一类广义鸭轨迹系统轨线的构造 *

欧阳成[1)] 姚静荪[2)] 温朝晖[3)] 莫嘉琪[1)2)†]

1) (湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

2) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

3) (安徽财经大学统计与应用数学学院应用数学研究所, 蚌埠 233030)

(2011 年 5 月 3 日收到; 2011 年 6 月 9 日收到修改稿)

研究了一类广义鸭轨迹系统. 首先讨论了一类广义 Lienard 系统的解, 其次利用微分方程自治系统的定性理论构造了有头鸭轨迹, 并且列举了具体的构造鸭轨迹的例子. 利用本文的构造方法, 还可构造更广泛的鸭轨迹.

关键词: 鸭轨迹, 轨线, 自治系统

PACS: 02.30.Mv

1 引 言

当 Callot 等 [1,2] 提出了鸭轨迹现象后, 相继有许多学者对鸭轨迹理论进行了研究. 当前, 非线性问题鸭轨迹理论广泛存在于物理学、力学、生态学和其他自然科学的许多领域应用中. 近年来许多学者在理论物理、电路、生化等方面都对鸭轨迹做了一些研究 [3−7]. 鸭轨迹主要包括无头鸭轨迹、有头鸭轨迹等表象. 当前非线性系统的定量和定性的各种方法大量涌现. 莫嘉琪等 [8−19] 也研究了有关非线性反应扩散、孤波、激光脉冲、生态、大气物理等问题. 本文是利用微分系统的定性理论构造一类鸭轨迹.

典型的鸭轨迹方程已有许多研究 [4−7], 它代表的是各类相应自然现象的精简和浓缩. 本文是利用一个简练的方法来讨论和构造具有更广应用的一类广义鸭轨迹系统.

2 广义 Lienard 系统

讨论如下一类系统:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - a_1 y = f_1(x, y), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2 x = 0, \tag{2}$$

其中 x, y 为状态变量, a_1 $(i = 1, 2)$ 为正参数, 并设 $f_1 = bx^2y$, 这里 b 为正常数. 系统 (1), (2) 属于二阶广义 Lienard 系统.

广义 Lienard 系统 (1), (2) 是自治系统. 自治系统 (1), (2) 对应的线性齐次系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - a_1 y = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2 x = 0,$$

在 x-y 相平面上的零点 $(0, 0)$ 为唯一的奇点, 即中心. 又因

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{|f_1(x, y)|}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = 0,$$

故对应的奇点也是自治系统 (1), (2) 的中心. 它是稳定的, 但为非渐近的. 所以系统的轨线是封闭的, 对应的解为周期的.

系统 (1), (2) 可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-a_2 x}{(a_1 + bx^2)y}. \tag{3}$$

不难得到方程 (3) 的解曲线为

$$(a_1 + bx^2) \exp \frac{by^2}{a_2} = K, \tag{4}$$

其中 $K \geqslant a_1$ 为任意常数. (4) 式就是系统 (1), (2) 在相平面上的闭轨线.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11071205, 11101349)、中国科学院战略性先导科技专项 —— 应对气候变化的碳收支认证及相关问题项目 (批准号: XDA01020304)、浙江省自然科学基金项目 (批准号: Y6110502)、安徽高校省级自然科学研究项目 (批准号: KJ2011A135, KJ2011Z003) 和江苏省自然科学基金项目 (批准号: BK2011042) 资助的课题.

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

图 1, 图 2 分别为系统 (1), (2) 取参数 $a_1 = a_2 = b = 1$, 当任意常数 $K = 3$ 和 $K = 2$ 时在相平面上轨线的图形. 可以看出, 这时轨线在相平面上关于 x 轴和 y 轴对称.

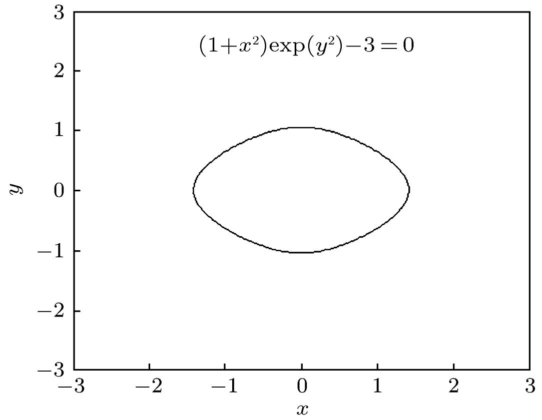

图 1　系统 (1), (2) 解的轨线 ($a_1 = a_2 = b = 1, x_0 = 0, K = 3$)

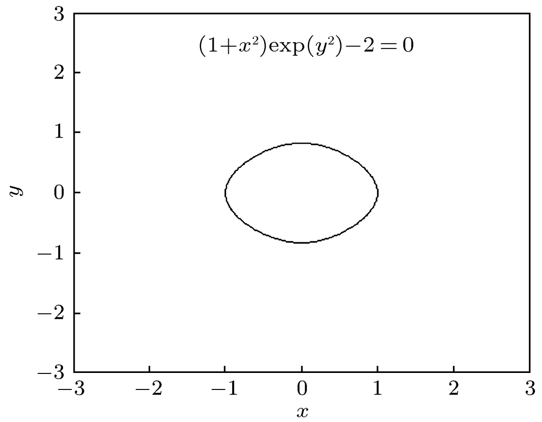

图 2　系统 (1), (2) 解的轨线 ($a_1 = a_2 = b = 1, x_0 = 0, K = 2$)

再考虑线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_1 y + f_2(y), \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2 x = 0, \tag{6}$$

其中 $f_2(y) = bx_0^2 y$, 而 x_0 为常数.

系统 (5), (6) 对应的齐次系统的特征根为

$$\lambda_i = \pm i(a_2(a_1 + bx_0^2))^{1/2}), \quad (i = 1, 2). \tag{7}$$

因此特征根为零实部的共轭复根. 系统的解在相平面上也为非渐近稳定的. 对应的奇点 (零点) 为中心, 轨线为对称于 x 轴和 y 轴的封闭曲线.

线性系统 (5), (6) 可表示为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-a_2 x}{(a_1 + bx_0^2)y}. \tag{8}$$

方程 (8) 的解曲线为

$$a_2 x^2 + (a_1 + bx_0^2)y^2 = K_1, \tag{9}$$

其中 $K_1 \geqslant 0$ 为任意常数. 轨线 (9) 式表示一族椭圆, 并且轨线也对称于 x 轴和 y 轴.

比较系统 (1), (2) 与系统 (5), (6) 所对应的在相平面上的方程 (3) 和方程 (8), 不难看出两系统在相平面上的轨线在 $x = x_0$ 时的斜率相等. 因此对于任意的 y, 在点 (x_0, y) 处两族对应轨线均相切. 根据这个性态, 我们在下面来考虑一个鸭轨迹系统.

3 广义鸭轨迹自治系统

研究如下一类广义鸭轨迹自治系统:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - a_1 y = f(x, y), \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2 x = 0, \tag{11}$$

其中

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & x \geqslant x_0, \\ f_2(y), & x \leqslant x_0, \end{cases} \tag{12}$$

显然 $f_1(x_0, y) = f_2(y)$. 故 $f(x, y) \in C^0$, 即 $f(x, y)$ 为分段表示的连续函数.

鸭轨迹自治系统 (10), (11) 在电路理论中有应用. 例如考虑一个电路回路如图 3 所示, 它服从如下自治系统 [7]

$$L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -u + f(i), \quad C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i,$$

其中 i, u 分别为回路的电流和电压状态函数, L_1 为电感量, C_1 为电容量, $f(i)$ 为与电流有关的非线性变化的电阻值. 关于这个电路回路系统的鸭轨迹线讨论情况参见文献 [7].

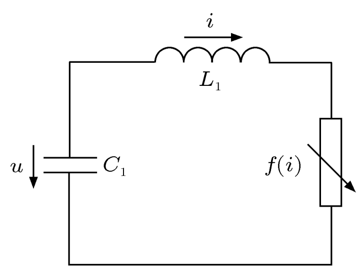

图 3　二阶自治系统电路回路

由上面的广义 Lienard 系统 (1), (2) 和线性系统 (5), (6) 的讨论可知, 广义鸭轨迹自治系统 (10), (11) 的解在相平面上的轨线在 $x \geqslant x_0$ 部分由 (4) 式表示, 在 $x \leqslant x_0$ 部分由 (9) 式表示, 并在 $x = x_0$ 处光滑连接. 因此我们能够构造广义鸭轨迹自治系统 (10), (11) 的解在相平面上的封闭轨线曲

线 $ABCDA$ 如下: 曲线 ABC 段为系统 (1), (2) 取定某任意常数 K 的轨线 (4) 式的并在 $x \geqslant x_0$ 的区域部分, 其中点 A, C 在 $x = x_0$ 上, 而点 B 在 x 轴上. 因此由 (4) 式可计算点 A, B, C 的坐标: $A\Big(x_0, \Big(\dfrac{a_2}{b}\ln\dfrac{k}{a_1 + x_0^2}\Big)^{1/2}\Big)$, $B\Big(\Big(\dfrac{K - a_1}{b}\Big)^{1/2}, 0\Big)$, $C\Big(x_0, -\Big(\dfrac{a_2}{b}\ln\dfrac{K}{a_1 + bx_0^2}\Big)^{1/2}\Big)$, 曲线 CDA 段为线性系统 (5), (6) 的轨线 (9) 式并在 $x \leqslant x_0$ 的区域部分, 其中点 D 在 x 轴上. 由 (9) 式和点 C(或点 A) 的坐标, 可决定 $K_1 = \dfrac{a_2}{b}(a_1 + bx_0^2)\ln\dfrac{K}{a_1}$. 因此, 再由 (9) 式, 点 D 的坐标为 $D\Big(0, -\dfrac{1}{b}\Big(a_1 + bx_0^2\Big)\ln\dfrac{K}{a_1}\Big)$.

由上面选定的封闭曲线 $ABCDA$ 就构成了一条自治系统 (10), (11) 为分段表示的连续的光滑闭轨线. 由微分系统定性理论可知, 它就是满足自治系统 (10), (11) 的有头鸭轨迹, 在所决定的鸭轨迹中, 线段 CDA (此时 $x \leqslant x_0$) 为 “鸭头” 部分, 线段 ABC (此时 $x \geqslant x_0$) 为 “鸭身” 部分, 本鸭轨迹是属于退化 “鸭腹” 型的闭轨线.

4 举 例

首先构造广义鸭轨迹自治系统 (10), (11) 的一条简单而特殊的有头鸭轨迹. 为了方便起见, 取系统 (10), (11) 和扰动函数的参数为: $a_1 = a_2 = b = 1$, $x_0 = 0$. 即广义鸭轨迹自治系统 (1), (2) 的形式为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}i} - y = f(x, y), \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}i} + x = 0, \tag{14}$$

其中

$$f(x, y) = \begin{cases} bx^2y, & x \geqslant 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

现构造鸭轨迹系统 (13), (14) 的有头鸭轨迹的步骤如下.

(i) 取轨线 (4) 的参数 $K = 3$, 则在相平面上的点 A 的坐标为 $\big(0, \sqrt{\ln 2}\big)$.

(ii) 通过 $A\big(0, \sqrt{\ln 2}\big)$ 选取 (4) 式在 $x \geqslant 0$ 的轨线段 ABC:

$$(1 + x^2)\exp y^2 = 3, \quad x \geqslant 0,$$

其中点 B 和点 C 的坐标分别为 $B(\sqrt{2}, 0)$, $C\big(0, -\sqrt{\ln 2}\big)$.

(iii) 由 (9) 式, 通过 $C(0, -(\ln 2)^{1/2})$ 可决定 $K_1 = \ln 2$. 并选取 (9) 式在 $x \leqslant 0$ 的轨线段 CDA:

$$x^2 + y^2 = \ln 2, \quad x \leqslant 0,$$

其中 D 的坐标为 $D\big(-\sqrt{\ln 2}, 0\big)$.

(vi) 于是有头鸭轨迹闭轨线为 $ABCDA$.

这时鸭轨迹系统 (13), (14) 具有有头鸭轨迹闭轨线的曲线 $ABCDA$ 如图 4 所示.

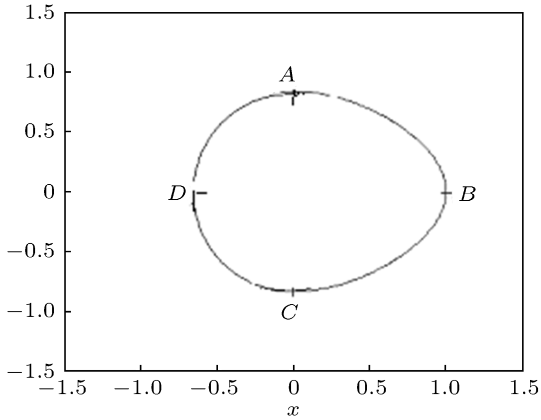

图 4 有头鸭轨迹: $ABCDA\,(a_1 = a_2 = b = 1, K = 3, x_0 = 0)$

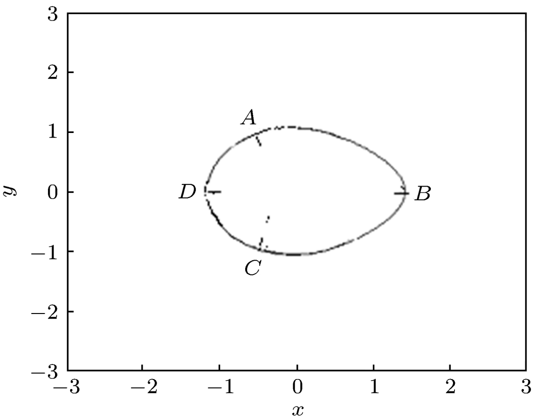

图 5 有头鸭轨迹: $ABCDA\,(a_1 = a_2 = b = 1, K = 3, x_0 = -1/2)$

其次, 取系统 (10),(11) 和扰动函数的参数为: $a_1 = a_2 = b = 1$, $x_0 = -1/2$. 取轨线 (4) 的参数 $K = 3$, 则在相平面上的点 A 的坐标为 $(-1/2, \sqrt{\ln 12/5})$. 通过 $A(-1/2, \sqrt{\ln 12/5})$ 选取 (4) 式在 $x \geqslant -1$ 的轨线段 ABC:

$$(1 + x^2)\exp y^2 = 3, \quad x \geqslant -1,$$

其中点 B 和点 C 的坐标分别为 $B(\sqrt{2}, 0)$, $C(-1/2, -\sqrt{\ln 12/5})$. 由 (9) 式, 通过 $C(-1/2, -\sqrt{\ln 12/5})$ 可决定 $K_1 = 1/4 + 4\ln 12/5$. 并选取 (9) 式在 $x \leqslant -1$ 的轨线段 CDA:

$$x^2 + 4y^2 = \frac{1}{4} + 4\ln\frac{12}{5}, \quad x \leqslant -1,$$

其中 D 的坐标为 $D(-1/2(1+16\ln 12/5)^{1/2},0)$. 于是有头鸭轨迹闭轨线为 $DABCD$. 这时有头鸭轨迹闭轨线的曲线如图 5 所示.

5 结 论

用一个分段表示的连续函数来取代 Lenard 方程中的非线性函数, 可得到鸭轨迹. 简单的鸭轨迹可用轨线的精确解析式的数学描述. 此外鸭轨迹还可进行更深入的研究, 例如无头鸭轨迹、有头鸭线、弛张振荡轨线等.

对于非线性鸭轨迹理论还可以用微分系统的定性理论, 将精确解和渐近解相结合的方法应用于理论物理、电路、生化等方面相应的研究.

[1] Callot J L, Diener F, Diener M 1978 *C. R. Acaf. Sci. Paris* (*Ser* 1) **286** 1059

[2] Benoit E, Callot J L, Diener F, Diener M 1981 *Collect. Math.* **31** 37

[3] Li C P 1999 *Science in China Ser* A **29** 1084

[4] Xie F, Han M A, Zhang W J 2006 *Asymptotic Anal.* **47** 95

[5] Xu Y, Zhang J．X, Xu X, Zhou H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4029 (in Chinese) [徐云, 张建峡, 徐霞, 周红 2008 物理学报 **57** 4029]

[6] E, S I, Mimura M, Nagayama M 2006 *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **14** 31

[7] Xu Y, Zhang J X, Zu X, Zhou H 2007 *Chin. Phys.* **16** 2285

[8] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204

[9] Mo J Q 2009 *Chin Phys. Lett.* **26** 060202

[10] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]

[11] Mo J Q 2009 *Science in China Ser* G **39** 568

[12] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6692 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2009 物理学报 **58** 6692]

[13] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6701 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2010 物理学报 **59** 6701]

[14] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440

[15] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010203

[16] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030202

[17] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020202 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 020202]

[18] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030203 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 020203]

[19] Xie F, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010208

Constructing path curve for a class of generalized phase tracks of canard system*

Ouyang Cheng[1)] Yao Jing Sun[2)] Wen Zhao-Hui[3)] Mo Jia-Qi[1)2)†]

1) (*Faculty of Science, Huzhou Teacher College, Huzhou* 313000*, China*)

2) (*Department of Mathemtics, Anhui Normal University, Wuhu* 241003*, China*)

3) (*School of Statistics and Applied Mathematics, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu* 233030*, China*)

(Received 3 May 2011; revised manuscript received 9 June 2011)

Abstract

A class of generalized phase tracks of canard system is obtained. Firstly, the solutions to the generalized Lienard system are considered. Then the canard-with-head solutions are constructed, and illustrated by the examples to construct the canard. Using the same method, we may also construct more extensive canards.

Keywords: phase tracks of canard, path curve, autonomous system

PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11071205, 11101349), the "Strategic Priority Research Program—Climate Change: Carbon Budget and Relevant Issues" of the Chinese Academy of Sciences, China (Grant No. XDA01020304), the Natural Science Foundation of Zheijiang Province, China (Grant No. Y6110502), the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant Nos. KJ2011A135, KJ2011Z003), and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2011042).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn