

海 - 气耦合动力系统的改进变分迭代解法*

曹小群[†] 宋君强 张卫民 赵军 朱小谦

(国防科学技术大学计算机学院, 长沙 410073)

(2011年5月24日收到; 2011年6月16日收到修改稿)

研究了一个描述厄尔尼诺和南方涛动振荡物理机理的海 - 气耦合动力系统. 利用改进变分迭代方法 (MVIM) 简捷地得到了该非线性模型近似解的展开式. 通过与特殊情形下模型精确解的比较, 说明获得的 MVIM 近似解具有非常好的准确度.

关键词: 非线性, 改进变分迭代方法, 海 - 气耦合, 动力系统

PACS: 02.30.Mv, 05.45.Pq, 04.20.Fy

1 引言

近二十多年来, 厄尔尼诺和南方涛动 (简称 ENSO) 所导致的气候和生态等方面的异常变化深刻影响了全球经济发展和人类生活, 甚至带来许多灾害, 因此国际学术界非常关注对 ENSO 规律和预防的研究. ENSO 发生的本质原因是热带大气和海洋运动的非线性相互作用, 国内外的众多科学家已经使用不同方法对 ENSO 的局部和整体性态进行多方位的研究^[1-10]. 相对于复杂的全球海 - 气耦合模式, 通过简化海气两种介质中物理过程所得到的振子概念模型能更容易地刻画运动本质和物理机理, 从而更成功地模拟 ENSO 的某些重要物理现象. 因此许多学者利用振子形式的动力系统模型研究 ENSO. Wang^[6] 通过严格的数学推导和物理简化建立了一个描述 ENSO 事件的随机动力学模式; 封国林等进一步证明该模式含有唯一极限环解, 且表征的是一个内在耦合系统的年际振荡子^[1,3]; 莫嘉琪等分别利用何吉欢提出的变分迭代算法 (VIM)^[11-13]、广义变分迭代方法 (GVIM)^[14] 和同伦摄动方法 (HPM)^[15,16] 求得多个 ENSO 振子模型的近似解析解^[17-19]. 研究结果表明这些方法都具有较高的准确度, 相对于一般数值方法的优点是: 利用获得的近似解可直接分析大气和海洋中的

异常距平量. 莫嘉琪等还利用非线性摄动方法求解了一个时滞海 - 气振子模型, 获得的渐近解具有非常好的准确性^[20].

最近何吉欢对变分迭代法做了改进, 研究表明改进变分迭代方法 (MVIM) 能够更有效地、精确地和快速地求解非线性物理问题, 而且大幅度地减小了计算存储代价和计算复杂性^[21]. 本文利用 MVIM 方法研究一个典型的 ENSO 海 - 气耦合动力系统模型^[22], 简捷而高效地得到了耦合非线性动力系统的近似解析解.

2 ENSO 振子模型

考虑如下形式的 ENSO 海 - 气耦合振子模型^[22]

$$\frac{dT}{dt} = CT + Dh - \varepsilon T^3, \quad (1)$$

$$\frac{dh}{dt} = -ET - R_h h, \quad (2)$$

(1) 和 (2) 式中的 T 表示赤道东太平洋的海表温度 (SST) 距平, h 表示海洋中的温跃层厚度距平; 上面的模型有效地描述了海表温度距平和温跃层厚度距平的相互作用; C, D, E, R_h 和 ε 表示正的模式参数, 有关它们的详细定义和物理意义见文献 [1-3], 同时假设模型的初值 $T(0)$ 和 $h(0)$ 是给定的.

* 国家自然科学基金 (批准号: 41105063, 61070041) 资助的课题.

[†] E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn

莫嘉琪等采用何吉欢提出的 VIM 方法获得了 (1) 和 (2) 式的一阶近似解并分析了其正确性 [22]. 本文将使用 MVIM 方法来研究 (1) 和 (2) 式所描述的 ENSO 海 - 气耦合动力系统.

