

电压模式控制不连续传导模式 boost 变换器切分岔研究*

谢玲玲[†] 龚仁喜 卓浩泽 马献花

(广西大学电气工程学院, 南宁 530004)

(2011年5月31日收到; 2011年7月11日收到修改稿)

电压模式控制 boost 变换器能产生多种分岔形式, 对其分岔中的一类重要的切分岔现象进行了详细研究. 首先根据系统的一次离散迭代映射推导出其三次离散迭代映射模型, 基于非线性系统理论中的切分岔定理, 从数学上推导出此类变换器产生切分岔现象的条件, 并通过数值仿真研究了电路参数对这类变换器切分岔现象的影响. 研究表明: 当系统的反馈系数处在一定范围内时, 该类变换器会出现切分岔和阵发混沌现象. 最后通过实验研究 boost 变换器中存在的这类不稳定非线性现象, 验证了理论分析和数值仿真的正确性.

关键词: 切分岔, boost 变换器, 混沌, 迭代映射

PACS: 84.30.Jc

1 引言

近年来, 电力电子中的混沌现象已成为电力电子学界研究的热点之一. 研究表明 DC-DC 开关变换器作为一类典型的非线性时变系统, 在一定的控制条件下, 系统会产生诸如倍周期分岔^[1-3]、切分岔^[4-6]、边界碰撞分岔^[7-9]、混沌^[10-16]等非线性现象. 对这些非线性现象的研究有助于揭示其物理本质, 了解其变化趋势, 进一步采取相应的措施优化电路参数, 提高变换器的稳定性.

分岔是变换器中存在的一种非线性现象. 目前, 在对变换器分岔现象的研究中, 大部分研究主要集中在对倍周期分岔现象的分析及其变化趋势, 而对切分岔现象的研究较少. 切分岔是一种特殊的分岔, 指在分岔处从无周期轨道变成有两条同周期的周期轨道, 或者两条同周期的周期轨道被破坏而变成无周期轨道^[17,18]. 它与倍周期分岔的不同之处在于其导致混沌时又引出了新的周期运动轨道. 切分岔和阵发混沌是混沌内部的变化产生危机所出现的动力学行为, 是由于混沌吸引子与不稳定轨道产生碰撞而引起的^[4-6,17]. 文献^[5,6]通过仿真构造

离散迭代映射模型, 对 boost 变换器的切分岔和阵发混沌现象的产生进行解释. 然而, 目前还没有从动力学角度研究切分岔现象的相关报道. 实际上, 在动力系统理论中有切分岔产生的条件和判据. 为此, 本文以电压模式控制 boost 变换器为研究对象, 从非线性动力学的角度证明和解释了变换器切分岔现象产生的原因. 首先由变换器的 1 次离散迭代映射方程推导出其 3 次离散迭代映射方程, 根据切分岔定理, 对电压模式控制 boost 变换器产生切分岔的条件进行数学论证; 进一步采用数值计算方法, 如分岔图、Lyapunov 指数图和映射图对切分岔和阵发混沌现象的产生进行验证, 最后通过实验验证了切分岔和阵发混沌现象. 本文所提出的方法简单实用, 可以推广到其他变换器的非线性研究中, 对变换器优化参数、稳定设计具有重要的指导意义.

2 电压模式控制不连续传导模式 DCM boost 变换器迭代映射

电压模式控制 boost 变换器基本电路如图 1 所示. 主电路拓扑包含输入电压 E , 电感 L , 电容 C ,

* 国家自然科学基金 (批准号: 60962008) 资助的课题.

[†] E-mail: 10080450@qq.com

开关管, 二极管和负载电阻 R . 控制电路包含两个比较器, 一个反馈比例增益 k , X 为期望的输出电压值, D 为稳态占空比.

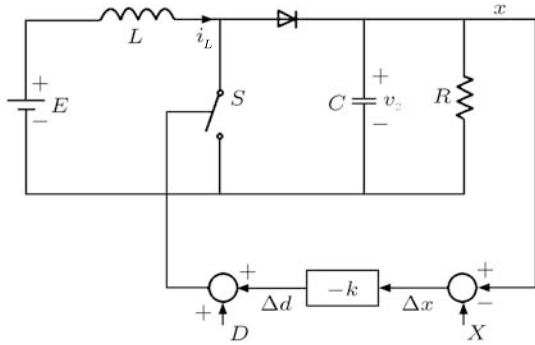


图1 电压模式控制 boost 变换器电路图

在不连续运行模式下, 系统的离散迭代方程可表示为^[1]

$$x_{n+1} = f(k, x_n) = \alpha x_n + \frac{\beta h(d_n)^2 E^2}{x_n - E}, \quad (1)$$

其中 x_n 表示在 $t = nT (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 时刻电容电压 v_C 的值. 式中,

$$\alpha = 1 - \frac{T}{RC} + \frac{T^2}{2C^2 R^2}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{T^2}{2LC}, \quad (3)$$

$$d_n = D - k(x_n - X), \quad (4)$$

$$h(d_n) = \begin{cases} 0, & d_n < 0 \\ 1, & d_n > 1 \\ d_n, & 0 \leq d_n \leq 1 \end{cases}. \quad (5)$$

众所周知, 周期 2 是由二次迭代映射产生的, 周期 3 是由三次迭代映射产生的. 由 (1) 式可推导出系统的 2 次和 3 次迭代映射方程, 分别如 (6) 和 (9) 式所示:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= f(k, x_{n+1}) = f^{(2)}(k, x_n) \\ &= \alpha x_{n+1} + \frac{\beta h(d_{n2})^2 E^2}{x_{n+1} - E}, \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式中

$$d_{n2} = D - k(x_{n+1} - X), \quad (7)$$

$$h(d_{n2}) = \begin{cases} 0, & d_{n2} < 0 \\ 1, & d_{n2} > 1 \\ d_{n2}, & 0 \leq d_{n2} \leq 1 \end{cases}, \quad (8)$$

$$x_{n+3} = f(k, x_{n+2}) = f^{(3)}(k, x_n)$$

$$= \alpha x_{n+2} + \frac{\beta h(d_{n3})^2 E^2}{x_{n+2} - E}, \quad (9)$$

(9) 式中

$$d_{n3} = D - k(x_{n+2} - X), \quad (10)$$

$$h(d_{n3}) = \begin{cases} 0, & d_{n3} < 0 \\ 1, & d_{n3} > 1 \\ d_{n3}, & 0 \leq d_{n3} \leq 1 \end{cases}. \quad (11)$$

3 DCM boost 变换器切分岔产生条件

切分岔的研究需要从一维迭代映射开始^[17]. 变换器处在不连续运行模式时, 其离散迭代映射可视为一维动力系统^[1].

3.1 切分岔定理^[17,18]

若映射函数 $x = f(\mu, x)$ 满足以下条件:

1) 在 (μ, x) 平面中存在一个不动点 $f^{(n)}(\mu^*, x^*) = x^*$. 其中 $f^{(n)}(\mu, x) = f(\mu, f(\mu, \dots, f(\mu, x) \dots))$;

2) 在此不动点处, 达到稳定边界 +1, 即 $\frac{\partial}{\partial x} f^{(n)}(\mu, x)|_{x=x^*, \mu=\mu^*} = +1$;

3) 在此不动点处, $f^{(n)}$ 对参量 μ 的偏导数不为零, 即 $\frac{\partial}{\partial \mu} f^{(n)}(\mu, x)|_{x=x^*, \mu=\mu^*} \neq 0$;

4) 同时, 二阶偏导数也不等于零, 即 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f^{(n)}(\mu, x)|_{x=x^*, \mu=\mu^*} \neq 0$; 则在 (μ^*, x^*) 附近存在一个小区域将发生切分岔现象.

3.2 切分岔条件

电路参数选取如下^[1]: 开关周期 $T = 333.33 \mu\text{s}$, $E = 16 \text{ V}$, $C = 222 \mu\text{F}$, $R = 12.5 \Omega$, $L = 208 \mu\text{H}$, 输出电压 $X = 25$, 占空比 $D = 0.2874$. 将参数代入 (2), (3) 式, 可计算得 $\alpha = 0.8872$, $\beta = 1.2$.

变换器的不动点及其失稳边界分别由 (12), (13) 式确定,

$$f^{(3)}(k, x_n) - x_n = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f^{(3)}(k, x_n) \Big|_{x=x^*} = 1. \quad (13)$$

将 (1)–(11) 式及电路参数代入 (12), (13) 式, 联立求解方程组, 可得 $k = 0.1355$, $x_1^* = 23.7$, $x_2^* = 26.08$, $x_3^* = 29.4$.

这表明该映射函数存在 3 个不动点, 且当 $k = 0.1355$ 时, 映射的图像与对角线在 3 个不动点处相切.

由 (9) 式可计算 $f^{(3)}(k, x_n)$ 对参量 k 的偏导数, 如下所示:

$$\frac{\partial}{\partial k} f^{(3)}(k, x_n) = \alpha \frac{\partial x_{n+2}}{\partial k} + \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\beta h (d_{n3})^2 E^2}{x_{n+2} - E} \right). \quad (14)$$

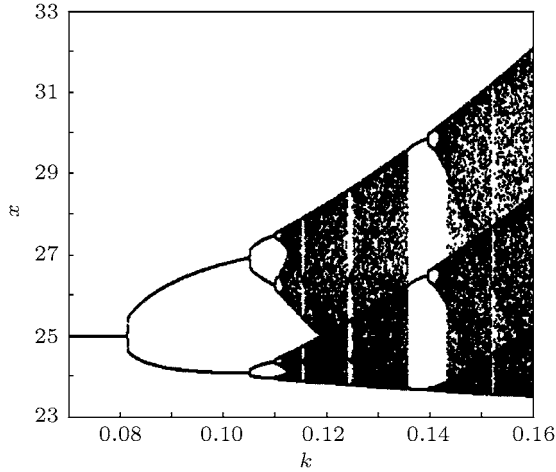


图 2 以 k 为参量的分岔图

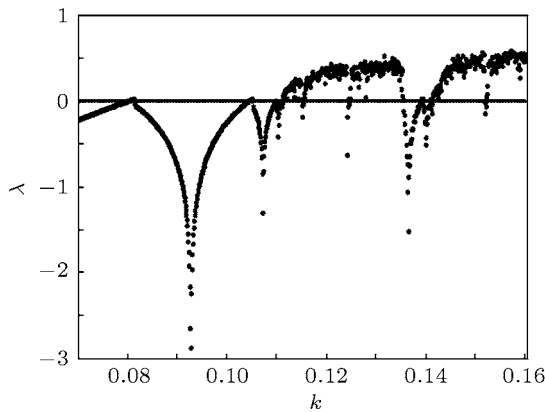


图 3 Lyapunov 指数图

将 (1)—(11) 式以及电路参数代入 (14) 式, 计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} f^{(3)}(k, x_n) \Big|_{k=0.1355, x_1^* = 23.70} &= -15.29987 \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial k} f^{(3)}(k, x_n) \Big|_{k=0.1355, x_2^* = 26.08} &= 195.1011 \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial k} f^{(3)}(k, x_n) \Big|_{k=0.1355, x_3^* = 29.40} &= 102.4027 \neq 0. \end{aligned}$$

$f^{(3)}(k, x_n)$ 对参量 x_n 的二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f^{(3)}(k, x_n) = \alpha \frac{\partial^2 x_{n+2}}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \left(\frac{\beta h (d_{n3})^2 E^2}{x_{n+2} - E} \right). \quad (15)$$

将 (1)—(11) 式以及电路参数代入 (15) 式, 计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f^{(3)}(k, x) \Big|_{k=0.1355, x_1^* = 23.70} &= 27.9006 \neq 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f^{(3)}(k, x) \Big|_{k=0.1355, x_2^* = 26.08} &= -3.7997 \neq 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f^{(3)}(k, x) \Big|_{k=0.1355, x_3^* = 29.40} &= -5.2413 \neq 0. \end{aligned}$$

综上所述, 电压模式控制 DCM boost 变换器满足切分岔定理的四个条件, 系统必将出现切分岔现象.

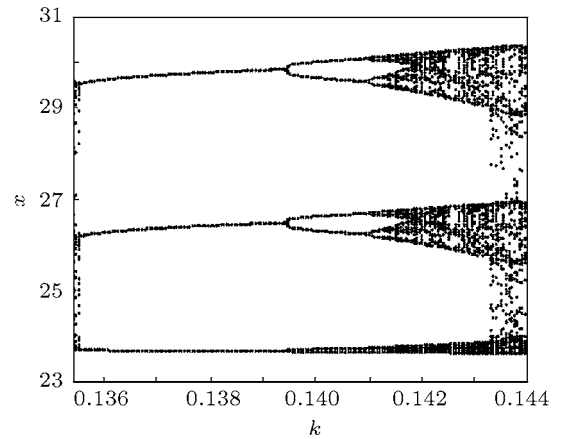


图 4 $0.1355 < k < 0.1395$ 时分岔图

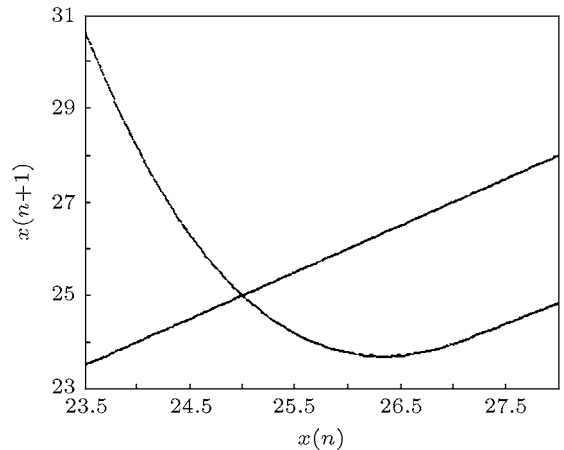


图 5 $k = 0.1355$ 时 1 次迭代映射图

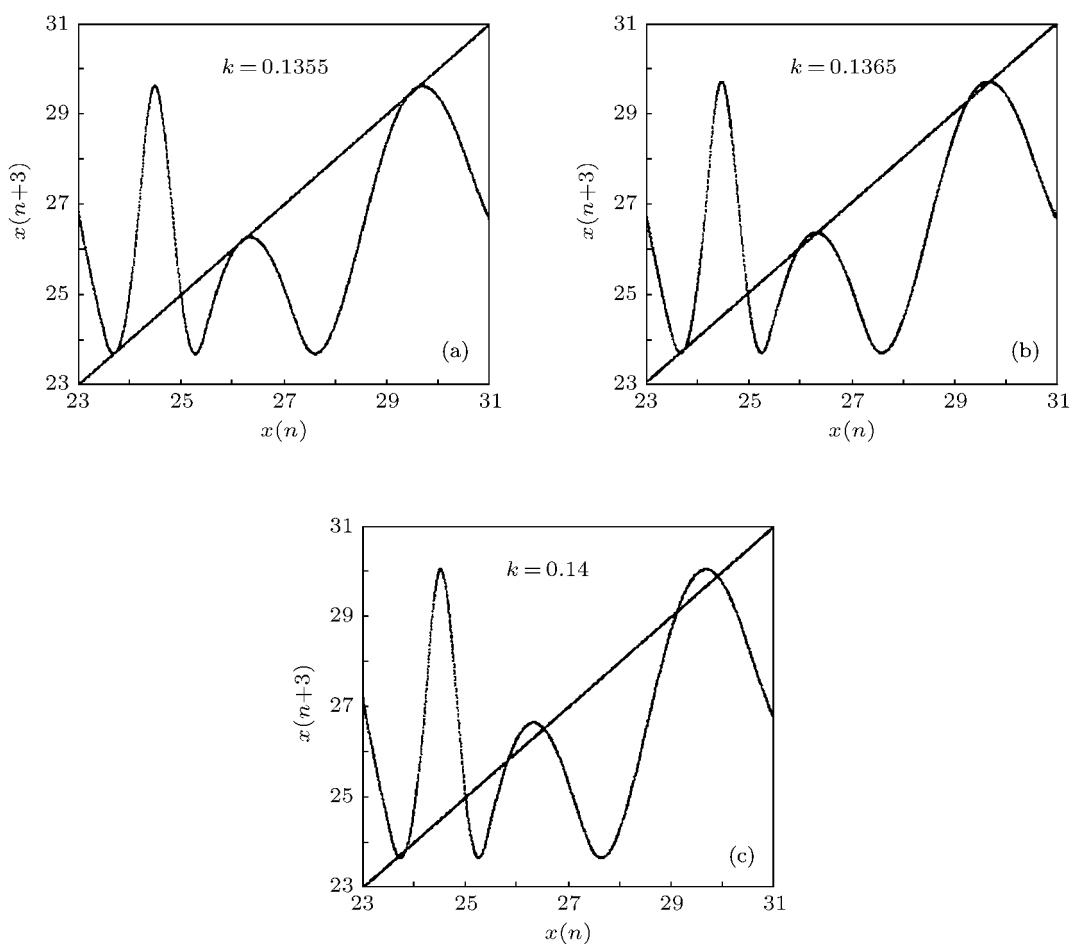


图 6 $f^{(3)}(k, x_n)$ 映射图 (a) $k = 0.1355$; (b) $k = 0.1365$; (c) $k = 0.14$

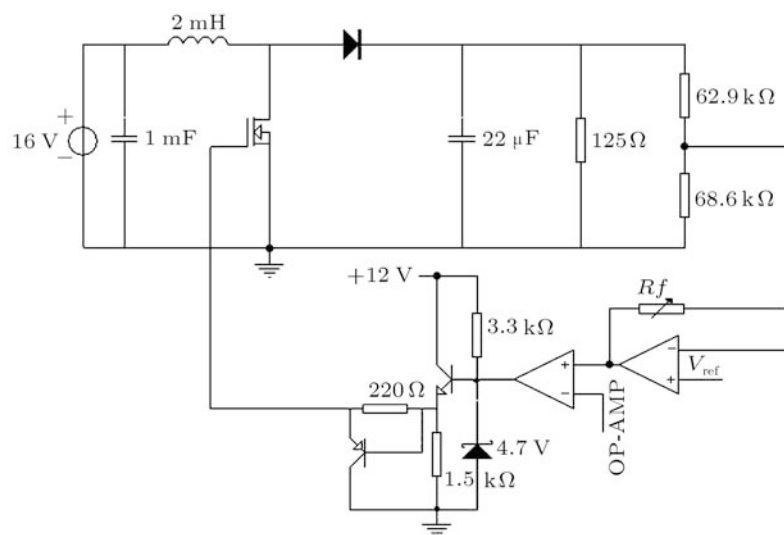


图 7 实验电路图

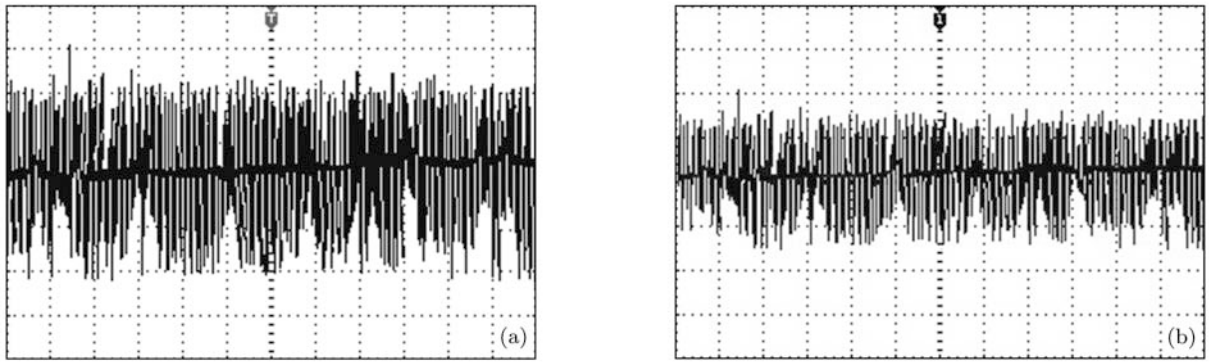


图 8 阵发混沌实验波形 (a) 电容电压波形 5 V/div, 10 ms/div; (b) 电感电流波形 1 A/div, 10 ms/div

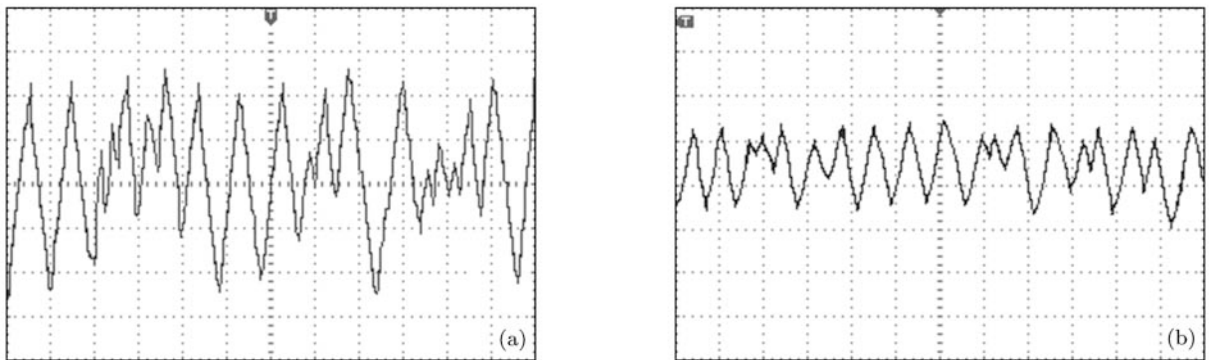


图 9 阵发混沌中的混沌实验波形 (a) 电容电压波形 5 V/div, 2 ms/div; (b) 电感电流波形 1 A/div, 2 ms/div

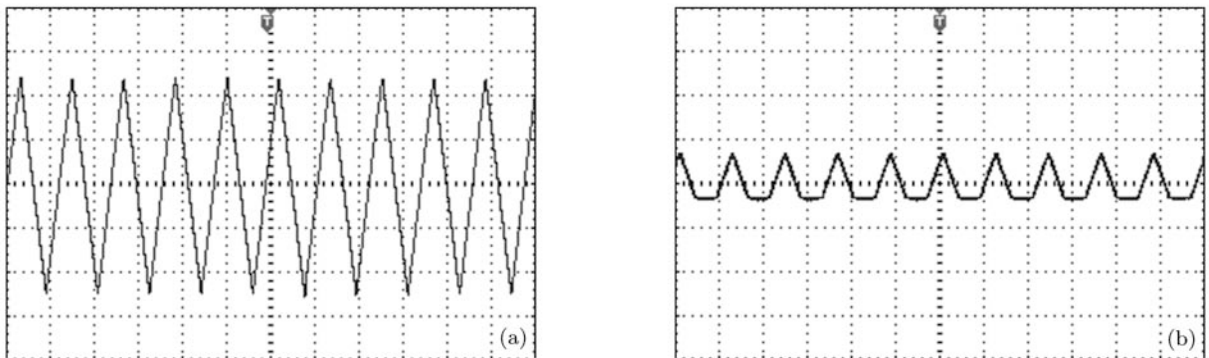


图 10 周期 3 实验波形 (a) 电容电压波形 5 V/div, 1 ms/div; (b) 电感电流波形 1 A/div, 1 ms/div

4 DCM boost 变换器切分岔数值仿真验证

上一节是从切分岔定理的角度证实电压控制型 DCM boost 变换器必将出现切分岔现象, 本节从另一角度出发, 用分岔图、Lyapunov 指数图和迭代映射图的方法进行证实.

利用分岔图和 Lyapunov 指数图可以进一步验

证切分岔现象. 图 2 为 DCM boost 变换器以反馈系数 k 为分岔参数的分岔图, 图 3 为其对应的 Lyapunov 指数. 由图 2 和图 3 可看出, 当 $k < 0.0802$ 时, 系统处于稳定周期 1, 对应的 Lyapunov 指数小于 0; 当 $k = 0.0802$ 时, 系统发生第一次倍周期分岔, 系统由稳定周期 1 进入周期 2, 此时对应的 Lyapunov 指数为 0; 当 $k = 0.1112$ 时, 系统进入混沌状态, 此时对应的 Lyapunov 指数为正数. 值得注意的是,

当 $0.13 < k < 0.14$ 时, 对应的 Lyapunov 指数由正数经 0 变为负数, 当 $k = 0.1355$ 时, 系统出现以周期 3 为起始的倍周期分岔, 此时对应的 Lyapunov 指数为 0; 此时系统由混沌状态向周期 3 转变, 这种现象称为切分岔.

当 $0.1355 < k < 0.1395$ 时的分岔图如图 4 所示. 此时, 分岔图缩为三个点, 即在此参数范围内, 有一条吸引的周期 3 轨道. $k = 0.1355$ 附近的周期 3 轨道是经由切分岔出现的, 这可以通过观察 $f^{(3)}(k, x_n)$ 随 k 变化的映射图得到.

图 5 和图 6 分别为电压控制型 DCM boost 变换器 1 次迭代映射和 3 次迭代映射曲线图. 由图 5 可知, 1 次迭代映射曲线与对角线存在 1 个交点, 此交点处的斜率为 -2 , 因此, 不动点是不稳定的. 图 6(a) 显示, 当 $k = 0.1355$ 时, $f^{(3)}(k, x_n)$ 的映射图像与对角线存在 4 个交点, 其中一个不动点对应 1 次迭代映射中的不动点, 另外 3 个不动点正好与对角线相切, 切点处的斜率为 $+1$, 正好处于失稳边界. 此时系统正处于失稳边界, 将会发生切分岔现象. 当 k 增加到大于 0.1355 时, 则每个切点都越过对角线而变成两个交点, 这两个交点处的曲线斜率分别大于或小于 1, 如图 6(b) 所示. 这就是说, 三个不动点对应于新出现的 3- 周期汇, 另外三个不动点对应新出现的 3- 周期源, 由此形成了混沌带中的周期 3 窗口. 对系统而言, 它们分别给出一条稳定的周期 3 轨道和一条不稳定的周期 3, 其中稳定的是可观测到的, 也就是切分岔后产生的周期 3 轨道, 而不稳定的是不可观测到的. 当 $k = 0.14$ 时, 3- 周期汇变为一条排斥的周期轨道, 当 3- 周期汇轨道变为排斥时, 会发生倍周期分岔, 从而出现一个新的 6- 周期汇, 如图 6(c) 所示. 稳定的周期 3 轨道随着 k 的增大出现倍周期分岔, 并逐步走向下一级混沌. 而不稳定轨道已经退化消失, 在分岔图上不会显示出来, 但是轨道本身还是存在的. 由图 2 可知, 变换器在发生切分岔之前是处于混沌状态的. 把切分岔之前的混沌称为阵发混沌, 它随时间变化的特征是: 在基本上属于周期振荡的序列中, 有时会突然出现一阵混沌运动, 然后又出现周期运动, 随机

地在二者之间跳跃 [5,17].

5 实验

为验证理论分析的正确性, 进行了电压模式控制 DCM boost 变换器的电路实验. 采用文献 [1] 提供的实验电路, 如图 7 所示. 实验结果表明, 系统在 k 约为 0.136 处发生切分岔, 并随后进入周期 3 状态. 图 8 为该处阵发混沌实验波形, 图 9 为其中的混沌运动波形, 图 10 为其中的规则周期 3 波形. 由图 8 可看出, 系统处于阵发混沌中周期态与混沌状态交替发生状态. 由图 10 可分析出一个周期约为 1 ms , 为文中开关周期的 3 倍.

综上所述, 实验结果证明了当反馈增益增大到一定数值时, 电压模式控制 DCM boost 变换器会产生切分岔和阵发混沌现象. 实验结果与理论分析结论相符合, 验证了本文所提出的理论研究的正确性.

6 结论

电压模式控制 boost 变换器在一定的工作和控制条件下, 会出现很多非线性现象, 如多种形式的分岔和混沌. 切分岔是其中一类重要的特殊的分岔. 本文根据该类变换器的一次离散迭代映射模型构造其三次离散迭代映射模型, 探讨电路参数对系统切分岔现象的影响, 并对其发生的切分岔现象及其形成原因进行了详细的分析和讨论. 依据切分岔定理, 从非线性动力学角度验证其存在切分岔现象, 进一步采用分岔图、Lyapunov 指数、映射图进行分析, 并对这些现象的形成原因进行解释. 最后通过实验验证了该变换器的切分岔和阵发混沌现象. 由此我们可以得出结论: 在一定的电路参数下, 当系统的反馈系数大于一定临界值时, 电压模式控制 boost 变换器会出现切分岔和阵发混沌的不稳定非线性现象, 影响系统的运行性能. 本文的研究方法简单, 可以推广到其他 DC-DC 变换器的研究中去, 研究结果对 DC-DC 变换器的设计具有重要的指导意义.

- [1] Tse C K 1994 *IEEE Trans. Circuits and Systems-I* **41** 16
 [2] Chan W C Y, Tse C K 1997 *IEEE Trans. Circuits and Systems-I* **44** 1129
 [3] Yang R, Zhang B, Chu L L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2770 (in

Chinese) [杨汝, 张波, 褚利丽 2008 物理学报 **57** 2770]

- [4] di Bernardo M, Vasca F 2000 *IEEE Trans. Circuits and Systems-I* **47** 130
 [5] Zhou Y F, Chen J N 2005 *Proceedings of the CSEE* **25** 23 (in Chi-

- nese) [周宇飞, 陈军宁 2005 中国电机工程学报 **25** 23]
- [6] Qiao X H, Bao B C, Shun Y X 2009 *Electrical Measurement & Instrumentation* **46** 5 (in Chinese) [乔晓华, 包伯成, 孙玉霞 2009 电测与仪表 **46** 5]
- [7] Dai D, Ma X K, Li X F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2371 (in Chinese) [戴栋, 马西奎, 李小峰 2003 物理学报 **52** 2371]
- [8] Bao B C, Xue J P, Liu Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2949 (in Chinese) [包伯成, 许建平, 刘中 2009 物理学报 **58** 2949]
- [9] Maity S, Tripathy D, Bhattacharya T K, Banerjee S 2007 *IEEE Trans. Circuits and Systems-I* **54** 1120
- [10] Yue M, Tse C K, Kousaka T, Kawakami H 2005 *IEEE Trans. Circuits and Systems-II* **52** 581
- [11] Basak B, Parui S 2010 *IEEE Trans. Power Electronics* **25** 1556
- [12] Cheng K W E, Liu M J, Ho Y L 2003 *IEEE Power Electron. Lett.* **1** 101
- [13] Xie L L, Gong R X, Zhuo H Z, Wei J Q 2011 *J. Elect. Eng. Tech.* **6** 519
- [14] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2842 (in Chinese) [王发强, 张浩, 马西奎 2008 物理学报 **57** 2842]
- [15] Zhou G H, Xue J P, Bao B C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2272 (in Chinese) [周国华, 许建平, 包伯成 2010 物理学报 **59** 2272]
- [16] Ei Aroudi A, Rodriguez E, Leyva R, Alarcon E 2010 *IEEE Trans. Circuits Systems-II* **57** 218
- [17] Hao B L 1993 *Starring with Parabolas an Introduction to Chaotic Dynamis* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [郝柏林 1993 从抛物线谈起——混沌动力学引论 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [18] Robinson R C 2004 *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete* (Northwestern University, Pearson Prentice Hall)

Investigation of tangent bifurcation in voltage mode controlled DCM boost converters*

Xie Ling-Ling[†] Gong Ren-Xi Zhuo Hao-Ze Ma Xian-Hua

(College of Electrical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China)

(Received 31 May 2011; revised manuscript received 11 July 2011)

Abstract

The voltage mode controlled boost converters contain plenty of bifurcation phenomena. Tangent bifurcation is one of these phenomena. The investigation of the tangent bifurcation in voltage mode controlled boost converters operating in discontinuous conduction mode (DCM) is performed. The third iterative map is derived according to the first iterative map. Based on the tangent bifurcation theorem, the conditions of producing the tangential bifurcation in the DCM boost converters are deduced mathematically. The computer simulations are performed to capture the effects of some chosen parameters on the tangent bifurcation behavior of the system. The results show that the variation of the feedback factor leads to tangent bifurcation and intermittent chaos phenomena. Experimental results show that the system does exhibit tangent bifurcation under the particular operating conditions, thus validating the theoretical analysis and the simulation results.

Keywords: tangent bifurcation, boost converter, chaos, iterative map

PACS: 84.30.Jc

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60962008).

[†] E-mail: 10080450@qq.com