

## 三能级原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性\*

卢道明†

(武夷学院电子工程系, 武夷山 354300)

(2011年4月19日收到; 2011年5月27日收到修改稿)

采用 Negativity 熵来度量两个子系统间的纠缠, 利用数值计算方法研究了简并  $\Lambda$  型三能级原子和简并  $V$  型三能级原子与耦合腔共振相互作用系统中原子之间、腔场之间和原子与腔场间的纠缠特性. 给出了系统初始激发数为 1 时系统态矢的演化公式; 讨论了腔场间的耦合系数变化对纠缠特性的影响. 研究表明: 随腔场间的耦合系数增大, 原子间的纠缠增强, 腔场间的纠缠减弱.

**关键词:** 量子光学, 三能级原子, 耦合腔, 量子纠缠

**PACS:** 03.65.Ud, 42.50.Dv

## 1 引言

量子纠缠是量子力学最显著的特征之一, 它不仅可以用来验证量子力学的非局域性和 Bell 不等式, 而且是量子信息领域的重要资源, 它在量子信息处理的量子态隐形传输、量子编码和量子纠错等量子信息过程中有重要应用. 因此, 纠缠态的制备和度量已成为量子纠缠研究和应用的关键问题, 引起了人们的广泛关注. 另一方面, 腔 QED 和囚禁离子技术是实现多比特纠缠态、量子信息处理和量子计算等最有前途的技术. 自从 1995 年 Kimble 小组利用腔 QED 实验上第一次演示并测量了与量子逻辑门有关的相移以来<sup>[1]</sup>, 人们已提出了许多利用腔 QED 进行量子态制备和传送的方案<sup>[2-6]</sup>. 但在以往利用原子与腔场相互作用系统中, 大多集中在原子与非耦合腔相互作用的情况. 最近十多年来, 原子与耦合腔相互作用系统引起了人们极大的关注. 例如, Nohama 和 Roversi<sup>[7]</sup> 提出利用耦合腔实现量子态转换的方案. Ogden 等<sup>[8]</sup> 研究了耦合腔系统中的动力学特性. Yang 等<sup>[9]</sup> 提出了利用原子与耦合腔相互作用系统实现量子相位门的方案. 然而, 在以往研究中大多集中在二能级原子与耦合腔相

互作用的情况. 本文把耦合腔与原子相互作用推广到三能级原子与耦合腔相互作用的情况, 研究了简并  $\Lambda$  型三能级原子和简并  $V$  型三能级原子与耦合腔共振相互作用系统中原子之间、腔场之间和原子与腔场间的纠缠, 讨论了腔场间的耦合强度变化对纠缠的影响.

## 2 系统态矢演化

如图 1 所示, 将简并  $\Lambda$  型三能级原子 1 和简并  $V$  型三能级原子 2 分别注入初始处于真空态的单模耦合腔 A 和 B 中, 并且原子与腔场发生共振相互作用. 图中  $|e_1\rangle$  和  $|e_2\rangle$  是  $V$  型三能级原子的两个简并激发态,  $|g\rangle$  为其基态.  $|g_1\rangle$  和  $|g_2\rangle$  是  $\Lambda$  型三能级原子的两个简并基态,  $|e\rangle$  为其激发态. 考虑原子 1 跃迁  $|e\rangle \rightarrow |g_1\rangle$ ,  $|e\rangle \rightarrow |g_2\rangle$  与单模腔 A 共振相互作用, 而原子 2 跃迁  $|e_1\rangle \rightarrow |g\rangle$  和  $|e_2\rangle \rightarrow |g\rangle$  与单模腔 B 共振相互作用, 且  $\omega_A = \omega_B$  的情况. 在旋波近似下, 在相互作用绘景中原子和腔场体系的 Hamilton 算符为

$$H_I = f_1 a_A (|e\rangle\langle g_1| + |e\rangle\langle g_2|)$$

\* 福建省自然科学基金(批准号: 2008J0217)资助的课题.

† E-mail: daominglu79@hotmail.com

$$\begin{aligned}
 &+f_2a_B(|e_1\rangle|g\rangle + |e_2\rangle|g\rangle) \\
 &+Ja_Aa_B^\dagger + H.C, \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中  $H.C$  表示 Hermite 共厄项,  $a_A^\dagger, a_A(a_B^\dagger, a_B)$  分别为腔场的产生和湮没算符,  $|e\rangle\langle g_i|$  和  $|e_i\rangle\langle g|$  ( $i = 1, 2$ ) 为原子的跃迁算符,  $f_1, f_2$  分别表示两个腔中原子与腔场的耦合系数,  $J$  为两个腔之间的耦合系数. 定义激发数算符  $\hat{N} = |e\rangle\langle e| + |e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| + a_A^\dagger a_A + a_B^\dagger a_B$ , 因  $[\hat{N}, H_I] = 0$ , 所以在系统演化过程中激发数守恒. 假设初始时刻, 原子 1 处于激发态, 原子 2 处于基态, 腔场 A 和 B 均处于真空态, 则系统的初态为

$$|\varphi(0)\rangle = |eg\rangle|00\rangle, \quad (2)$$

式中  $|eg\rangle$  第 1 位表示原子 1 的状态, 第 2 位表示原子 2 的状态,  $|nm\rangle$  表示腔 A 处于  $n$  个光子态, 腔 B 处于  $m$  个光子态. 当系统初始处于 (2) 式表示的态时, 在演化过程中系统将保留在下列基矢构成的子空间中:

$$\begin{aligned}
 |\varphi_1\rangle &= |eg\rangle|00\rangle, \\
 |\varphi_2\rangle &= |g_1g\rangle|10\rangle, \\
 |\varphi_3\rangle &= |g_1g\rangle|01\rangle, \\
 |\varphi_4\rangle &= |g_1e_1\rangle|00\rangle, \\
 |\varphi_5\rangle &= |g_1e_2\rangle|00\rangle, \\
 |\varphi_6\rangle &= |g_2g\rangle|10\rangle, \\
 |\varphi_7\rangle &= |g_2g\rangle|01\rangle, \\
 |\varphi_8\rangle &= |g_2e_1\rangle|00\rangle, \\
 |\varphi_9\rangle &= |g_2e_2\rangle|00\rangle. \quad (3)
 \end{aligned}$$

那么任意时刻  $t$  系统的态矢可表示为

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t)\rangle &= d_1|\varphi_1\rangle + d_2|\varphi_2\rangle + d_3|\varphi_3\rangle + d_4|\varphi_4\rangle \\
 &+ d_5|\varphi_5\rangle + d_6|\varphi_6\rangle + d_7|\varphi_7\rangle \\
 &+ d_8|\varphi_8\rangle + d_9|\varphi_9\rangle. \quad (4)
 \end{aligned}$$

在相互作用绘景中, 系统的态矢演化满足 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle, \quad (5)$$

取  $\hbar = 1$ . 利用初始条件:  $d_1 = 1, d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = d_9 = 0$ . 解方程 (5) 可得出

$$d_1 = A \cos(\alpha t) + B \cos(\beta t),$$

$$\begin{aligned}
 d_2 &= d_6 = -\frac{i}{2f_1} (A\alpha \sin(\alpha t) \\
 &+ B\beta \sin(\beta t)), \\
 d_3 &= d_7 = \frac{1}{2f_1 J} [(\alpha^2 - 2f_1^2)A \cos(\alpha t) \\
 &+ (\beta^2 - 2f_1^2)B \cos(\beta t)], \\
 d_4 &= -\frac{if_2}{2Jf_1} \left[ \frac{\alpha^2 - 2f_1^2}{\alpha} A \sin(\alpha t) \right. \\
 &+ \left. \frac{\beta^2 - 2f_1^2}{\beta} B \sin(\beta t) \right], \\
 d_5 &= d_8 = d_9 = d_4, \quad (6)
 \end{aligned}$$

式中  $\alpha = 1/\sqrt{2}(H - \sqrt{H^2 - 16f_1^2 f_2^2})^{1/2}$ ,  $\beta = 1/\sqrt{2}(H + \sqrt{H^2 - 16f_1^2 f_2^2})^{1/2}$ ,  $H = 2(f_1^2 + f_2^2) + J^2$ ,  $A = (2f_1^2 - \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2)$ ,  $B = -(2f_1^2 - \alpha^2)/\alpha^2 - \beta^2$ .

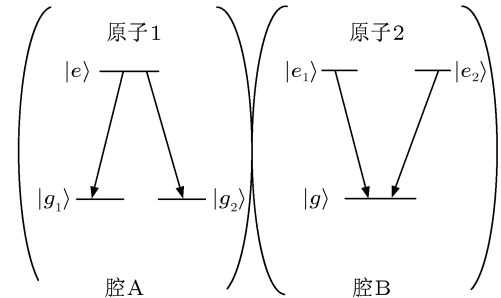


图 1 系统的示意图

### 3 原子间纠缠的演化

为了度量两个子系统间的纠缠度, 我们采用 Negativity 熵来度量<sup>[10]</sup>, 即对于用密度矩阵  $\rho$  表示的两个子系统, 其纠缠可用部分转置矩阵  $\rho^T$  的负本征值来定义

$$N = -2 \sum_i \lambda_i. \quad (7)$$

式中  $\lambda_i$  是部分转置矩阵  $\rho^T$  的负本征值.  $N = 0$  表示两子系统是分离的;  $N = 1$  表示两子系统处于最大纠缠态;  $0 < N < 1$  表示两子系统是纠缠的.

利用 (4) 式, 对腔场求迹, 以  $|ee_1\rangle, |ee_2\rangle, |eg\rangle, |g_1e_1\rangle, |g_1e_2\rangle, |g_1g\rangle, |g_2e_1\rangle, |g_2e_2\rangle, |g_2g\rangle$  为基矢, 可得到原子 1 和原子 2 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_1|^2 & d_1 d_4^* & d_1 d_4^* & 0 & d_1 d_4^* & d_1 d_4^* & 0 \\ 0 & 0 & d_4 d_1^* & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 d_1^* & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_{23}|^2 & 0 & 0 & |d_{23}|^2 \\ 0 & 0 & d_4 d_1^* & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 d_1^* & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_{23}|^2 & 0 & 0 & |d_{23}|^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中  $|d_{23}|^2 = |d_2|^2 + |d_3|^2$ . 对原子 2 的态进行转置, 可得出其部分转置矩阵为

$$\rho_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 d_4^* & 0 & 0 & d_1 d_4^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 d_4^* & 0 & 0 & d_1 d_4^* \\ 0 & 0 & |d_1|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 \\ d_4 d_1^* & d_4 d_1^* & 0 & 0 & 0 & |d_{23}|^2 & 0 & 0 & |d_{23}|^2 \\ 0 & 0 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 & |d_4|^2 & |d_4|^2 & 0 \\ d_4 d_1^* & d_4 d_1^* & 0 & 0 & 0 & |d_{23}|^2 & 0 & 0 & |d_{23}|^2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

为简单起见, 取  $f_1 = f_2 = f$ , 利用 (7) 和 (9) 式, 通过数值计算可得原子间的纠缠度  $N_{12}$  随规范时间  $ft$  的演化. 计算结果如图 2 所示. 从图 2 可见: 随腔场间的耦合系数逐渐增大, 原子间的纠缠演化振荡频率加快, 峰值增大, 曲线重心上移. 在规范时间  $ft[0, 10]$  区间内纠缠度的平均值的数值计算结果为:  $J = 0.5f$  时,  $N_{12}$  平均值为 0.163;  $J = f$  时,  $N_{12}$  平均值为 0.174;  $J = 2f$  时,  $N_{12}$  平均值为 0.240;  $J = 5f$  时,  $N_{12}$  平均值为 0.316. 这表明随腔场间的耦合系数增大, 原子间的纠缠增强.

#### 4 腔场间纠缠的演化

腔场 A 与腔场 B 间的纠缠同样采用 Negativity 熵来描述. 利用 (4) 式, 对原子 1 和原子 2 的态求迹, 以  $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle$  和  $|00\rangle$  为基矢, 可得到腔 A 和

腔 B 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2|d_2|^2 & 2d_2 d_3^* & 0 \\ 0 & 2d_3 d_2^* & 2|d_3|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_1|^2 + 4|d_4|^2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

通过计算可得腔场 A 和腔场 B 间的纠缠度为

$$N_{AB} = \sqrt{(|d_1|^2 + 4|d_4|^2)^2 + 16|d_2 d_3|^2} - (|d_1|^2 + 4|d_4|^2). \quad (11)$$

同样取  $f_1 = f_2 = f$ , 耦合系数  $J$  分别取  $0.5f, f, 2f, 5f$  时, 腔场间的纠缠度  $N_{AB}$  的演化如图 3 所示. 从图 3 可见: 随腔场间的耦合系数逐渐增大, 腔场间的纠缠演化振荡频率加快, 峰值减小, 曲线重心下移. 例如, 规范时间  $ft$  在  $[0, 10]$  区间内,  $J = 0.5f$  时,  $N_{AB}$  平均值为 0.220;  $J = f$  时,  $N_{AB}$  平均值

为 0.150;  $J = 2f$  时,  $N_{AB}$  平均值为 0.068;  $J = 5f$  时,  $N_{AB}$  平均值为 0.007. 这表明随腔场间的耦合系数增大, 腔场间的纠缠减弱.

以上得到了随腔场间的耦合系数增大, 原子间的纠缠增强, 而腔场间的纠缠减弱的结果. 这一结果与二能级原子与耦合腔相互作用的情况一致<sup>[11]</sup>.

这是因为从物理机制上看, 随着腔场间的耦合强度增强, 二能级原子与耦合腔相互作用和三能级原子与耦合腔相互作用两种情况下激发子被两个原子分享的几率都增大, 被两个腔分享的几率都减小, 因此相应原子的纠缠增强, 而腔场间的纠缠减弱.

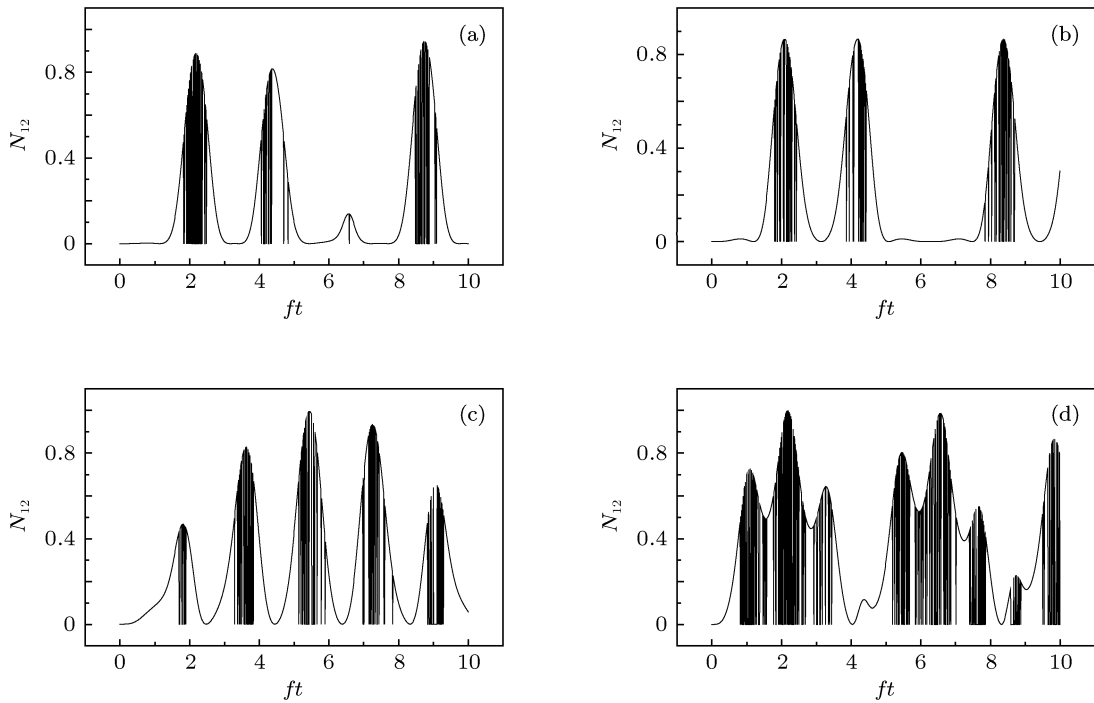


图 2 当  $J$  分别取  $0.5f$ ,  $f$ ,  $2f$  和  $5f$  时纠缠度  $N_{12}$  随规范时间  $ft$  的演化 (a)  $J = 0.5f$ ; (b)  $J = f$ ; (c)  $J = 2f$ ; (d)  $J = 5f$

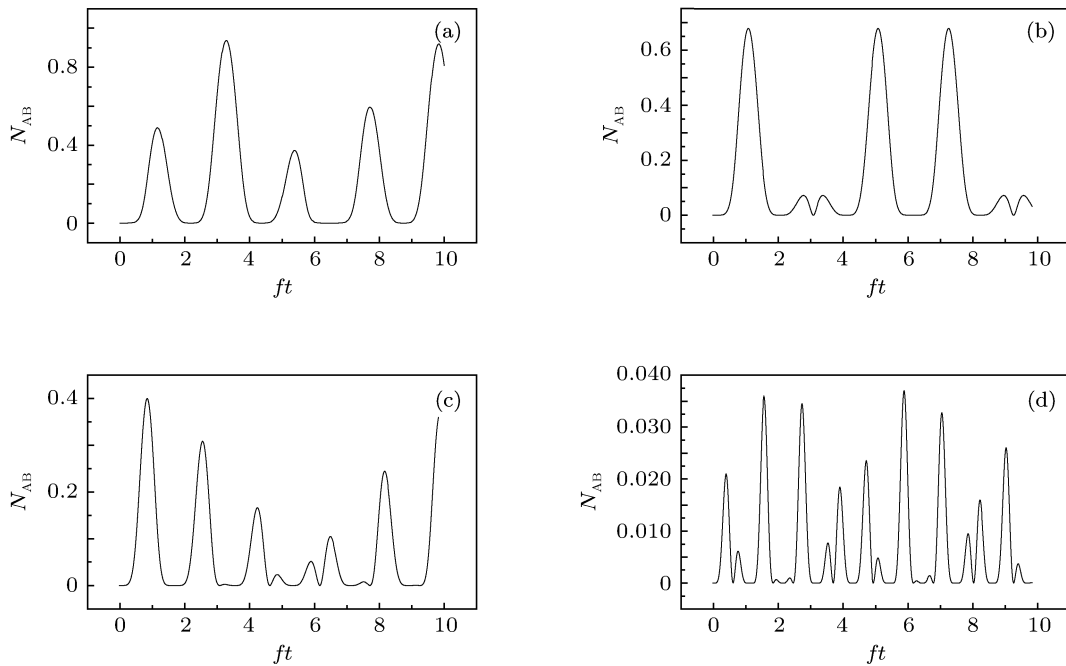


图 3 当  $J$  分别取  $0.5f$ ,  $f$ ,  $2f$  和  $5f$  时纠缠量  $N_{AB}$  随时间的演化 (a)  $J = 0.5f$ ; (b)  $J = f$ ; (c)  $J = 2f$ ; (d)  $J = 5f$

### 5 原子与腔场间纠缠的演化

原子 1 与腔场 A 间的纠缠同样采用 Negativity 熵来描述. 利用 (4) 式, 对原子 2 和腔场 B 的态求迹, 以  $|e\rangle|1\rangle, |e\rangle|0\rangle, |g_1\rangle|1\rangle, |g_1\rangle|0\rangle, |g_2\rangle|1\rangle, |g_2\rangle|0\rangle$  为基矢, 可得到原子 1 和腔 A 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{1A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d_1|^2 & d_1 d_2^* & 0 & d_1 d_2^* & 0 \\ 0 & d_2 d_1^* & |d_2|^2 & 0 & |d_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_{34}|^2 & 0 & |d_{34}|^2 \\ 0 & d_2 d_1^* & |d_2|^2 & 0 & |d_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_{34}|^2 & 0 & |d_{34}|^2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

式中  $|d_{34}|^2 = |d_3|^2 + 2|d_4|^2$ , 对腔场 A 的态进行转

置, 可得其部分转置矩阵为

$$\rho_{1A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_1 d_2^* & 0 & d_1 d_2^* \\ 0 & |d_1|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_2|^2 & 0 & |d_2|^2 & 0 \\ d_2 d_1^* & 0 & 0 & |d_{34}|^2 & 0 & |d_{34}|^2 \\ 0 & 0 & |d_2|^2 & 0 & |d_2|^2 & 0 \\ d_2 d_1^* & 0 & 0 & |d_{34}|^2 & 0 & |d_{34}|^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

利用上式, 同样取  $f_1 = f_2 = f$ , 耦合系数  $J$  分别取  $0.5f, f, 2f, 5f$  时, 原子 1 和腔场 A 间的纠缠量随时间演化如图 4 所示. 从图 4 可见:  $N_{1A}$  随时间演化呈现出崩塌和恢复效应, 崩塌时间随腔场间耦合系数增大而减小. 另一方面, 纠缠度  $N_{1A}$  随腔场间耦合系数变化存在非线性关系. 进一步研究表明, 原子 2 和腔场 B 间的纠缠演化与原子 1 和腔场 A 间的纠缠演化结果相似, 同样存在崩塌和恢复效应, 且崩塌时间也随腔场间耦合系数增大而减小.

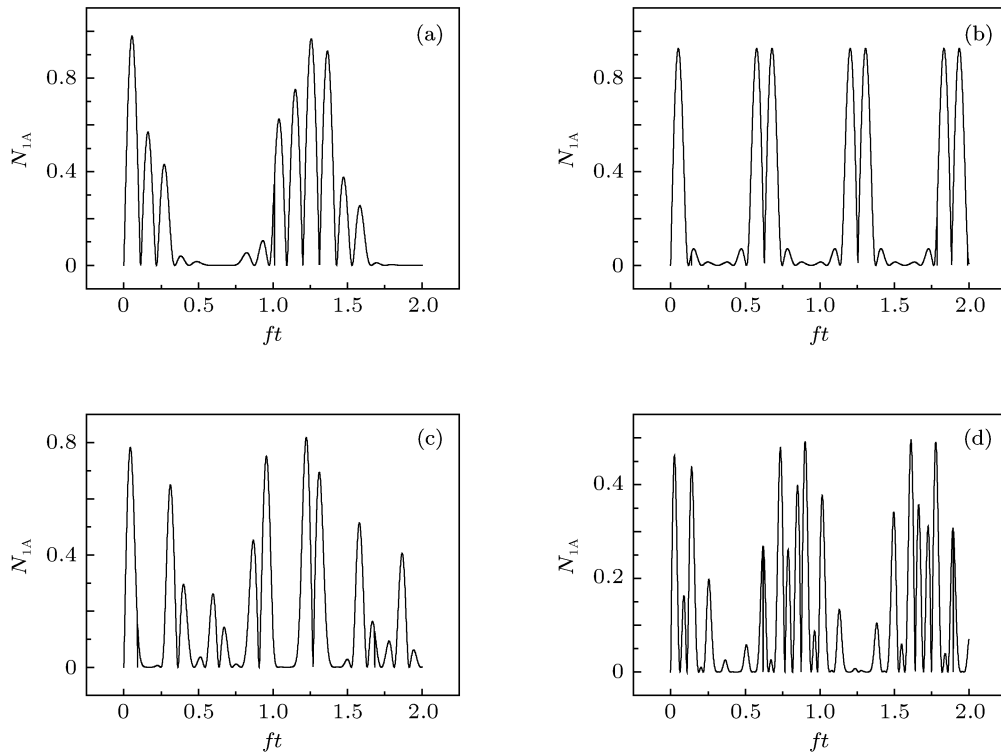


图 4 当  $J$  分别取  $0.5f, f, 2f$  和  $5f$  时纠缠量  $N_{1A}$  随时间的演化 (a)  $J = 0.5f$ ; (b)  $J = f$ ; (c)  $J = 2f$ ; (d)  $J = 5f$

### 6 结论

本文采用 Negativity 熵来描述两个子系统间的

纠缠, 研究了简并  $\Lambda$  型三能级原子和简并  $V$  型三能级原子与耦合腔相互作用系统中两个原子间、腔 A 与腔 B 间和原子与腔场间纠缠的演化. 采用

数值计算方法, 讨论了腔场间的耦合系数变化对纠缠特性的影响. 研究表明: 随腔场间的耦合系数增大, 原子间的纠缠增强, 腔场间的纠缠减弱. 而原子与腔场间的纠缠呈现出崩塌和恢复效应, 崩塌

时间随腔场间耦合系数增大而减小. 另一方面, 原子与腔场间的纠缠随腔场间耦合系数变化存在非线性关系.

- 
- [1] Turchette Q A, Hood C J, Lange W, Mabuchi H, Kimble H J 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4710
- [2] Hagley E, Maitre X, Nogues G, Wunderlich C, Brune M, Raimond J M, Haroche S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1
- [3] Osnaghi S, Bertet P, Auffeves A, Maioli P, Brune M, Raimond J M, Haroche S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 037902
- [4] Rauschenbeutel A, Nogues G, Osnaghi S, Bertet P, Brune M, Raimond J M, Haroche S 2000 *Science* **288** 2024
- [5] Rauschenbeutel A, Nogues G, Osnaghi S, Bertet P, Brune M, Raimond J M, Haroche S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5166
- [6] Yang Z B 2007 *Chin. Phys.* **16** 329
- [7] Nohama F K, Roversi J A 2007 *J. Modern Opt.* **54** 1139
- [8] Ogden C D, Irish E K, Kim M S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063805
- [9] Yang Z B, Xia Y, Zheng S B 2010 *Opt. Commun.* **283** 3052
- [10] Akhtarshenas S J, Farsi M 2007 quant-ph/0702101V1
- [11] Lu D M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090302 (in Chinese) [卢道明 2011 物理学报 **60** 090302]

# The entanglement properties in the system of a two three-level atoms trapped in coupled cavities\*

Lu Dao-Ming<sup>†</sup>

(*Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China*)

(Received 19 April 2011; revised manuscript received 27 May 2011)

## Abstract

We study the entanglement dynamics of the system composed of a  $\Lambda$ -type atom and a V-type atom resonantly interacting with two coupled cavities. The evolution of the state vector of the system is given. We investigate the evolutions of atom-atom entanglement, cavity-cavity entanglement, and atom-cavity entanglement by Negativity. The influences of cavity-cavity coupling coefficient on the entanglements are discussed. The results obtained by the numerical method show that the atom-atom entanglement is strengthened and the cavity-cavity entanglement is weakened with the increase of the cavity-cavity coupling coefficient.

**Keywords:** quantum optics, three level atom, coupled cavities, quantum entanglement

**PACS:** 03.65.Ud, 42.50.Dv

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2008J0217).

<sup>†</sup> E-mail: daominglu79@hotmail.com