3 改进变分迭代方法和模型的近似解

对于 (1) 和 (2) 式, 首先利用何吉欢提出的 VIM 方法 [11-13], 可构造以下形式的校正泛函:

$$T_{n+1}(t) = T_n(t) + \int_0^t \left\{ \lambda_1 \left[\frac{dT_n(s)}{ds} - CT_n(s) - D\bar{h}_n(s) + \varepsilon [\bar{T}_n(s)]^3 \right] \right\} ds, \quad (3)$$

$$h_{n+1}(t) = h_n(t) + \int_0^t \left\{ \lambda_2 \left[\frac{dh_n(s)}{ds} + R_h h_n(s) + E\bar{T}_n(s) \right] \right\} ds, \quad (4)$$

其中 λ_1 和 λ_2 为广义 Lagrange 乘子, 其解可通过变分原理最佳确定; $T_0(t)$ 和 $h_0(t)$ 是经过适当选择的迭代初始近似解, $\bar{T}_n(t)$ 和 $\bar{h}_n(t)$ 为限制变分, 即有 $\delta\bar{T}_n(t) = 0$ 和 $\delta\bar{h}_n(t) = 0$. 为了得到 λ_1 和 λ_2 的最优解, 对方程 (3) 式和 (4) 式两边求变分, 可得:

$$\delta T_{n+1}(t) = \delta T_n(t) + \delta \int_0^t \lambda_1 \times \left\{ \left[\frac{dT_n(s)}{ds} - CT_n(s) \right] \right\} ds, \quad (5)$$

$$\delta h_{n+1}(t) = \delta h_n(t) + \delta \int_0^t \lambda_2 \left[\frac{dh_n(s)}{ds} + R_h h_n(s) \right] ds. \quad (6)$$

通过分步积分有:

$$\begin{aligned} \delta T_{n+1}(t) &= \delta T_n(t) + (\lambda_1 \delta T_n(s)) \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &\quad - \int_0^t \left(\frac{d\lambda_1}{ds} + C\lambda_1 \right) \delta T_n(s) ds \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta h_{n+1}(t) &= \delta h_n(t) + (\lambda_2 \delta h_n(s)) \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &\quad - \int_0^t \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - R_h \lambda_2 \right) \delta h_n(s) ds \\ &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

在 (7) 式和 (8) 式中, 由于 $\delta T_n(0) = \delta h_n(0) = 0$, 同时一阶变分 δT_n 和 δh_n 的值是任意的, 因此有:

$$\frac{d\lambda_1}{ds} + C\lambda_1 = 0, \lambda_1(t) = -1,$$

$$\frac{d\lambda_2}{ds} - R_h \lambda_2 = 0, \lambda_2(t) = -1,$$

从而可以确定两个广义 Lagrange 乘子 λ_1 和 λ_2 分

别为

$$\lambda_1(s) = -e^{-C(s-t)},$$

$$\lambda_2(s) = -e^{[R_h(s-t)]}.$$

将 λ_1 和 λ_2 的解析表达式代入 (3) 式和 (4) 式中, 则可以构造出求解 $T(t)$ 和 $h(t)$ 的 VIM 公式:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(t) &= T_n(t) - \int_0^t e^{-C(s-t)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{dT_n(s)}{ds} - CT_n(s) - Dh_n(s) + \varepsilon [T_n(s)]^3 \right\} ds, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h_{n+1}(t) &= h_n(t) - \int_0^t e^{[R_h(s-t)]} \\ &\quad \times \left\{ \frac{dh_n(s)}{ds} + R_h h_n(s) + ET_n(s) \right\} ds. \end{aligned} \quad (10)$$

