

## 障碍物后周期性 Bottle beam 的自重建\*

范丹丹<sup>1)</sup> 吴逢铁<sup>1)†</sup> 程治明<sup>1)</sup> 王涛<sup>1)</sup> 杜团结<sup>1)</sup> 朱健强<sup>2)‡</sup>

1) (华侨大学信息科学与工程学院福建, 泉州 362021)

2) (中国科学院上海光学精密机械研究所高功率激光物理联合实验室, 上海 201800)

(2012年5月4日收到; 2012年7月7日收到修改稿)

本文分析了由两束贝塞尔 (Bessel) 光相干产生的周期性局域空心光束 (Bottle beam) 遇到障碍物后的自重建特性. 由汉克尔波理论分析了自重建的原理, 利用衍射积分理论数值模拟了轴上圆形障碍物对光束传输的影响. 结果表明, 周期性 Bottle beam 遇到障碍物遮挡时具有自重建特性, 重建后的光束依然保持着障碍物前的光强分布特性. 研究结果对于利用周期性 Bottle beam 实现微粒的多层面操控具有特殊意义.

**关键词:** 汉克尔波理论, 衍射理论, 周期性 Bottle beam, 自重建

**PACS:** 41.85.Ja, 42.25.-p, 42.25.Fx

## 1 引言

近年来, 在光学工程及基础科学研究领域, 一种叫 Bottle beam 的特殊光束引起了国内外科研人员的广泛关注<sup>[1,2]</sup>. 它是一种在光传播方向上有着强度极低 (甚至为零) 的特殊光束, 且在此区域外三维空间都围绕着高强度的光<sup>[3]</sup>, 可作为光学捕捉和光学扳手等工具, 还可应用于原子囚禁和原子引导等领域<sup>[4-7]</sup>.

无衍射 Bessel 光束除了无衍射特性外, 它的另一个重要特性就是遇到障碍物后可以实现光束的自重建. 研究表明无论是零阶、高阶 Bessel 光或 Bessel-Gauss 光都具有自重建特性<sup>[8-10]</sup>. 然而, Bottle beam 或周期性 Bottle beam 遇到障碍物能否发生自重建? 这一特性尚未得到研究, 这也就是本文研究的目的. 目前已有多种途径可以获得 Bottle beam 或周期性 Bottle beam. 1998 年 Chavez-Cerda 等提出利用两束同频率且具有不同径向波矢分量的 Bessel 光相干可以产生一串形如链条状的周期性 Bottle beam<sup>[11]</sup>, 2006 年 Ahluwalia 等

利用 Double-Axicon 产生周期性的 Bottle beam<sup>[12]</sup>, 2009 年吴逢铁等人提出利用两个不同底角的轴棱锥产生两束 Bessel 光相干获得了周期性的 Bottle beam, 并通过实验进行验证<sup>[13]</sup>, 2012 年程治明等提出了用单一光学元件——液体轴棱锥也可以产生周期性的 Bottle beams<sup>[14]</sup>. 本文基于汉克尔 (Hankel) 波理论, 详细分析了由两束 Bessel 光相干产生的周期性 Bottle beam 遇到障碍物后的自重建特性, 利用衍射积分理论和柯林斯公式数值模拟了周期性 Bottle beam 经过轴上圆形障碍物的传输过程. 结果表明, 周期性 Bottle beam 通过障碍物遮挡可以发生自重建现象. 研究结果拓宽了 Bottle beam 的应用范围, 对于利用周期性 Bottle beam 实现多层面微粒操控具有特殊意义.

## 2 理论分析

Durnin 等<sup>[15]</sup> 提出自由空间标量波动方程存在另一组特殊解, 它可用第一类零阶 Bessel 函数描述, 即我们熟知的无衍射 Bessel 光. 平面波在线性介质中传播的波动方程用亥姆赫兹 (Helmholtz) 方程式

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61178015)、国家高功率激光物理重点实验室开放基金 (批准号: SG001102)、福建省自然科学基金 (批准号: 2012J01278) 和泉州市科技重点项目 (批准号: 2011G9) 资助的课题.

† E-mail: fengtie@hqu.edu.cn

‡ E-mail: jqzhu@mail.shcnc.ac.cn

来表示

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} + k^2 E = 0, \quad (1)$$

其中,  $k = \frac{\omega}{\nu}$  为波数,  $\omega$  为光波的频率,  $\nu$  为相对光速. 方程 (1) 式的解为

$$E(x, y, z) = \begin{cases} E_0 H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_z z) \\ E_0 H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \exp(ik_z z) \end{cases}, \quad (2)$$

式中  $H_0^{(1)}(k_\rho \rho)$  和  $H_0^{(2)}(k_\rho \rho)$  分别为第一类和第二类汉克尔函数 (Hankel function),  $k_\rho, k_z$  分别表示径向和纵向波矢分量. Hankel 函数可以表示为

$$H_n^1(x) \exp(ik_z z) = [J_n(k_\rho \rho) + iN_n(x)] \exp(ik_z z), \quad (3)$$

$$H_n^2(x) \exp(ik_z z) = [J_n(k_\rho \rho) - iN_n(x)] \exp(ik_z z). \quad (4)$$

当  $n = 0$  时, 将 (3), (4) 式相加可得 Hankel 波产生零阶 Bessel 光束的表达式

$$[H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x)] \exp(ik_z z) = 2J_0(k_\rho \rho) \exp(ik_z z). \quad (5)$$

(5) 式表示产生 Bessel 光束是由轴棱锥出射的两列汉克尔波的叠加.

图 1 为用 Hankel 波描述 Bessel 光形成及自重建示意图. ICWs (Incoming Conical Wave) 代表入射锥面波, OCWs (Outgoing Conical Wave) 代表出射锥面波, 以函数形式表示为 ICWs  $\sim H_0^{(1)}(x) \exp(ik_z z)$ , OCWs  $\sim H_0^{(2)}(x) \exp(ik_z z)$ . 产生的 Bessel 光束可分成 3 个区域: 第一个区域仅存在入射锥面波 (ICWs), 第二个区域 (ABCD 所围成的菱形区域) OCWs 和 ICWs 重叠将产生无衍射 Bessel 光, 第三个区域仅存在出射锥面波 (OCWs).

若在无衍射区域内放置障碍物, 则 ICW 或 OCW 被遮挡, 或者两者同时被遮挡, 在没有 ICW 和 OCW 相互叠加的区域将无法形成 Bessel 光, 但是没有被挡住的 ICW 和 OCW 继续传播后叠加仍然可以形成 Bessel 光, 表现出 Bessel 光经过障碍物一段距离后发生自重建现象. 若障碍物的直径为  $D$ , 则障碍物后 Bessel 光自重建的最短距离通过几何

关系可以表示为

$$Z_{\min} = \frac{D}{2} \left( \frac{k_z}{k_\rho} \right). \quad (6)$$

如图 2 所示, 若将两束同频率且具有不同径向波矢分量的 Bessel 光束相干叠加, 假设 ABCD 区域为径向波矢分量为  $k_{\rho 1}$  的 Bessel 光束 (B1), AEFG 区域为径向波矢分量为  $k_{\rho 2}$  的 Bessel 光束 (B2), AHCI 区域为由两束 Bessel 光束相干叠加的区域. 因  $k_{\rho 1} \neq k_{\rho 2}$  (图 2 中  $k_{\rho 1} > k_{\rho 2}$ ), 所以 AHCI 区域将产生周期性的 Bottle beam, 且 Bottle beam 的空间周期可表示为<sup>[16]</sup>

$$Z_T = \left| \frac{2\pi}{k_{z1} - k_{z2}} \right|, \quad (7)$$

其中, 纵向波矢分量  $k_{z1} = \sqrt{k_1^2 - k_{\rho 1}^2}$ ,  $k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_{\rho 2}^2}$ , 波数  $k_1 = k_2 = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

若在 AHCI 区域的轴上放置一直径为  $D$  的圆形障碍物, 由图 1 中 Bessel 光束的自重建特性分析可知, 参与干涉叠加的两束 Bessel 光经过此障碍物后一小段距离都将各自发生自重建现象, 且各自对应一段最小自重建距离  $Z_{\min 1}$  和  $Z_{\min 2}$ . 由 (6) 式可知, B1 相应的最小自重建距离为  $Z_{\min 1} = \frac{D}{2} \left( \frac{k_1}{k_{\rho 1}} \right)$ , B2 相应的最小自重建距离为  $Z_{\min 2} = \frac{D}{2} \left( \frac{k_2}{k_{\rho 2}} \right)$ . 在图 2 中,  $k_1 = k_2 = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $k_{\rho 1} > k_{\rho 2}$ , 所以  $Z_{\min 1} < Z_{\min 2}$ . 所以在  $Z_{\min 1}$  段两束 B1 和 B2 同时被遮挡, 形成强度为 0 的暗域. 在  $Z_{\min 2} - Z_{\min 1}$  段, 只有 B2 被遮挡, 形成了 Bessel 分布. 而在  $Z_{\min 2}$  段以后, B1 和 B2 都没有被遮挡而完成了自重建, 自重建以后的 B1 和 B2 将再次相干叠加产生周期性的 Bottle beam, 表现为周期性的 Bottle beam 经过障碍物可以发生自重建现象, 且自重建的最小距离为  $Z_{\min 2}$ .

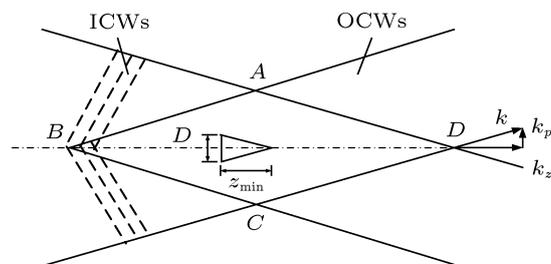


图 1 Bessel 光形成及自重建示意图

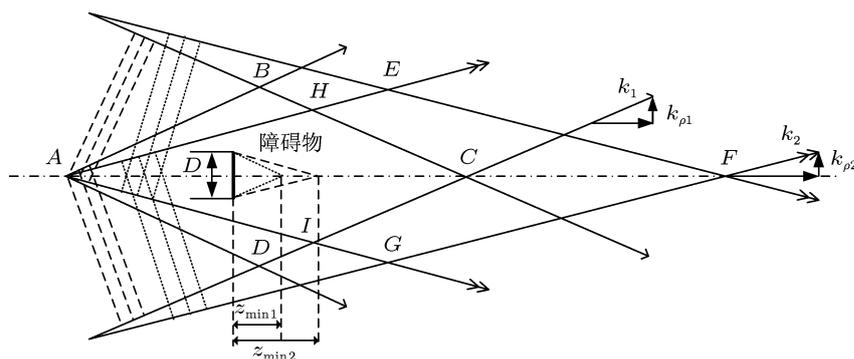


图2 两束 Bessel 光相干形成周期性 Bottle beam 及自重建示意图

### 3 数值模拟

由于理想 Bessel 光是非平方可积的, 具有无穷大的能量, 实际上只能产生有限孔径内的近似 Bessel 光, 即在一段比较长的传输距离内 (最大无衍射距离  $Z_{\max}$ ) 保持无衍射特性在傍轴近似下, 由柱坐标下的柯林斯 (Collins) 公式可推导出 Bessel 光束在自由空间传输距离  $z$  后的光场分布

$$E(\rho, z) = \frac{-ik \exp(ikz)}{z} \left[ \int_0^R u(r) J_n\left(\frac{kr\rho}{z}\right) \times \exp\left[\frac{ik(r^2 + \rho^2)}{2z}\right] r dr \right]. \quad (8)$$

因此两束同频率且具有不同径向波矢分量的 Bessel 在自由空间传输距离  $z$  后的光场分布为

$$E_1(\rho, z) = -\frac{ik \exp(ikz)}{z} \left[ \int_0^R u_1(r) J_n\left(\frac{kr\rho}{z}\right) \times \exp\left[\frac{ik(r^2 + \rho^2)}{2z}\right] r dr \right], \quad (9)$$

$$E_2(\rho, z) = \frac{-ik \exp(ikz)}{z} \left[ \int_0^R u_2(r) J_n\left(\frac{kr\rho}{z}\right) \times \exp\left[\frac{ik(r^2 + \rho^2)}{2z}\right] r dr \right], \quad (10)$$

$u_1, u_2$  分别为底角  $0.5^\circ$  和  $0.8^\circ$  的轴棱锥产生的 Bessel 光束, 相干叠加后的合场强为

$$I_1(\rho, z) = |E_1(\rho, z) + E_2(\rho, z)|^2. \quad (11)$$

选取参数, 假设相干叠加的两束 Bessel 光由光束半径  $R = 10 \text{ mm}$ , 波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  的 He-Ne 光分别经过底角为  $\gamma_1 = 0.5^\circ$ ,  $\gamma_2 = 0.8^\circ$  的轴棱锥产生. 轴棱锥折射率  $n = 1.458$ , 波数  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\rho$  为观察面径向坐标. 由 (9)—(11) 式可以模拟出两

束 Bessel 光相干叠加后的光强分布, 如图 3 所示. 由 (7) 式可以计算得周期性 Bottle beam 的空间周期  $Z_T = 50.786 \text{ mm}$ , 与图 3 相符合.

若用直径为  $D$  的圆形障碍物置于光轴上, 则障碍物后的光场可以通过改变 (8) 式的积分范围表示为

$$E3(\rho, z) = \frac{-ik \exp(ikz)}{z} \left[ \int_{D/2}^{10} u_1(r) J_n\left(\frac{kr\rho}{z}\right) \times \exp\left[\frac{ik(r^2 + \rho^2)}{2z}\right] r dr \right], \quad (12)$$

$$E4(\rho, z) = \frac{-ik \exp(ikz)}{z} \left[ \int_{D/2}^{10} u_2(r) J_n\left(\frac{kr\rho}{z}\right) \times \exp\left[\frac{ik(r^2 + \rho^2)}{2z}\right] r dr \right]. \quad (13)$$

相干叠加后的合场强为

$$I2(\rho, z) = |E3(\rho, z) + E4(\rho, z)|^2. \quad (14)$$

选取障碍物直径  $D = 0.7 \text{ mm}$ , 且障碍物放置在  $z = 100 \text{ mm}$  处. 利用 (12)—(14) 式可模拟出两束 Bessel 光相干产生周期性的 Bottle beam 被轴上圆形障碍物遮挡后的光强分布, 如图 4 所示.

由图 4 可以看出, 在两束 Bessel 光干涉叠加产生的周期性 Bottle beam 被障碍物遮挡后的一小段距离内, 周期性 Bottle beam 遭到破坏而消失, 在经过一段传输距离后, 周期性 Bottle beam 再次出现, 当远离障碍物后, 周期性 Bottle beam 几乎恢复了障碍物前的原状, 发生自重建现象. 由  $Z_{\min 2} = D/2 \left( \frac{k_2}{k_{\rho 2}} \right)$  可计算得周期性 Bottle beam 的最小自重建距离  $Z_{\min 2} = 81.36 \text{ mm}$ , 与图 4 基本符合.

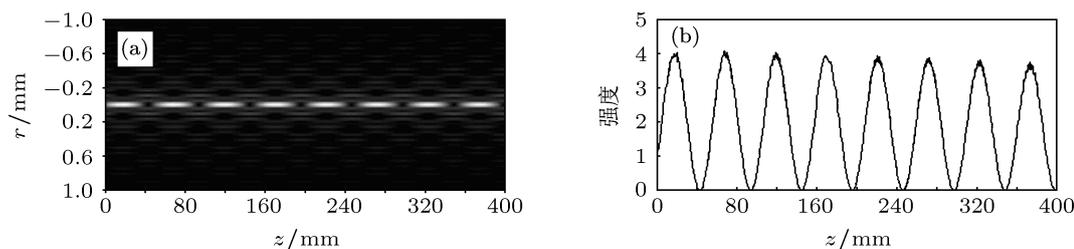


图3 两束 Bessel 光束相干产生周期性 Bottle beam 的纵向剖面光强分布 (a) 和轴上光强分布 (b)

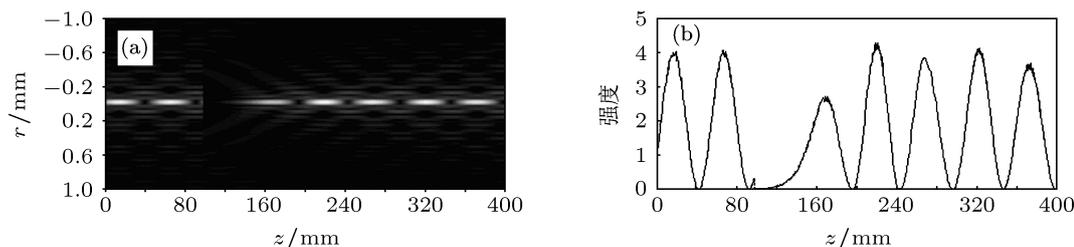


图4 周期性 Bottle beam 被障碍物遮挡后纵向剖面光强分布 (a) 和轴上光强分布图 (b)

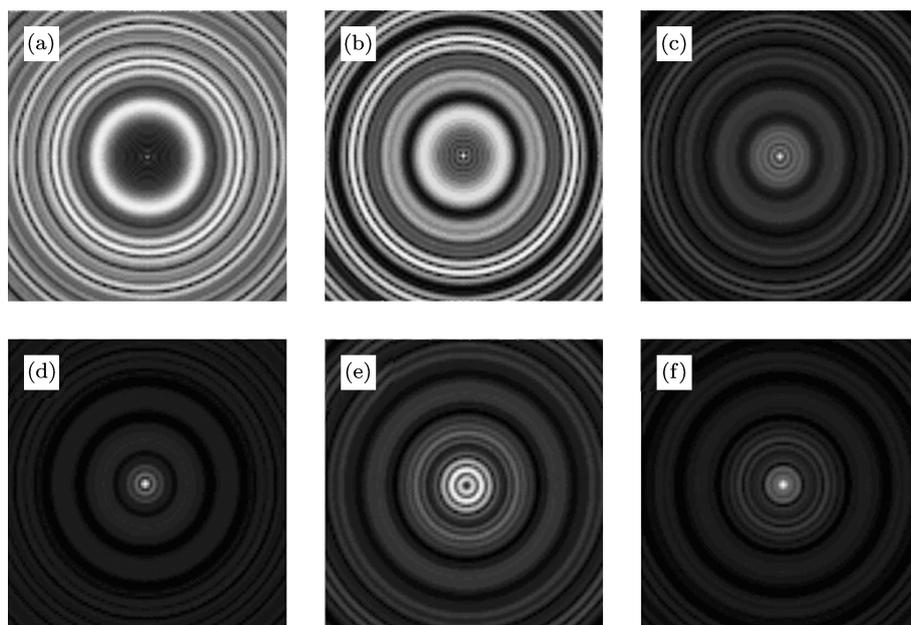


图5  $z$  轴不同位置处的截面光强分布 (a)  $z = 100$  mm; (b)  $z = 150$  mm; (c)  $z = 170$  mm; (d)  $z = 190$  mm; (e)  $z = 229$  mm; (f)  $z = 240$  mm

图5为两束 Bessel 光相干产生周期性的 Bottle beam 在不同位置处的截面光强分布. 两束 Bessel 光干涉叠加产生周期性 Bottle beam 如图 5(a)–(f) 所示, 障碍物位于  $z = 100$  mm 处, B1 相应的最小自重建距离为  $Z_{\min 1} = D/2 \left( \frac{k_1}{k_{\rho 1}} \right) = 50.85$  mm, B2 相应的最小自重建距离为  $Z_{\min 2} = D/2 \left( \frac{k_2}{k_{\rho 2}} \right) =$

81.36 mm. 周期性 Bottle beam 被障碍物遮挡, 对应图 5(a); 在  $Z_{\min 1}$  段两束 Bessel 光同时被遮挡, 对应图 5(b), 但轴上光强并不为零, 这是由于衍射效应引起的, 类似于泊松亮斑; 在  $Z_{\min 2} - Z_{\min 1}$  段, 只有 B2 被遮挡, 形成了 Bessel 分布, 对应图 5(c); 在  $Z_{\min 2}$  段以后, B1 和 B2 都没有被遮挡而完成了自重建, 对应图 5(d)–(f); 可以看出光束又恢复了

周期性 Bottle beam 的光强分布特性, 和上文汉克波理论分析相符合.

#### 4 结论

依据汉克尔 (Hankel) 波理论分析了 Bessel 光形成及自重建特性, 在此基础上进一步分析了周

期性 Bottle beam 遇到障碍物后的自重建原理, 利用衍射积分理论数值模拟了周期性 Bottle beam 被轴上圆形障碍物遮挡前后的光强分布特性. 从模拟结果可以直观地看出周期性 Bottle beam 通过障碍物遮挡可以发生自重建现象. 研究结果对于周期性 Bottle beam 在多层粒子操控领域的应用具有重要的指导意义.

- 
- [1] Freegrade T, Dholakia K 2000 *Phys. Rev. A* **66** 413
- [2] Ahluwalia B P S, Yuan X C, Tao S H 2004 *Opt. Commun.* **238** 177
- [3] Arlt J, Padgett M J 2000 *Opt. Lett.* **25** 191
- [4] MacDonald M P, Paterson L, Volke-Sepulveda K, Arlt J, Sibbett W, Dholakia K 2002 *Science*. **296** 1101
- [5] Chen C H, Tai P T, Hsieh W F 2004 *Appl. Opt.* **43** 6001
- [6] Ahluwalia B P S, Yuan X C, Tao S H 2004 *Opt. Commun.* **238** 177
- [7] Philip G M, Viswanathan N K 2010 *J. Opt. Soc. Am.* **27** 2394
- [8] Zhang Q A, Wu F T, Zheng W T, Pu J X 2011 *Sci. Sin. Phys. Mech. Astron.* **41** 1131 (in Chinese) [张前安, 吴逢铁, 郑维涛, 蒲继雄 2011 中国科学 **41** 1131]
- [9] Litvin I A, McLaren M G, Forbes A 2009 *Opt. Commun.* **282** 1078
- [10] Bouchal Z, Wagner J, Chlup M 1998 *Opt. Commun.* **151** 207
- [11] Chavez-Cerda S, Meneses-Nava M A, Hickman J M 1998 *Opt. Lett.* **23** 1871
- [12] Ahluwalia B P S, Cheong W C, Yuan X C, Zhang L S, Tao S H, Bu J, Wang H 2006 *Opt. Lett.* **31** 987
- [13] Wu F T, Liu B, Lu W H, Ma M T 2009 *Chin. J. Lasers* **36** 379 (in Chinese) [吴逢铁, 刘彬, 卢文和, 马宝田 2009 中国激光 **36** 2899]
- [14] Cheng Z M, Wu F T, Zhang Q A, Zheng W T 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 094201 (in Chinese) [程治明, 吴逢铁, 张前安, 郑维涛 物理学报 2012 **61** 094201]
- [15] Durmin J, Miceli J J, Eberly J H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1499
- [16] Wu F T, Zeng X H 2008 *Acta Opt. Sin.* **28** 174 (in Chinese) [吴逢铁, 曾夏辉 2008 光学学报 **28** 174]

# The self-reconstruction of periodic Bottle beam behind obstacle\*

Fan Dan-Dan<sup>1)</sup> Wu Feng-Tie<sup>1)†</sup> Cheng Zhi-Ming<sup>1)</sup> Wang Tao<sup>1)</sup>  
Du Tuan-Jie<sup>1)</sup> Zhu Jian-Qiang<sup>2)‡</sup>

1) (College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

2) (Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China)

(Received 4 May 2012; revised manuscript received 7 July 2012)

## Abstract

In this paper, the self-reconstructing property of periodic bottle beam generated by the Bessel beam interfering behind obstacle is analyzed. Based on the Hankel wave theory, we analyze the principle of self-reconstruction. According to the diffraction theory, we derive the evolution of beam behind an on-axis circular obstacle. The results show that the periodic bottle beam has the self-reconstructing property and the reconstructed beam maintains the beam intensity distribution. The research results are significant for realizing the multi-plane micro-manipulation by using a periodic bottle beam.

**Keywords:** Hankel waves theory diffraction theory, periodic Bottle beam, self-reconstructing

**PACS:** 41.85.Ja, 42.25.-p, 42.25.Fx

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61178015), the High Power Laser Physics Key Laboratory Open Foundation of China (Grant No. SG001102), the Natural Science Foundation Project of Fujian Province (Grant No. 2012J01278), and the Science and Technology Key Project of Quanzhou City (Grant No. 2011G9).

† E-mail: fengtie@hqu.edu.cn

‡ E-mail: jqzhu@mail.shenc.ac.cn