ 时刻球静止在台面上. 在 $t_0 = \omega^{-1} \arcsin(1/\Gamma)$ 时刻, 球受到台面的支撑力为零, 因而被台面抛出并在空中做抛体运动, 起跳速度即为该时刻台面的速度 $\dot{x}(t_0)$. 在空中飞行过程中, 球受到来自空气的黏滞阻力. 阻力的大小表示为 $f_\mu(t) = -\mu m g u(t)$, 其中, $u(t) = v(t) - \dot{x}(t)$ 为球相对于台面的速度, $v(t)$ 为球相对地面的速度. 这里假定空气与台面一起运动 (类似于受振颗粒床中的情况). m 为球的质量, μ 为等效阻力系数, 其量纲为 $[\text{m/s}]^{-1}$. 相对速

度 $u(t)$ 由下面的方程决定:

$$\frac{du}{dt} = -\mu g u - g + \Gamma g \sin(\omega t). \quad (1)$$

利用初始条件 $u(t_0) = 0$, 解得

$$u(t) = \frac{g}{(1 + \alpha^2)\alpha\omega} \left\{ \left[1 + \alpha^2 + \alpha\Gamma(\cos(\omega t_0) - \alpha \sin(\omega t_0)) \right] e^{-\alpha\omega(t-t_0)} - \left[1 + \alpha^2 + \alpha\Gamma(\cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)) \right] \right\}, \quad (2)$$

其中, $\alpha = \mu g/\omega$ 是无量纲化的黏滞阻力系数, 表征黏滞损耗的大小. 利用 $s(t_0) = 0$, 积分上式得到球的相对位移

$$s(t) = \frac{g}{(1 + \alpha^2)\alpha^2\omega^2} \left\{ (1 + \alpha^2) \times \left[1 - \alpha\omega(t - t_0) + \alpha\Gamma \cos(\omega t_0) \right] - \alpha^2\Gamma(\alpha \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) - e^{-\alpha\omega(t-t_0)} \left[1 + \alpha^2 + \alpha\Gamma(\cos(\omega t_0) - \alpha \sin(\omega t_0)) \right] \right\}. \quad (3)$$

飞行一段时间后, 在重力作用下球会返回台面并与其碰撞. 碰撞时刻 t 可令 $s(t) = 0$ 并求解方程. 由于球与台面之间的碰撞是完全非弹性的, 碰撞后球与台面的速度相同, 因而对其先前的运动状态失去记忆. 在 t 时刻, 球既可以立即起跳又可以停留在台面上, 视台面的加速度而定. 如果 $\ddot{x}(t) \leq -g$ (对应为相空间的发射区), 球立即被抛出; 如果 $\ddot{x}(t) > -g$ (对应为相空间的吸收区), 球将停留在台面上. 球有时可以连续蹦跳若干次然后落入吸收区. 对于这种情况, 第 k 次碰撞的时刻 t_k 可按照上面的方法由 t_{k-1} 获得, 而 t_{k-1} 由 t_0 递推过来.

一旦落入吸收区, 球将 “黏附” 在台面上, 直到下一个振动周期发射条件得到满足时再次被抛出. 其后, 球的运动轨迹将与从 t_0 发射的一样, 也就是, 完全重复先前的运动状态. 实际上, 吸收区的存在为蹦球的运动提供了一种 “重启” 机理 (reset mechanism). 正是这种 “重启” 机理使得完全非弹性蹦球的运动始终是倍周期的 [14,15,18,23]. “重启” 机理也使得完全非弹性蹦球的运动没有初值敏感性, 除了特别说明, 这里的计算都是从 t_0 开始的, 且 $u(t_0) = 0, s(t_0) = 0$. 在某些较窄的 Γ 区间, 也可以进行永不落入吸收区的蹦跳, 但其运动仍是倍周期的, 见后文有关 “平台” 区的讨论.

3 结果与讨论

图 1 给出了 $\alpha = 0, 0.039, 0.078$ 时飞行时间 $t_F = t_k - t_{k-1}$ 随 Γ 的变化, 其中, t_F 已被振动周期 $T = 1/f$ 约化. Γ_q^p 表示进入 p 跳 q 倍周期运动的分岔点. 三种情况的倍周期分岔序列是相同的. Γ 由 1 逐渐增大时, 都是由 1 倍周期进入 2 倍周期 (Γ_2^2), 再进入 4 倍周期 (Γ_4^4), 然后快速进入倍周期分岔的密集区. 之后, 由密集区突然进入 3 倍周期, 再由 3 倍周期进入 6 倍周期, 密集区, 4 倍周期... 可以看出, 分岔点 Γ_q^p (包括密集区内的) 的数值随 α 的增大而增大.

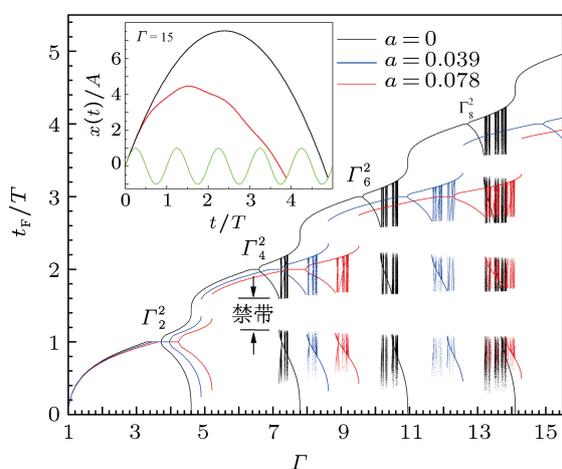


图 1 α 取不同值时, 飞行时间 t_F/T 的分岔相图 (插图: 空气阻力对蹦球飞行轨迹的影响, $\Gamma = 15$. 绿线: 台面位移)

密集区内存在各种周期长度的倍周期运动, 且倍周期分岔点敏感地依赖于 Γ . 同时可以看到, 空气阻力使密集区纵向压缩、横向拉伸, 而且这种变形程度随 α 的增大而增大.

产生密集区纵向压缩的原因有两方面. 首先, 空气阻力使飞行时间变小. 图 1 中的插图显示了 $\Gamma = 15$ 时空气阻力对飞行轨迹 (红线, $\alpha = 0.078$) 的影响. 空气阻力使球的轨迹不再是左右对称的抛物线, 变得低矮且飞行时间大为缩短. 其次, 空气阻力使禁带宽度加宽. 禁带的出现是因为相空间内存在一些无法进入的区域. 以图 2 中给出的 5 跳 6 倍周期运动为例. 无空气阻力时 ($\alpha = 0$, $\Gamma = 7.251$), 第 4 跳的落点刚好为球与台面位移的切点 (发射区右肩黑色 “+” 处), 第 5 跳由该处向下运动然后落入吸收区. 如果 Γ 稍微增大一点, 该切点将被轻轻掠过, 第 4 跳直接落入吸收区形成 4 跳

的 6 倍周期运动. 蓝色线段标示的区域蹦球永远无法进入, 其两端 (黑色 “+”) 对应的时间差刚好为禁带宽度. 有空气阻力时亦存在类似情况 (图 2 中红线所示轨迹). 空气阻力使得轨迹线变得矮平, 导致第 4 跳的落点前移, 第 5 跳的落点后移 (红色 “+” 处), 因而禁带被加宽. 另外, 这种加宽随 α 的增大而增大 (参见图 1).

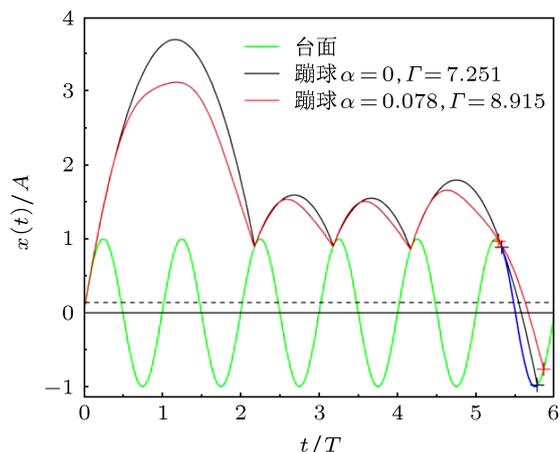


图 2 5 跳 6 倍周期运动的轨迹 (虚线为吸收区和发射区的分界线)

无论有无空气阻力, 密集区的整体几何构形都是类似的, 见图 1 中的三种情况. 每个密集区又有着复杂的内部结构. 图 3 给出了 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 0.078$ 时的第 1 密集区内部结构的对比. 可以看出密集区内部具有放大不变性, 即分形特征. 受空气阻力的影响, 放大比及分维数会发生随 α 变化. 以图 3 中的蓝色线段为例, 考察其放大比. 蓝色特征线的长度定义为其首尾端 Γ 值之差. 图 3(a)—(c) 中特征线的长度分别为 $\Delta_1 = \Gamma_3^2 - \Gamma_4^3$, $\Delta_2 = \Gamma_5^4 - \Gamma_6^5$, 和 $\Delta_3 = \Gamma_7^6 - \Gamma_8^7$. 将这一过程进行下去, 可以发现长度比逐渐趋近于一个常数. $\alpha = 0$ 时, $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_{i+1}/\Delta_i = 0.032609^{[18]}$; $\alpha = 0.039$ 时, 为 0.032724; $\alpha = 0.078$ 时, 为 0.033108. 可见, 放大比随着 α 的增大而增大, 表明空气阻力越大密集区被横向拉伸得越剧烈. 如果将该密集区看做分形体, 则 $\alpha = 0, 0.039, 0.078$ 时的计盒维数 (box-counting dimension) 分别为 $1.66 \pm 0.05, 1.68 \pm 0.06, 1.71 \pm 0.05$. 分维数随 α 而增大, 表明空气阻力越大密集区铺展的越开, 能更有效地占领相图中的面积.

每个 Γ_{2m}^m ($m = 1, 2, 3, \dots$) 类型的分岔点前面都有一个 “平台”, 而且对第 m 个 “平台”, $t_F/T = m$

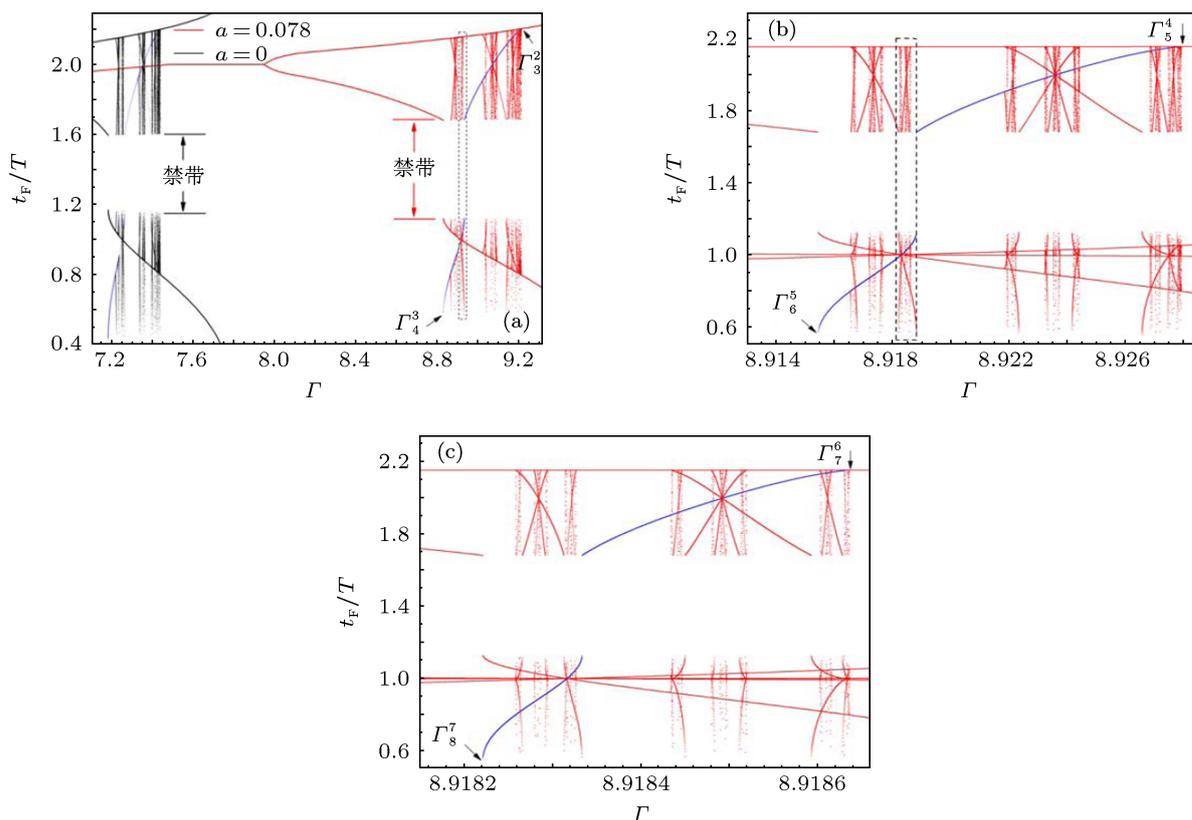


图3 (a) 第1密集区的内部结构; (b) 对(a)中虚框部分的放大; (c) 对(b)中虚框部分的放大

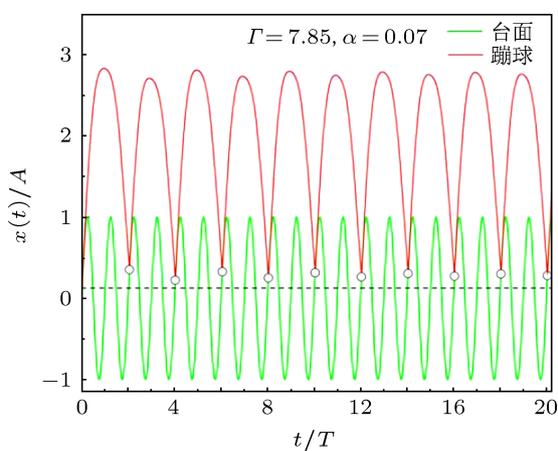


图4 $\alpha = 0.078$ 时, 第2个“平台”内蹦球的运动轨迹

(见图1). 在“平台”内蹦球经历一种永不落入吸收区的倍周期运动. 图4给出 $\alpha = 0.078$ 时第2个“平

台”内蹦球的运动轨迹. 蹦球从 t_0 时刻起跳, 然后飞行时间一长 ($t_F > 2T$) 一短 ($t_F < 2T$) 交替出现. 但是随着蹦跳次数的增加, 二者差别越来越小, 逐渐变成等间隔的蹦跳 ($t_F = 2T$), 即1跳的2倍周期运动. 这一行为一直持续到“平台”末端发生鞍-结分岔, 形成2跳的2倍周期运动. 这种鞍-结(不稳定性决定了“平台”宽度.

“平台”宽度可以根据线性稳定性条件 $\left| \frac{dt_k}{dt_{k-1}} \right| \leq 1$ 来确定. 利用碰撞时刻 $s(t) = 0$ 及形成稳定倍周期运动时存在 $t_k - t_{k-1} = mT$, 可以得到

$$\frac{dt_k}{dt_{k-1}} = \frac{(1 - e^{-\alpha\omega mT})(1 - \Gamma \sin(\omega t_k))}{\alpha\omega mT}. \quad (4)$$

再利用 $\sin(\omega t_k) \geq \sin(\omega t_0) = 1/\Gamma$, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha(e^{2\pi m\alpha} - 1)} \sqrt{(1 + (2\pi m\alpha - 1)e^{2\pi m\alpha})^2 + (2\pi m\alpha^2)^2 e^{4\pi m\alpha}} \leq \Gamma \\ & \leq \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha(e^{2\pi m\alpha} - 1)} \sqrt{(1 + (2\pi m\alpha - 1)e^{2\pi m\alpha})^2 + (4\pi m\alpha^2)^2 e^{4\pi m\alpha}}. \end{aligned} \quad (5)$$

上式给出了第 m 个“平台”的宽度,右端给出图 1 中所标注的分岔点 Γ_{2m}^p 的大小.

对于完全非弹性蹦球,重启机理和线性稳定性机理使得蹦球的运动在黏滞阻力很小(或没有)时始终是倍周期的,不存在混沌.这可以通过蹦球运动的初值敏感性加以检验.在“平台”区内,如果 t_0 有一个微小扰动 δ (比如,从 $t_0 + \delta$ 时刻开始发射),稳定性条件 $\left| \frac{dt_k}{dt_{k-1}} \right| \leq 1$ 将使这一扰动随着蹦跳次数的增加逐渐减小,最终被“磨平”,其后的运动与未受扰动时的一样;如果 δ 较大,轨道将明显偏离,但蹦跳若干次后会落入吸收区.此时,重启机理运转,在下一个振动周期内起跳条件得到满足时蹦球再次被发射出来,其后的运动与从 t_0 起跳的完全一样.在密集区内,不论蹦跳多少次最终都落入吸收区.如果 δ 较大,轨道严重偏离,很快进入吸收区并被重启.重启后又重复 t_0 时刻起跳的运动;如果 δ 较小,偏离较小,落入吸收区的时间将被延长,但终究会落入吸收区并被重启.总之,这两种机理通过不同方式将初值敏感性消掉:无论初始条件是什么样的,最终的运动形式与从 t_0 时刻起跳的一样,是倍周期的.这是完全非弹性碰撞造成的必然结果.

决定空气阻力大小的另一个因素是相对速度 $u(t)$.当 Γ 较大时,相对速度变大,空气阻力因而变大.随着空气阻力的增大,密集区被进一步横向拉伸,“平台”进一步加宽,最终二者必然相互重叠.一旦出现重叠,蹦球的运动形式将发生根本性改变.图 5 给出了 $\alpha = 0.078$ 时的高阶倍周期分岔过程.图中第 13 个“平台”与第 11 个密集区发生重叠,导致第 11 个密集区内倍周期运动(黑色)与混沌(紫红色)共存.后面的密集区(包括“平台”)因相互重叠已无法区分.产生混沌的原因是“平台”的侵入破坏了密集区内原有的重启机理,致使蹦球经历一种永不落入吸收区的运动,但此时蹦球的运动不具有鞍-结稳定性 $\left| \frac{dt_k}{dt_{k-1}} \right| \leq 1$,蹦球的运动因具有很强的初值敏感性而成为混沌的.换言之,初始时刻 t_0 的一个微小扰动会被无限放大,轨道的偏离会越来越严重,但这种偏离不会导致落入吸收区,重启机理无法运转,球的运动最终表现为混沌,运动轨道具有正的 Lyapunov 指数.图 5 中,黑色区域是倍周期的,每个 Γ 只计算 70 跳(实际上,对某些 Γ 值球只蹦跳几次就落入了吸收区,而另一些则要跳很多次才落入吸收区,但图中只绘出前 70 跳的数值);紫红色区域是混沌的,每个 Γ 值

计算 10000 跳,取后 70 跳的数据.

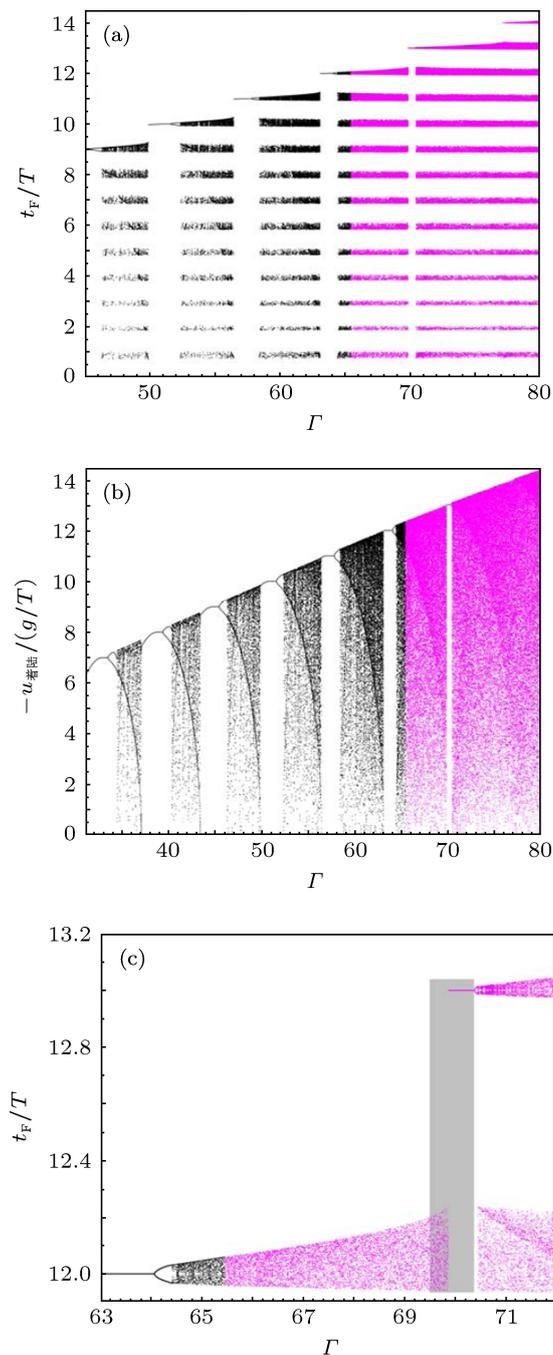


图 5 $\alpha = 0.078$ 时的分岔相图第 13 个“平台”与第 11 个密集区发生重叠 (a) 约化飞行时间 t_F/T 的相图; (b) 约化着陆速度 $-u_{\text{着陆}}/(gT)$ 的相图; (c) 第 13 个“平台”附近的局部放大. 黑色: 倍周期运动, 只计算 70 跳. 紫红: 混沌, 数据为 10000 跳的后 70 跳. 灰色区域为“平台”的理论宽度

图 5(c) 中灰色条块覆盖的区域是按 (5) 式预期的第 13 个“平台”的宽度.但是与密集区重叠的那部分“平台”(69.50 $\leq \Gamma \leq 69.87$) 消失,而残存的部分已不是原来意义下 $\left| \frac{dt_k}{dt_{k-1}} \right| \leq 1$ 形成的“平台”,

而是(包括紧接其后的分岔)混沌吸引子,因此也标示成紫红色.第11个密集区的末端与其后的“平台”重叠,在重叠的这部分内($69.50 \leq \Gamma \leq 69.87$),球的运动是无穷多跳(混沌)的.这可能是受“平台”的影响,但这种混沌行为向前“扩散”了一段距离($65.46 \leq \Gamma \leq 69.50$),产生这种“扩散”现象的原因目前尚不清楚.

如果阻力系数 α 较大,这种重叠会提前发生.图6给出了 $\alpha = 0.39$ 时的分岔相图.第4个“平台”与第2个密集区发生部分重叠,但“扩散”效应已将第2个密集区完全转化为混沌.与图5中的情况不同的是,第4个“平台”中有一部分(黑色线段)仍是 $\left| \frac{dt_k}{dt_{k-1}} \right| \leq 1$ 决定的“平台”,而后面的那部分是

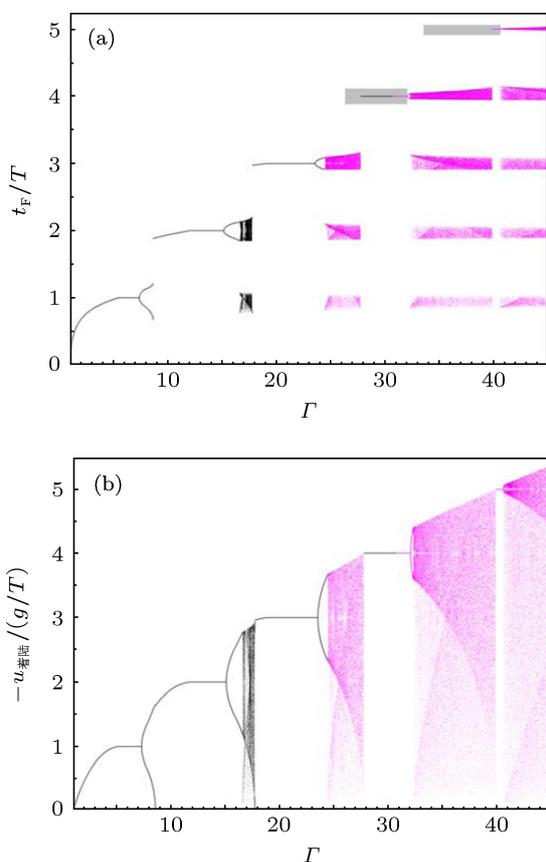


图6 $\alpha = 0.39$ 时 t_F/T 和 $-u_{\text{着陆}}/(gT)$ 的分岔相图(标注与图5中的相同)

混沌吸引子形成的.第5个“平台”与密集区的重叠区域较大,残存部分因而很小.之后的“平台”因与密集区重叠已而消失.第4,5个“平台”后面仍然存在分岔,虽然分岔不是由鞍-结不稳定性造成的,

但分岔点的大小与(5)式右端给出的一致.总之,一旦发生重叠,(5)式给出的“平台”首端已失效.

系统的控制参数为 Γ 和 α , 只要 α 相同,系统会给出相同的动力学过程或相图.蹦球的运动似乎与振动频率无关,但 α 是 μ, f 和 g 的组合.如果将 μ 固定,分岔过程将明显依赖于振动频率 f , 见图7, 其中 $\mu = 3 \text{ s/m}, g = 9.80 \text{ m/s}^2$. 可以看出,频率越小分岔点的数值越大,频率越大分岔点逐渐趋近于无空气阻力时的数值.这是因为 α 与 f 成反比,而决定分岔点大小的参量是 α (见(5)式右端).分岔点与频率的这种关系,我们已在受振颗粒床中进行了检验,相关结果将另处讨论.

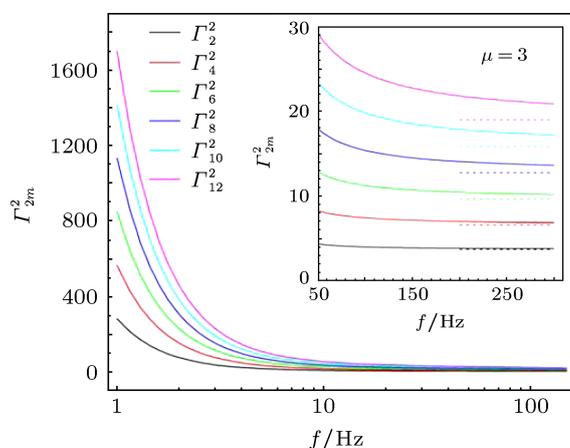


图7 Γ_{2m}^2 型分岔点与台面振动频率 f 的关系 $m = 1, 2, 3 \dots$ (插图: 频率较大时的 Γ_{2m}^2-f 曲线. 虚线: $\alpha = 0$ 时的 Γ_{2m}^2 值与 f 无关)

4 结论

空气阻力对完全非弹性蹦球的蹦跳行为有着决定性影响,这体现在: 1) 空气阻力引入新的控制参数 α ; 2) 阻力越大分岔点的数值越大,并与振动频率有很强的依赖关系; 3) 分岔相图被纵向压缩横向拉伸; 4) 阻力较小时,重启机理和鞍-结(不)稳定性共同导致蹦球的运动是倍周期的; 5) 阻力较大时,密集区与“平台”重叠,这两种机制受到破坏使蹦球的运动成为混沌的; 6) α 越小,出现重叠时的 Γ 值越大,不存在引起混沌的临界 α 值. 所得结果将有助于耗散系统的非线性动力学行为及受振颗粒体系中有关倍周期分岔现象的理解.

- [1] Fermi E 1949 *Phys. Rev.* **15** 1169
- [2] Lichtenberg A J, Lieberman M A 1983 *Regular and Stochastic Motion* (New York: Springer-Verlag) p190
- [3] Pustynnikov L D 1978 *Trans. Moscow Math. Society* **2** 1
- [4] Tufillaro N B, Albano A M 1986 *Am. J. Phys.* **54** 939
- [5] Tufillaro N B, Abbott T, Reilly J 1992 *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos* (Redwood: Addison-Wesley)
- [6] Pierański P, Kowalik Z, Franaszek M 1985 *J. Phys.* **46** 681
- [7] Celaschi S, Zimmerman R L 1987 *Phys. Lett. A* **120** 447
- [8] Holmes P 1981 *J. Sound Vibration* **84** 173
- [9] Bapat C, Sankar S, Popplewell N 1986 *J. Sound Vibration* **108** 99
- [10] Tufillaro N B 1994 *Phys. Rev. E* **50** 4509
- [11] Luo A C J, Han R P S 1996 *Nonlinear Dynamics* 1996 **10** 1
- [12] Barroso J J, Carneiro M V, Macau E E N 2009 *Phys. Rev. E* **79** 026206
- [13] Lichtenberg A J, Lieberman M A, Cohen R H 1980 *Physica D* **1** 291
- [14] Mehta A, Luck J M 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 393
- [15] Luck J M, Mehta A 1993 *Phys. Rev. E* **48** 3988
- [16] Giusepponi S, Marchesoni F 2003 *Europhys. Lett.* **64** 36
- [17] Giusepponi S, Marchesoni F, Borromeo M 2005 *Physica A* **351** 142
- [18] Jiang Z H, Zhao H F, Zheng R H 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 7579 (in Chinese) [姜泽辉, 赵海发, 郑瑞华 2009 物理学报 **58** 7579]
- [19] Gilet T, Vandewalle N, Dorbolo S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 1539
- [20] Wassgren C R, Brennen C E, Hunt M L 1996 *J. Appl. Mech.* **63** 712
- [21] Jiang Z H, Liu X Y, Peng Y J, Li J W 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 5692 (in Chinese) [姜泽辉, 刘新影, 彭亚晶, 李建伟 2005 物理学报 **54** 5692]
- [22] Jiang Z H, Wang Y Y, Wu J 2006 *Europhys. Lett.* **43** 417
- [23] Jiang Z H, Zheng R H, Zhao H F, Wu J 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 3727 (in Chinese) [姜泽辉, 郑瑞华, 赵海发, 吴晶 2007 物理学报 **56** 3727]
- [24] Melo F, Umbanhowar P B, Swinney H L 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3838
- [25] Moon S J, Shattuck M D, Bizon C, Goldman D I, Swift J B, Swinney H L 2001 *Phys. Rev. E* **65** 011301
- [26] Pak H K, Van Doorn E, Behringer R P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4643
- [27] Aoki K M, Akiyama T, Yamamoto K, Yoshikawa T 1997 *Europhys. Lett.* **40** 159
- [28] Paster J M, Maza D, Zuriguel I, Garcimartín A, Boudet J F 2007 *Physica D* **232** 128
- [29] Möbius M E, Lauderdale B E, Nagel S R, Jaeger H M 2001 *Nature* **414** 270
- [30] Naylor M A, Swift M R, King P J 2003 *Phys. Rev. E* **68** 012301
- [31] Yan X, Shi Q, Hou M, Lu K, Chan C K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 14302
- [32] Klein M, Tsai L L, Rosen M S, Pavlin T, Candela D Walsworth R L 2006 *Phys. Rev. E* **74** 010301
- [33] Liu C, Wang L, Wu P, Jia M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 188001
- [34] Naylor M A, Sanchez P, Swift M R 2002 *Phys. Rev. E* **66** 057201
- [35] Zhou Z G, Shi Y Y, Liu C B, Wang G H, Yang H J 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 200501 (in Chinese) [周志刚, 石玉仁, 刘丛波, 王光辉, 杨红娟 2012 物理学报 **61** 200501]
- [36] Jiang Z H, Guo B, Zhang F, Wang F L 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 8444 (in Chinese) [姜泽辉, 郭波, 张峰, 王福力 2010 物理学报 **59** 8444]

Effect of air damping on dynamical behaviors of a completely inelastic bouncing ball*

Jiang Ze-Hui[†] Han Hong Li Xiao-Ran Wang Fu-Li

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

(Received 9 June 2012; revised manuscript received 16 July 2012)

Abstract

A ball dropped on a vertically vibrating table exhibits intricate dynamical behaviors including period-doubling bifurcations and chaos. If the collision between the ball and the table is completely inelastic, the motion of the ball is always periodic, and the plateaus caused by saddle-node instability and clumping structures for periodic trajectories occur in the bifurcation diagram. Here the effect of air damping on the dynamics of the ball with zero elasticity is analyzed. The air damping is treated as linear viscous one. It is shown that a weak air damping does not change the sequence of bifurcations, but makes the bifurcation points shift to larger values and broadens the transverse dimensions of the plateaus and the clumping zones in the diagrams. However, when the air damping becomes larger, overlapping between the plateaus and clumping zones takes place. In the overlapping section, the mechanism originally leading to periodic motion is destroyed, and chaos is introduced.

Keywords: period-doubling bifurcation, bouncing ball, chaos, air-damping

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 45.70.-n

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10974038).

[†] E-mail: zehuijiang@yahoo.com