莫嘉琪等也得到了类似的公式 [22], 但在利用 (9) 式和 (10) 式进行迭代计算的过程中, 由于需要对多项进行积分, 计算非常复杂. 为了减小计算量和改进 VIM 方法, 引入两个临时函数 $u(t)$ 和 $v(t)$, 并定义如下:

$$u(t) = - \int_0^t e^{-C(s-t)} \left\{ -Dh(s) + \varepsilon [T(s)]^3 \right\} ds, \quad (11)$$

$$v(t) = - \int_0^t e^{[R_h(s-t)]} [ET(s)] ds. \quad (12)$$

对方程 (11) 和 (12) 两边分别关于 t 求导数得到:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= - \left\{ e^{-C(s-t)} [-Dh(s) + \varepsilon T^3(s)]_{s=t} \right. \\ &\quad \left. - C \int_0^t e^{-C(s-t)} [-Dh(s) + \varepsilon T^3(s)] ds \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \left\{ e^{[R_h(s-t)]} [ET(s)] \Big|_{s=t} \right. \\ &\quad \left. - R_h \int_0^t e^{[R_h(s-t)]} [ET(s)] ds \right\}. \end{aligned}$$

将 (11) 和 (12) 两式代入 (9) 和 (10) 两个方程, 并经过简单计算, 进一步可以得到以下的 (13) 和 (14) 式:

$$\frac{du}{dt} = Cu + Dh(t) - \varepsilon T^3(t), \quad (13)$$

$$\frac{dv}{dt} = ET(t) + R_h v. \quad (14)$$

通过对比易知, (13) 和 (14) 式与 (1) 和 (2) 式等价, 从而可以得出结论: $u(t)$ 和 $v(t)$ 是 ENSO 海 - 气振

子模型 (1) 和 (2) 式的一个特解. 因此可以构造一对更简单的改进的变分迭代公式:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(t) &= T_0(t) + u_n(t), \\ h_{n+1}(t) &= h_0(t) + v_n(t). \end{aligned} \quad (15)$$

将 (11) 和 (12) 式代入 (15) 式, 则得到 ENSO 海 - 气耦合模型 (1) 和 (2) 式的改进的 MVIM 公式:

$$T_{n+1}(t) = T_0(t) - \int_0^t e^{-C(s-t)} \times [-Dh_n(s) + \varepsilon T_n^3(s)] ds, \quad (16a)$$

$$h_{n+1}(t) = h_0(t) - \int_0^t e^{[R_h(s-t)]} [ET_n(s)] ds, \quad (16b)$$

式中 $T_0(t)$ 和 $h_0(t)$ 是初始解 (可含待定常数), 若无待定常数, $T_0(t)$ 和 $h_0(t)$ 应满足初始或边界条件; 若含有待定常数, 可以在迭代几次后再由初始或边界条件识别. 显然, 如果能从公式 (16) 中获得两个收敛的函数序列 $\{T_n(t), h_n(t)\}$, 则 ENSO 海 - 气耦合动力系统模型 (1) 和 (2) 式的 MVIM 近似解析解就是 $\{T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t), h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t)\}$. 通过比较 VIM 公式 (9) 和 (10) 式与 MVIM 公式 (16) 式可知, 一方面 MVIM 公式中的积分项数目减少, 另一方面积分过程中不再出现导数项, 因此可以减小编程的复杂性和迭代过程中的计算量.

4 结果分析和讨论

为了给出 MVIM 中 $\{T_n(t), h_n(t)\}$ 的迭代初始解 $\{T_0(t), h_0(t)\}$, 首先考虑 ENSO 海 - 气耦合动力系统模型 (1) 和 (2) 式的线性系统:

$$\begin{aligned} \frac{dT_0}{dt} &= CT_0 + Dh_0, \\ \frac{dh_0}{dt} &= -ET_0 - R_h h_0. \end{aligned} \quad (17)$$

由莫嘉琪等 [2] 的研究易知, 当 $D = 0$ 时, (17) 式具有如下解析解:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= C_2 \exp(Ct), \\ h_0(t) &= C_1 \exp(-R_h t) - \frac{C_2 E}{C + R_h} \exp(Ct); \end{aligned} \quad (18)$$

而当 $D \neq 0$ 时, (17) 式具有如下解析解:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= C_1 D \exp(r_1 t) + C_2 D \exp(r_2 t), \\ h_0(t) &= C_1 (r_1 - C) \exp(-r_1 t) \\ &\quad + C_2 (r_2 - C) \exp(-r_2 t). \end{aligned} \quad (19)$$

在 (18) 和 (19) 式中 C_1 和 C_2 是任意常数; 而 r_1

和 r_2 是 (17) 式的特征根, 由下面的公式给出:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2} \left[(C - R_h) - \sqrt{(C + R_h)^2 - 4DE} \right], \\ r_2 &= \frac{1}{2} \left[(C - R_h) + \sqrt{(C + R_h)^2 - 4DE} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

显然, 当 $CR_h > DE$ 时, 有 $r_1 < 0 < r_2$. 将初始估计解 (18) 和 (19) 式分别代入到 MVIM 方法的迭代公式 (16) 式中, 可以得到 ENSO 海 - 气耦合模型 (1) 和 (2) 式的一阶近似解. 当 $D = 0$ 时, (1) 和 (2) 式的一阶近似解为

$$T_1(t) = \left(C_2 + \frac{\varepsilon C_2^3}{2C} \right) \exp(Ct) - \frac{\varepsilon C_2^3 \exp(3Ct)}{2C}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{R_h C_1 + CC_1 + C_2 E}{(R_h + C)} \exp(-R_h t) \\ &\quad - \frac{2C_2 E}{C + R_h} \exp(Ct); \end{aligned} \quad (22)$$

而当 $D \neq 0$ 时, (1) 和 (2) 式的一阶近似解为

$$\begin{aligned} T_1(t) &= C_1 D \exp(r_1 t) + C_2 D \exp(r_2 t) \\ &\quad - \frac{DC_1(r_1 - C)[\exp(-r_1 t) - \exp(Ct)]}{C + r_1} \\ &\quad - \frac{DC_2(r_2 - C)[\exp(-r_2 t) - \exp(Ct)]}{C + r_2} \\ &\quad + \frac{\varepsilon D^3 C_1^3 [\exp(3r_1 t) - \exp(Ct)]}{C - 3r_1} \\ &\quad + \frac{3\varepsilon D^3 C_1^2 C_2 [\exp(2r_1 t + r_2 t) - \exp(Ct)]}{C - 2r_1 - r_2} \\ &\quad + \frac{3\varepsilon D^3 C_1 C_2^2 [\exp(r_1 t + 2r_2 t) - \exp(Ct)]}{C - r_1 - 2r_2} \\ &\quad + \frac{\varepsilon D^3 C_2^3 [\exp(3r_2 t) - \exp(Ct)]}{C - 3r_2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} h_1(t) &= C_1 (r_1 - C) \exp(-r_1 t) \\ &\quad + C_2 (r_2 - C) \exp(-r_2 t) + \frac{C_1 E D}{(R_h + r_1)} \\ &\quad \times [\exp(-R_h t) - \exp(r_1 t)] + \frac{C_2 E D}{(R_h + r_2)} \\ &\quad \times [\exp(-R_h t) - \exp(r_2 t)]. \end{aligned} \quad (24)$$

利用 MVIM 方法的迭代公式 (16) 继续进行迭代, 可得海 - 气耦合动力系统 (1) 和 (2) 式的更高阶 MVIM 近似解.

为了验证上述改进变分迭代方法获得近似解析解的精度, 考虑一种特殊的情形, 令 (1) 式中 $D = 0$, 则可以得到 (25) 式表示的非线性方程 [22]:

$$\frac{dT}{dt} = CT - \varepsilon T^3, \quad (25)$$

当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时, 非线性方程 (25) 具有关于 SST 的

精确解 [24]:

$$T(t) = \left[\frac{\varepsilon}{C} + \left(\frac{1}{(T(0))^2} - \frac{\varepsilon}{C} \right) \exp(-2Ct) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

(26) 式中的 $T(0)$ 表示非线性方程 (25) 式中 SST 的初始值. 显然 (21) 式是非线性方程 (25) 式的一阶 MVIM 近似解, 将 $T|_{t=0} = T(0)$ 代入, 容易确定 $C_2 = T(0)$. 从而得到改进变分迭代方法获得的非线性方程 (25) 式的一阶近似解为

$$T_1(t) = \left(T(0) + \frac{\varepsilon(T(0))^3}{2C} \right) \exp(Ct) - \frac{\varepsilon(T(0))^3 \exp(3Ct)}{2C}. \quad (27)$$

如果将 (21) 式中的 $T_1(t)$ 代入 (16a) 中, 并令 $D = 0$, 积分运算后可得到 (25) 式的二阶 MVIM 近似解:

$$T_2(t) = \left[C_2 + \frac{\varepsilon C_2^3}{64C^4} (32C^3 + 24C^2\varepsilon C_2^2 + 8C\varepsilon^2 C_2^4 + \varepsilon^3 C_2^6) \right] \times \exp(Ct) - \frac{\varepsilon C_2^3}{16C^4} (8C^3 + 12C^2\varepsilon C_2^2 + \varepsilon^3 C_2^6 + 6C\varepsilon^2 C_2^4) \exp(3Ct) + \frac{\varepsilon^2 C_2^5}{32C^4} \times (12C\varepsilon C_2^2 + 12C^2 3\varepsilon^2 C_2^4) \times \exp(5Ct) - \frac{\varepsilon^3 C_2^7}{16C^4} (\varepsilon C_2^2 + 2C) \exp(7Ct) + \frac{\varepsilon^4 C_2^9}{64C^4} \exp(9Ct), \quad (28)$$

由初始条件 $T|_{t=0} = T(0)$, 可以确定 (28) 式中的待定参数: $C_2 = T(0)$. (27) 式与莫嘉琪等得到的结果 (文献 [22] 中 (20) 式和 (25) 式) 完全一致, 从而说明了 MVIM 方法的有效性和正确性. 图 1 中显示了当 $C = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$ 和 $T(0) = 0.5$ 时, 非线性

方程 (25) 的精确解、MVIM 一阶和二阶近似解随时间演化的情况. 在图中精确解、MVIM 一阶和二阶近似解分别用黑实线、点虚线和虚线表示. 从图中可知, 当 $t < 4$ 时, 三者完全是重叠的, 具有较好的一致性; 而当 $4 < t < 5$ 时, MVIM 一阶近似解与精确解之间有一定的偏差, 但 MVIM 二阶近似解仍然与精确解具有较好的一致性. 上面的分析结果表明: 高阶 MVIM 近似解优于低阶的近似解, 随着阶数的增加, MVIM 近似解将收敛于精确解.

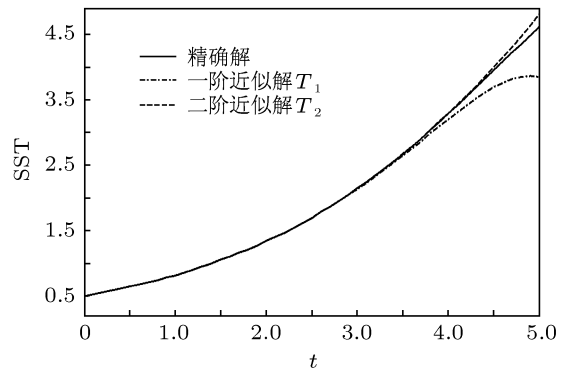


图 1 非线性方程 (25) 的精确解、MVIM 一阶和二阶近似解随时间的演化

表 1 给出了 (26)—(28) 式所表示的精确解、MVIM 一阶和二阶近似解在不同时刻的具体数值. 从表中可以看出, MVIM 二阶近似解在各个时刻的数值要明显优于一阶近似解的数值, 与精确解的值非常接近; 在所研究的时间区域 $0 < t < 5$ 内, MVIM 二阶近似解相对精确解的误差小于 4.1%. 从而进一步说明了改进变分迭代方法求解非线性海 - 气耦合动力系统模型的有效性和正确性.

表 1 在不同时刻精确解、MVIM 一阶和二阶近似解的数值比较

t	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	4.5	5.0
精确解值	0.64097	0.82084	1.33794	2.14102	3.28096	3.94626	4.62166
一阶近似值	0.64097	0.82082	1.33743	2.13393	3.19948	3.68815	3.84642
二阶近似值	0.64097	0.82084	1.33795	2.14134	3.29039	3.99119	4.81057

5 结论

利用何吉欢提出的 MVIM 成功求得了一个典型海 - 气耦合动力系统的近似解析解. 首先引入一组校正泛函, 通过变分方法最优确定 Lagrange 乘子; 其次在变分迭代方法的基础上得到所求问题解的 MVIM 公式; 最后求得了海 - 气耦合动力系统

的 MVIM 近似解析解, 并在特定情形下通过与精确解的对比, 验证了 MVIM 近似解的正确性. 与 VIM 方法相比, MVIM 能够有效减小计算量和存储代价, 加快收敛速度. 另外, 因为 MVIM 是一种近似解析方法, 所以利用本文获得的近似解表示式能够进一步研究在赤道东太平洋的海表温度异常和温跃层厚度异常的定性和定量方面的形态.

- [1] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 贾晓静, 曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
- [2] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林, 戴新刚, 王爱慧, 丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]
- [3] Feng G L, Dong W J 2005 *Acta Meteo. Sin.* **63** 864 (in Chinese) [封国林, 董文杰 2005 气象学报 **63** 864]
- [4] Liu S K, Fu Z T, Liu S D 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适, 傅遵涛, 刘式达 2002 物理学报 **51** 10]
- [5] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1221 (in Chinese) [张家树, 肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221]
- [6] Wang B 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5
- [7] Hong L, Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪灵, 徐健学 2001 物理学报 **50** 612]
- [8] Chen S H, Liu J, Xie J, Lu J A 2002 *Chin. Phys.* **11** 233
- [9] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [10] Lü J H, Zhou T S, Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12
- [11] He J H 1999 *Int. J. Nonl. Mech.* **34** 699
- [12] He J H 1998 *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **167** 57
- [13] He J H 1997 *Commun. Nonl. Sci. Numer. Simulat.* **2** 235
- [14] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou : Henan Science and Technology Publisher) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]
- [15] He J H 1999 *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **178** 257
- [16] He J H 2000 *Int. J. Nonl. Mech.* **35** 37
- [17] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛 2004 物理学报 **53** 3245]
- [18] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]
- [19] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6 (in Chinese) [莫嘉琪, 王辉, 林万涛 2006 物理学报 **55** 6]
- [20] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3229 (in Chinese) [莫嘉琪, 王辉, 林万涛 2006 物理学报 **55** 3229]
- [21] He J H 2007 *Comput. Math. Appl.* **54** 881
- [22] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2006 *Adv. Math.* **35** 232

The modified variational iteration method for air-sea coupled dynamical system*

Cao Xiao-Qun[†] Song Jun-Qiang Zhang Wei-Min Zhao Jun Zhu Xiao-Qian

(School of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 24 May 2011; revised manuscript received 16 June 2011)

Abstract

A air-sea coupled dynamical system describing the oscillating physical mechanism of ENSO is studied. Using the modified variational iteration method (MVIM), the approximate expansions of the solution for corresponding problem are obtained effectively. And the numerical results show that the approximate solutions from the MVIM method are highly accurate by comparison with the exact solution of the model in a special case.

Keywords: nonlinear, modified variational iteration method, air-sea coupling, dynamical system

PACS: 02.30.Mv, 05.45.Pq, 04.20.Fy

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41105063, 61070041).

[†] E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn