

基于低阶矩阵最大特征值的复杂网络牵制混沌同步*

梁义¹⁾²⁾ 王兴元^{1)†}

1) (大连理工大学电子信息与电气工程学部, 大连 116024)

2) (伊犁师范学院电子与信息工程学院, 伊宁 835000)

(2011年4月18日收到; 2011年5月31日收到修改稿)

虽已对复杂网络牵制同步需要牵制结点数量及牵制结点数量与耦合强度的关系进行了研究, 然而快速计算牵制结点数量仍是大规模复杂网络面临的一个重要问题. 研究发现了复杂网络耦合矩阵主子阵最大值递减规律, 由此提出了快速计算复杂网络牵制结点数量的方法, 揭示了不同的牵制策略与牵制结点数量之间的关系. 数值仿真显示了在无标度网络和小世界网络上三种不同的牵制策略下, 牵制结点数与主子阵最大特征值的变化规律; 最后给出了一个在无标度网络上采用随机选择结点策略的牵制同步实例.

关键词: 复杂网络, 牵制同步, 主子阵

PACS: 89.75.-k, 05.45.Xt, 05.45.Gg

1 引言

过去的二十年来, 复杂网络在数学、物理、生物、计算机和社会科学等学科进行了广泛的研究^[1-5]. 自物理学家 Huygens 发现挂在同一横梁上的两个钟逐渐出现同步摆动的现象, 人们对同步的认识在不断深入. 今天, 同步在激光系统、超导材料和通信系统等领域起着重要的作用. 复杂网络上所有结点的同步是一种非常普遍而重要的现象, 它已成为复杂网络研究的一个热点. 网络同步有很多不同的类别, 有最常见的恒等同步、相同步、投影同步等广义同步^[6-13]. 人们在每个节点上都添加一个控制器进行恒等同步的研究已经获得许多结果^[14-21]. 由于复杂网络的结点数量很大, 要在每个结点都加上控制器是不现实的, 而且也没有必要. 在复杂网络中只选取一部分结点加以控制使网络上的每一个结点同步的方法称为牵制同步 (pinning synchronization). 这类方法简单且实用, 受到越来越多的关注, 并已经取得许多研究成果^[22-27].

文献 [22] 证明了只要耦合强度足够大, 只需牵制一个结点就可以实现同步. 文献 [23] 给出了低阶矩阵的最大特征值与耦合强度的关系, 并发现了

利用低阶矩阵的最大特征值可以判断牵制同步的现象. 文献 [24], [25] 分别给出了在非线性动力函数满足 Lipschitz 条件或下降性条件下, 需要牵制多少个结点的结论. 文献 [22], [25] 还对有向网络的牵制同步进行了研究.

我们分析了牵制同步与低阶矩阵最大特征值的关系, 给出了耦合矩阵顺序主子阵列最大特征值递减的规律, 利用此结果提出了快速求解牵制结点数的方法. 在最后的仿真实验中, 给出了不同复杂网络拓扑及不同的牵制策略下牵制结点数与耦合矩阵主子阵最大特征值的关系, 还给出了一个在无标度网络上随机选取牵制结点的牵制同步实例. 该方法为特定复杂网络选择适当的牵制策略可提供可靠的依据.

2 基础知识

考虑由 N 个相同结点构成的复杂网络, 其中每个结点是一个 n 维动力系统^[23]:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(t),$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 61173183, 60573172, 60973152)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20070141014) 和辽宁省自然科学基金 (批准号: 20082165) 资助的课题.

† E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

$$(i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 为第 i 个结点的状态向量; $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个非线性光滑函数; σ 是网络耦合强度; $\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为一个内部耦合矩阵; $\mathbf{G} = (g_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是耦合矩阵, 表示网络的拓扑结构, 其元素定义为: 如果从结点 j 到结点 $i (i \neq j)$ 存在链接, 那么 $g_{ij} = 1$; 否则, $g_{ij} = 0$. 另外, 假设 \mathbf{G} 满足耗散耦合条件

$$g_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ji}, (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

$i \neq j, g_{ij} > 0$ 表示结点 i 与 j 之间相互作用强度的一个度量, 本文 $g_{ij} = 1$ 是假设结点间相互作用的强度相同.

设 $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是一个孤立结点的状态向量, 满足

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{s}(t)), \quad (3)$$

$\mathbf{s}(t)$ 可能是一个平衡点、周期轨道、准周期轨道, 甚至是混沌吸引子. 如果当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\mathbf{x}_1(t) \rightarrow \mathbf{x}_2(t) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{x}_N(t) \rightarrow \mathbf{s}(t), \quad (4)$$

就称复杂网络 (1) 达到完全 (渐近) 同步.

各结点状态向量与参照点的差值为同步误差, 记为

$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{s}(t). \quad (5)$$

在本文后面计算牵制结点数时, 需要求出一个与 n 维动力系统 \mathbf{f} 有关的常数, 即满足如下条件的 ω . 设存在非负常数 ω 和正定矩阵 $\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, 有

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})] \leq \omega (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{\Gamma} (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (6)$$

就称 \mathbf{f} 满足下降性条件.

下面, 我们给出两个引理, 以便证明结论时使用.

引理 1^[28] 线性不等式 (LMI)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^H & \mathbf{C} \end{pmatrix} < 0$$

等价于下面的条件之一:

1) $\mathbf{A} < 0$, 且 $\mathbf{C} - \mathbf{B}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} < 0$,

2) $\mathbf{C} < 0$, 且 $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^H < 0$,

其中 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$ (\mathbf{A}^H 是 \mathbf{A} 的共轭转置), $\mathbf{C} = \mathbf{C}^H$, ' $<$ ' 为偏序, 矩阵 $\mathbf{X} < 0$ 表示 \mathbf{X} 是负定矩阵. 该引理给出了在一定条件下判定高阶矩阵的负定性等价于判定低阶矩阵的负定性的关键结论, 是提出快速计算牵制结点数方法的依据之一.

引理 2^[29] 设矩阵 $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{E} + \mathbf{f}$ 都是 n 阶 Hermitite 矩阵, 其特征值分别是 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ 和 $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n$. 那么 $\lambda_i + \mu_1 \leq \xi_i \leq \lambda_i + \mu_n, 1 \leq i \leq n$.

3 基于低阶耦合矩阵最大特征值的复杂网络牵制同步

3.1 无向复杂网络牵制同步

我们先考虑无向复杂网络的牵制同步情况. 设复杂网络 (1) 的耦合矩阵 \mathbf{G} 是不可约的对称矩阵 (不可约矩阵是指对应的复杂网络是连通的, 即不存在孤立结点). 添加控制器 $\mathbf{u}_i(t)$ 后的牵制复杂网络:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{u}_i(t), \\ (i &= 1, 2, \dots, l), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(t), \\ (i &= l + 1, l + 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{u}_i(t) = -\sigma d_i \mathbf{\Gamma} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{s}(t)) \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, l, \quad (9)$$

是一个 n 维控制器, $d_i > 0$ 为待定的控制因子.

(7) 和 (8) 式分别减去 (3) 式, 得同步误差微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(t) \\ &\quad - \sigma d_i \mathbf{\Gamma} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{s}(t)), \\ (i &= 1, 2, \dots, l), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{s}(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(t), \\ (i &= l + 1, l + 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (11)$$

下面以结论 1 的形式给出上述牵制控制的同步准则. 该结论是文献 [17] 的特殊情况, 为讨论方便给出其证明.

结论 1 设 \mathbf{f} 满足下降性条件, 当 $\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{D})$ 为负定矩阵时, 无向牵制复杂网络同步, 且其同步解全局渐进稳定. 其中 $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_l, 0, \dots, 0)$, \mathbf{I}_N 为 N 阶单位矩阵.

设 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t)^T \mathbf{e}_i(t), \quad (12)$$

沿轨线微分得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t)^T \dot{\mathbf{e}}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t)^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{s}(t))] \\ &\quad + \sigma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{e}_i(t)^T \Gamma \mathbf{e}_j(t) \\ &\quad - \sigma \sum_{i=1}^l d_i \mathbf{e}_i(t)^T \Gamma \mathbf{e}_i(t) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \omega \mathbf{e}_i(t)^T \Gamma \mathbf{e}_i(t) \\ &\quad + \sigma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{e}_i(t)^T \Gamma \mathbf{e}_j(t) \\ &\quad - \sigma \sum_{i=1}^l d_i \mathbf{e}_i(t)^T \Gamma \mathbf{e}_i(t) \\ &= \mathbf{e}_i(t)^T [(\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{D})) \otimes \Gamma] \\ &\quad \times \mathbf{e}_i(t), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 \otimes 是 Kronecker 积 (Kronecker product), $\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \dots, \mathbf{e}_N(t))^T$. 因为 Γ 是正定矩阵, 所以当且仅当 $\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{D})$ 为负定矩阵时, $(\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{D})) \otimes \Gamma$ 是负定的. 由 Lyapunov 稳定性定理, 证明此结论.

设 $\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \omega \mathbf{I}_l + \sigma(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{D}})$, \mathbf{I}_l 是 l 阶单位矩阵, $\tilde{\mathbf{G}}$ 和 $\tilde{\mathbf{D}}$ 分别为 \mathbf{G} 和 \mathbf{D} 的 l 阶顺序主子阵. $\mathbf{C} = \omega \mathbf{I}_{N-l} + \sigma \mathbf{G}[l+1, l+1]$. ω 是与 \mathbf{f} 有关的常数, 可适当地选取 σ 和 d_i 使 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T$ 是负定的, 所以由引理 1, $\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{D})$ 负定就等价于 \mathbf{C} 负定. 这样就可以考虑低阶矩阵 \mathbf{C} 的负定性来研究复杂网络的牵制同步.

为给出通过计算低阶耦合矩阵最大特征值快速求解牵制结点数的依据和方法, 先给出下面的结论 2.

结论 2 设 \mathbf{G} 为上述无向复杂网络的耦合矩

阵, $\mathbf{G}[l, l]$ 是 \mathbf{G} 的 $N-l+1$ 阶主子阵.

$$\mathbf{G}[l, l] = \begin{pmatrix} g_{ll} & g_{ll+1} & \cdots & g_{lN} \\ g_{l+1l} & g_{l+1l+1} & \cdots & g_{l+1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{Nl} & g_{Nl+1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

则 \mathbf{G} 的主子阵列 $\mathbf{G}[1, 1], \mathbf{G}[2, 2], \dots, \mathbf{G}[N, N]$ 的最大特征值为一递减序列, 即 $0 = \lambda_{\max}(\mathbf{G}[1, 1]) > \lambda_{\max}(\mathbf{G}[2, 2]) \geq \dots \geq \lambda_{\max}(\mathbf{G}[N, N])$.

设 $\mathbf{E} = \mathbf{G}[l, l]$ 为 $N-l+1$ 方阵, 不妨设 $l \leq N-1$.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -g_{ll} & -g_{ll+1} & \cdots & -g_{lN} \\ -g_{l+1l} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -g_{Nl} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

\mathbf{F} 的第一行和第一列是 $\mathbf{G}[l, l]$ 的第一行和第一列的相反数, 而其右下角为 $(N-l) \times (N-l)$ 阶 $\mathbf{0}$ 矩阵. 显然

$$\mathbf{E} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{l+1l+1} & \cdots & g_{l+1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{Nl+1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}.$$

并设 $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{E} + \mathbf{F}$ 的特征值分别是 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-l+1}$, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{N-l+1}$ 和 $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{N-l+1}$. 不难看出 $\mathbf{E} + \mathbf{F}$ 的特征值 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-l}$ 为 $\mathbf{G}[l+1, l+1]$ 的特征值, 而 $\xi_{N-l+1} = 0$.

下面求 \mathbf{F} 的特征值. 记 $p = \mathbf{G}_l^T \mathbf{G}_l = g_{ll}^2 + g_{ll+1}^2 + \dots + g_{lN}^2$, $\mathbf{G}_l^T = (g_{l+1l}, g_{l+2l}, \dots, g_{lN})$. 当 $p > 0$, \mathbf{F} 的非 0 特征值满足下列方程: $\mu^2 + g_{ll}\mu - p = 0$, (\mathbf{G} 不可约, $g_{ll} < 0$). 所以 $\mu_1 = (-g_{ll} - \sqrt{g_{ll}^2 + 4p})/2 < 0$, $\mu_{N-l+1} = (-g_{ll} + \sqrt{g_{ll}^2 + 4p})/2 > 0$, 其余的 $N-l-1$ 个特征值均为 0. 当 $p = 0$, 有 $\mu_{N-l+1} = -g_{ll} > 0$, 其余的 $N-l$ 个特征值均为 0. 总之, 有 $\mu_1 \leq 0 \leq \dots \leq 0 \leq \mu_{N-l+1}$. 由引理 2 得: $\lambda_1 + \mu_i \leq \xi_i \leq \lambda_{N-l+1} + \mu_i$, 所以当 $1 \leq i \leq N-l$ 时, $\xi_i \leq \lambda_{N-l+1}$, 从而有 $\max_{1 \leq i \leq N-l} \{\xi_i\} \leq \lambda_{N-l+1}$. 即 $\mathbf{G}[l+1, l+1]$ 的最大特征值小于等于 $\mathbf{G}[l, l]$ 的最大特征值, 从而有 $0 = \lambda_{\max}(\mathbf{G}[1, 1]) > \lambda_{\max}(\mathbf{G}[2, 2]) \geq \dots \geq \lambda_{\max}(\mathbf{G}[N, N])$. 因为 $\mathbf{G}[1, 1]$ 有唯一 0 特征值, 其他特征值均为负, $\mathbf{G}[2, 2]$ 的所有特征值均为负, 所以有 $\lambda_{\max}(\mathbf{G}[1, 1]) > \lambda_{\max}(\mathbf{G}[2, 2])$. 结论证毕.

从上面的证明过程可以看出, 当 $l \geq 1$ 时, $\mathbf{G}[l+1, l+1]$ 均为负定的, 所以总可以选取 σ 的值, 使 $\mathbf{C} = \omega \mathbf{I}_{N-l} + \sigma \mathbf{G}[l+1, l+1]$ 为负定. 即只要牵制结点数 $l \geq 1$ 就可以实现同步.

下面, 我们结合上述分析和结论 2 的结论, 给出快速计算牵制结点数的依据和方法.

ω 为已知, 当 $\sigma \lambda_{\max}(\mathbf{G}[l+1, l+1]) < -\omega$, 或 $\lambda_{\max}(\mathbf{G}[l+1, l+1]) < -\omega/\sigma$ 时, \mathbf{C} 为负定, 这时牵制系统同步, 且牵制的结点数为 l . 由结论 2, \mathbf{G} 的主子阵列 $\mathbf{G}[1, 1], \mathbf{G}[2, 2], \dots, \mathbf{G}[N, N]$ 的最大特征值为递减序列, 即 $0 = \lambda_{\max}(\mathbf{G}[1, 1]) > \lambda_{\max}(\mathbf{G}[2, 2]) \geq \dots \geq \lambda_{\max}(\mathbf{G}[N, N])$. 所以, $\lambda_{\max}(\mathbf{G}[l+j, l+j]) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{G}[l+1, l+1]) < -\omega/\sigma, j > 1$. 即牵制结点数大于 l 时牵制系统同步.

下面考虑 $-\omega/\sigma$ 一定的情况下, 求出牵引结点的下限. 因为 \mathbf{G} 的主子阵列 $\mathbf{G}[1, 1], \mathbf{G}[2, 2], \dots, \mathbf{G}[N, N]$ 的最大特征值是依次递减, 所以我们可以使用折半查找法求出第一个 $\lambda_{\max}(\mathbf{G}[l+1, l+1]) < -\omega/\sigma$ 的 l . 不妨设初始最大区间为 $[l_1, l_2]$, 根据 $\lambda_{\max}(\mathbf{G}[l_1, l_1]) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{G}[(l_1+l_2)/2, (l_1+l_2)/2]) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{G}[l_2, l_2])$, 进行折半查找. 求高阶矩阵的特征值代价是很高的, 而这一方法可以大幅减少计算特征值次数, 所以该方法对网络规模 N 非常大时是很有效的.

对同一个复杂网络, 网络节点编号顺序不同 (假设按照结点从小到大编号顺序构建网络的耦合矩阵) 所对应的耦合矩阵不同, 就有不同的主子阵的最大特征值序列, 但是它们仍遵循上述的递减规律. 如果要随机选取牵制结点, 那么就需要将网络结点随机编号, 按照编号顺序构建耦合矩阵, 然后就可以使用上述方法求牵制结点数量. 如果要选取大度数结点进行牵制, 就要将网络结点按照度数从大到小顺序依次编号, 再按序构建耦合矩阵进行求解. 当然还可以根据其他策略实施牵制, 并求出牵制结点数.

3.2 有向网络牵制同步

对有向复杂网络的牵制情况, 复杂网络 (1) 对应的耦合矩阵 \mathbf{G} 就是非对称矩阵. 添加控制器 $\mathbf{u}_i(t)$ 后的牵制复杂网络形式同 (7), (8) 和 (9) 式. 同步误差形式同 (10) 和 (11) 式. 与无向复杂网络不同的是 \mathbf{G} 是非对称矩阵.

下面先给出结论 3, 以便有向复杂网络的牵制同步分析.

结论 3 对上述的牵制有向复杂网络, 设 \mathbf{f} 满足下降性条件, 如果 $\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D})$ 为负定矩阵, 那么有向牵制复杂网络同步, 且其同步解全局渐进稳定. 其中 $\bar{\mathbf{G}} = (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)/2$ (对称矩阵), $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_l, 0, \dots, 0)$, \mathbf{I}_N 为 N 阶单位矩阵.

设 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t)^T \mathbf{e}_i(t), \quad (15)$$

沿轨线微分得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t)^T \dot{\mathbf{e}}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t)^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{s}(t))] \\ &\quad + \sigma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{e}_i(t)^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_j(t) \\ &\quad - \sigma \sum_{i=1}^l d_i \mathbf{e}_i(t)^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_i(t) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \omega \mathbf{e}_i(t)^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_i(t) \\ &\quad + \sigma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{e}_i(t)^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_j(t) \\ &\quad - \sigma \sum_{i=1}^l d_i \mathbf{e}_i(t)^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_i(t) \\ &= \mathbf{e}_i(t)^T [(\omega \mathbf{I}_N - \sigma \mathbf{D} + \sigma(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)/2) \\ &\quad \otimes \mathbf{\Gamma}] \mathbf{e}_i(t) \\ &= \mathbf{e}_i(t)^T [(\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D})) \otimes \mathbf{\Gamma}] \\ &\quad \times \mathbf{e}_i(t), \end{aligned} \quad (16)$$

因为 $\mathbf{\Gamma}$ 是正定矩阵, 所以当且仅当 $\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D})$ 是负定矩阵时 $(\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D})) \otimes \mathbf{\Gamma}$ 是负定的. 所以结论成立.

我们仍然可以通过计算低阶矩阵 (即 $\bar{\mathbf{G}}$ 的主子阵) 的最大特征值来分析其同步及稳定性. 设

$$\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \omega \mathbf{I}_l + \sigma(\tilde{\bar{\mathbf{G}}} - \tilde{\mathbf{D}}),$$

\mathbf{I}_l 是 l 阶单位矩阵, $\tilde{\bar{\mathbf{G}}}$ 和 $\tilde{\mathbf{D}}$ 分别为 $\bar{\mathbf{G}}$ 和 \mathbf{D} 的 l 阶顺序主子阵, $\mathbf{C} = \omega \mathbf{I}_{N-l} + \sigma \bar{\mathbf{G}}[l+1, l+1]$. 同理, 由引理 1, $\omega \mathbf{I}_N + \sigma(\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D})$ 负定矩阵就等价于 \mathbf{C} 负定矩阵.

为了给出使用低阶矩阵最大特征值分析同步的依据, 给出相应的结论 4.

结论 4 设 \bar{G} 为上述定义, $\bar{G}[l, l]$ 是 \bar{G} 的 $N - l + 1$ 阶主子阵.

$$\bar{G}[l, l] = \begin{pmatrix} \bar{g}_{ll} & \bar{g}_{ll+1} & \cdots & \bar{g}_{llN} \\ \bar{g}_{l+1l} & \bar{g}_{l+1l+1} & \cdots & \bar{g}_{l+1lN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{g}_{Nl} & \bar{g}_{Nl+1} & \cdots & \bar{g}_{NN} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

则 \bar{G} 的主子阵列 $\bar{G}[1, 1], \bar{G}[2, 2], \cdots, \bar{G}[N, N]$ 的最大特征值递减, 即 $\bar{\lambda}_{\max}(\bar{G}[1, 1]) \geq \bar{\lambda}_{\max}(\bar{G}[2, 2]) \geq \cdots \geq \bar{\lambda}_{\max}(\bar{G}[N, N])$.

设 $\bar{E} = \bar{G}[l, l]$,

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} -\bar{g}_{ll} & -\bar{g}_{ll+1} & \cdots & -\bar{g}_{llN} \\ -\bar{g}_{l+1l} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\bar{g}_{Nl} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{E} + \bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{g}_{l+1l+1} & \cdots & \bar{g}_{l+1lN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \bar{g}_{Nl+1} & \cdots & \bar{g}_{NN} \end{pmatrix},$$

$\bar{E}, \bar{F}, \bar{E} + \bar{F}$ 的特征值分别是 $\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \cdots \leq \bar{\lambda}_{N-l+1}$, $\bar{\mu}_1 \leq \bar{\mu}_2 \leq \cdots \leq \bar{\mu}_{N-l+1}$ 和 $\bar{\xi}_1 \leq \bar{\xi}_2 \leq \cdots \leq \bar{\xi}_{N-l+1}$.

证明过程同上, 从略. 但要做两点说明.

1) \bar{G} 没有不可约的条件, \bar{g}_{ll} 和 $\bar{g}_{ll+1}^2 + \bar{g}_{ll+2}^2 + \cdots + \bar{g}_{llN}^2$ 可能同时为 0, 这时 \bar{F} 的所有特征值均为 0; 另一种情况是 $\bar{g}_{ll} < 0$, 而 $\bar{g}_{ll+1}^2 + \bar{g}_{ll+2}^2 + \cdots + \bar{g}_{llN}^2 \geq 0$, 这时 $\mu_1 \leq 0 \leq \cdots \leq \mu_{N-l+1}$, 由引理 2 可得: $\bar{\lambda}_{\max}(\bar{G}[1, 1]) \geq \bar{\lambda}_{\max}(\bar{G}[2, 2]) \geq \cdots \geq \bar{\lambda}_{\max}(\bar{G}[N, N])$.

2) \bar{G} 的最大特征值不一定为 0. 因为, 对有向网络来说, $\bar{\lambda}_{\max}(\bar{G}[N, N])$ 不一定小于 0, 即牵制复杂网络不一定同步. 当存在 $\bar{\lambda}_{\max}(\bar{G}[j, j]) < 0$ 时, $1 \leq j \leq N$, 就可以使用上述的折半查找法求解牵制结点数.

4 数值仿真

为验证牵制方法的效果, 我们给出三个仿真实

例. 在实例中均选取 Lü 系统^[30] 作为混沌控制系统. 实际上, 除了 Lü 系统满足下降性条件外, Lorenz 系统^[31], Chen 系统^[32] 和蔡氏电路 (Chua's circuit)^[33] 等混沌系统均满足下降性条件.

我们先分别给出在无标度网络和小世界网络上, 采用选择小度数结点、随机选取结点和大幅度数结点牵制策略下的牵制结点数与其对应的主子阵最大特征值的关系. 用文献 [34] 的方法, 取 $N = 500, m_0 = m = 5$, 构造无标度网络; $N = 500, m = 4, p = 0.7$ (重连概率), 构造小世界网络. 然后, 依次计算牵制结点数 l 及对应的 $\lambda_{\max}(\bar{G}[l, l])$ 得到图 1 和图 2.

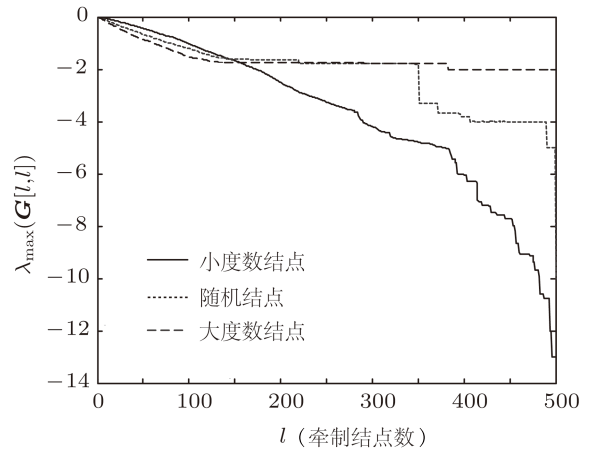


图 1 无标度网络牵制结点数与其对应的主子阵最大特征值的变化图

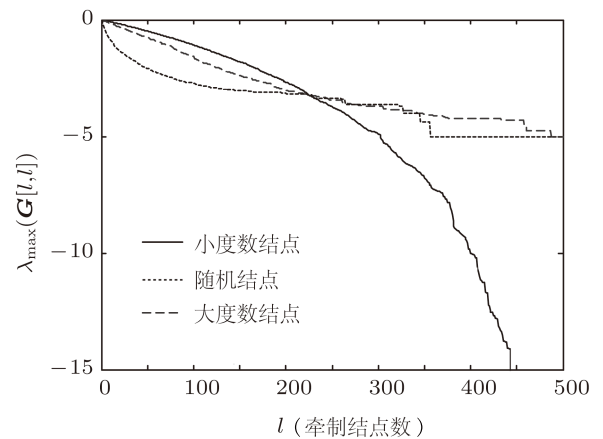


图 2 小世界网络牵制结点数与其对应的主子阵最大特征值的变化图

无标度网络上随机选取牵制结点的同步数值仿真实验. 设构建无标度网络的结点数 N, m_0 和 m 的值同上.

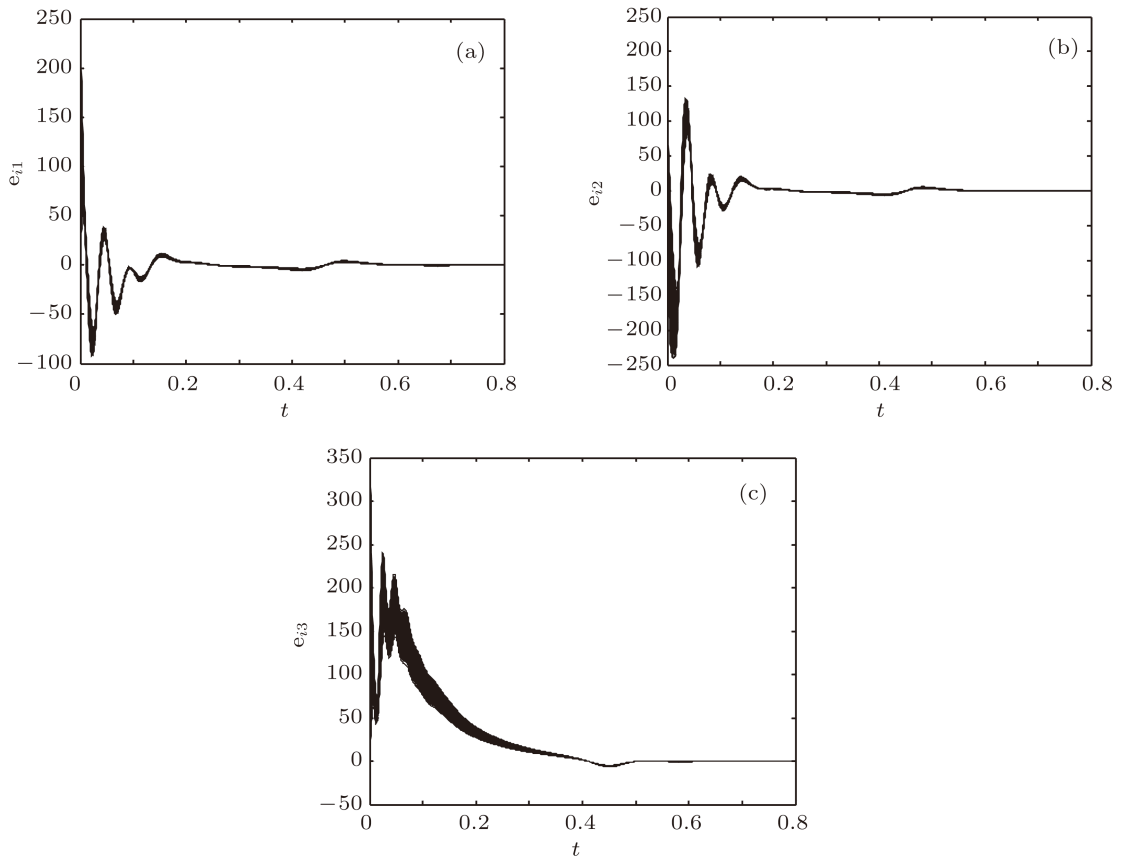


图3 (a), (b), (c) 分别为误差分量 e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} 的演化趋势, $1 \leq i \leq 500$

Lü混沌系统如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_{i1} = 36(x_{i2} - x_{i1}), \\ \dot{x}_{i2} = -x_{i1}x_{i3} + 20x_{i2}, \\ \dot{x}_{i3} = x_{i1}x_{i2} - 3x_{i3}, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 500. \quad (18)$$

已知存在 $M_1 = 25, M_2 = 30, M_3 = 45,$
 $|x_{ij}| \leq M_j, |s_j| \leq M_j, 1 \leq i \leq 500, 1 \leq j \leq 3^{[18]}$.
 令 $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(2, 3, 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{s})] \leq & \left(-36 + \frac{36 + M_3}{2\rho} + \eta \frac{M_2}{2} \right) e_{i1}^2 \\ & + \left(20 + \rho \frac{36 + M_3}{2} \right) e_{i2}^2 \\ & + \left(-3 + \frac{M_2}{2\eta} \right) e_{i3}^2, \end{aligned}$$

令 $\rho = 0.7120, \eta = 0.7781$, 得

$$\begin{aligned} & \left(-36 + \frac{36 + M_3}{2\rho} + \eta \frac{M_2}{2} \right) e_{i1}^2 \\ & + \left(20 + \rho \frac{36 + M_3}{2} \right) e_{i2}^2 + \left(-3 + \frac{M_2}{2\eta} \right) e_{i3}^2 \\ \leq & 16.2787(2e_{i1}^2 + 3e_{i2}^2 + e_{i3}^2), \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_i^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{s})] \leq 16.2787 \mathbf{e}_i^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_i, \quad (19)$$

这里取 $\omega = 16.2787$.

取耦合强度 $\sigma = 10$, 因 $-\omega/\sigma = -1.62787$, 按照快速计算方法求出 $\lambda_{\max}(\mathbf{G}[l+1, l+1]) < -1.62787$ 的第一个 $l = 94$. 即牵制结点为 94 时, 牵制系统同步. 用四阶 Runge-Kutta 法求解微分方程, 选择初值如下: $x_{i1} = 4 + 0.5 \times i,$
 $x_{i2} = 5 + 0.5 \times i, x_{i3} = 6 + 0.5 \times i; \mathbf{s}(0) = (4, 5, 6)$.
 取 $d_i = 1.7, 1 \leq i \leq l$, 使上述的 $\mathbf{A} - \mathbf{BC}^{-1}\mathbf{B}^H$ 为负定矩阵. 图 3 给出了同步误差分量演化趋势.

从图 1 可以看出, 选取牵制结点数小于总结点数的 50% 左右时, 选取大度数进行牵制效果最好, 其次是随机选取策略. 图 2 给出的小世界网络牵制策略与无标度网络中相对应的牵制策略有相似的规律. 但是, 在选择大度数结点进行牵制时, 无标度网络更具有优势, 即两者均达到同步的条件时无标度网络需要牵制的结点数更少. 实际上, 在网络所能提供的耦合强度允许的范围内, 牵制结点数目常常远小于网络的结点总数.

另外, 在无标度网络上的牵制同步数值仿真方

面, 我们选择大度数结点进行牵制时, 也做了数值仿真实验. 在其他条件相同的情况下, 选择大度数结点进行牵制时, $l = 26$ 时即可实现同步. 同步误差分量演化趋势图从略.

5 总结

本文分析了复杂网络牵制同步转化成计算低阶主子阵最大特征值问题的过程, 给出了利用低阶主子阵列最大特征值递减的规律和进行快速求解的依据和方法. 对无向复杂网络, 只要牵制结点数大于等于 1, 就可以使复杂网络实现同步. 而事实上, 提供足够大的耦合强度是不现实的. 从理论分析过程也可以看出, 在求非线性动力函数满足下降性条

件等过程中, 不等式的放大会造成计算出的结点数比实际结点数多. 从这种意义上说, 对一个确定的系统精确地求出需要牵制多少个结点并非很重要, 而快速求出一个尽量小的牵制结点数下限在理论和应用方面更为重要. 对有向复杂网络, 网络的耦合矩阵是不对称的, 但是, 在分析其同步稳定性时, 可以把它转化成另一个对称矩阵来分析, 并得出对称矩阵的降阶主子阵最大特征值存在负数时, 也可以使用快速求解方法. 有向复杂网络的牵制问题比无向复杂网络更复杂, 如哪些有向复杂网络可以实现牵制同步等问题是今后要进一步探讨的. 从前两个数值仿真结果发现, 不同复杂网络拓扑及不同的牵制策略与选择牵制结点数目的关系, 可以为特定系统选择适当的牵制策略时提供可靠的依据.

- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [2] Strogatz S H 2001 *Nature* **410** 268
- [3] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
- [4] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Reports* **424** 175
- [5] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 67
- [6] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 73
- [7] Dhamala M, Jirsa V K, Ding M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 074104
- [8] Yu H J, Zheng N 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4712 (in Chinese) [于洪洁, 郑宁 2008 物理学报 **57** 4712]
- [9] Bian Q X, Yao H X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3027 (in Chinese) [卞秋香, 姚洪兴 2010 物理学报 **59** 3027]
- [10] Wang X H, Jiao L C, Wu J S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020501
- [11] Zeng C Y, Sun M, Tian L X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5288 (in Chinese) [曾长燕, 孙梅, 田立新 2010 物理学报 **59** 5288]
- [12] Lü L, Xia X F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 814 (in Chinese) [吕翎, 夏晓岚 2009 物理学报 **58** 814]
- [13] Wu X J, Lu H T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070511
- [14] Zhou J, Lu J A, Lü J H 2006 *IEEE Trans. on Automatic Control* **51** 652
- [15] He G M, Yang J Y 2008 *Chaos, Soliton and Fractals* **38** 1254
- [16] Li Z, Chen G R 2004 *Phys. Lett. A* **324** 166
- [17] Lellis P D, Bernardo M D, Garofalo F 2008 *Chaos* **18** 37110
- [18] Lellis P D, Bernardo M D, Garofalo F 2009 *Automatica* **45** 1312
- [19] Zhang H G, Gong D W, Wang Z S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040512
- [20] Luo Q, Gao Y, Qi Y N, Gao Y, Wu T, Xu H, Li L X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6809 (in Chinese) [罗群, 高雅, 齐雅楠, 高雅, 吴桐, 许欢, 李丽香 2009 物理学报 **58** 6809]
- [21] Jin X Z, Yang G H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080508
- [22] Chen T P, Liu X W, Lu W L 2007 *IEEE Trans. Circuits Syst.- I* **54** 1317
- [23] Yu W W, Chen G R, Lü J H 2009 *Automatica* **45** 429
- [24] Zhou J, Lu J A, Lü J H 2008 *Automatica* **44** 996
- [25] Song Q, Cao J D 2010 *IEEE Trans. Circuits Syst.- I* **57** 672
- [26] Wang X F, Chen G R 2002 *Physica A* **310** 521
- [27] Porfiri M, Bernardo M D 2008 *Automatica* **44** 3100
- [28] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V 1994 *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (Philadelphia, PA: SIAM) p7
- [29] Zheng H R, Chen S L, Mo Z X, Huang X D 2002 *Numerical Calculating Methods* (Wuhan: Wuhan University Press) p484 (in Chinese) [郑慧娆, 陈绍林, 莫忠息, 黄象鼎 2002 数值计算方法 (武汉: 武汉大学出版社) 第 484 页]
- [30] Lü J H, Chen G R 2002 *Inter. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [31] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [32] Chen G R, Ueta T 1999 *Inter. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [33] Matsumoto T 1984 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **31** 1055
- [34] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Theory and Application of Complex Networks* (Beijing: Tsinghua University Press) p21 (in Chinese) [汪小帆, 李翔, 陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用 (北京: 清华大学出版社) 第 21 页]

Pinning chaotic synchronization in complex networks on maximum eigenvalue of low order matrix*

Liang Yi¹⁾²⁾ Wang Xing-Yuan^{1)†}

1) (*Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

2) (*Department of Electronics and Information Engineering, Yili Normal College, Yining 835000, China*)

(Received 28 April 2011; revised manuscript received 31 May 2011)

Abstract

In this paper, we find the decreasing law of maximum eigenvalue of the principal sub-matrix for coupling matrix, propose a method of calculating quickly pinning nodes in complex networks, and reveal the relation between the pinning strategy and the number pinning nodes. Numerical simulations show the trends of evolution under the conditions of three pinning strategies in a scale-free network and a small world, and the effectiveness of the pinning synchronization by selecting pinning nodes randomly in a scale-free network.

Keywords: complex networks, pinning synchronization, the principal sub-matrix

PACS: 89.75.-k, 05.45.Xt, 05.45.Gg

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61173183, 60573172, 60973152), the Superior University Doctor Subject Special Scientific Research Foundation of China (Grant No. 20070141014), and the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082165).

† E-mail: wangxy@dlut.edu.cn