

## 采用混合模型数值模拟从深海到浅海内波的传播\*

王晶<sup>1)</sup> 马瑞玲<sup>1)</sup> 王龙<sup>1)</sup> 孟俊敏<sup>2)†</sup>

1) (中国海洋大学信息科学与工程学院, 青岛 266100)

2) (国家海洋局第一海洋研究所, 青岛 266061)

(2011年4月28日收到; 2011年6月21日收到修改稿)

在南海东沙岛附近, 从 MODIS 遥感图像发现内波传播是从深海经陆架坡再到浅海, 由于深海和浅海环境条件的差异以及传播模型的适用条件不同, 因此不能采用同一模型模拟内波的传播, 需用两种模型来分别模拟内波在深海和浅海中的传播. 采用差分法, 首先用非线性薛定谔方程模拟了深海内波的传播, 然后用 EKdV 方程模拟了内波在浅海中的继续传播. 模拟结果与实际的 MODIS 遥感内波图像相符合, 并应用单一模型模拟结果相比, 混合模型模拟该海区的内波传播更接近遥感实测, 表明了混合模型的合理性.

**关键词:** 混合模型, 内波, 非线性薛定谔方程, EKdV 方程

**PACS:** 47.35.-i, 47.35.Bb, 47.35.Fg

## 1 引言

内波是密度稳定层化的海水内部的一种波动<sup>[1]</sup>. 由于内波是一种重要的海洋动力学现象以及其对海洋声学、海洋工程、海洋军事有重大影响, 内波已成为人们的研究热点. 目前, 研究内波常用方法主要是现场测量法、数值模拟法以及遥感图像法<sup>[2,3]</sup>. 对于浅海内波的研究, 1895年, Korteweg 和 Vries 首先将孤立波理论引入到海洋内波的研究中来, 提出了著名的 KdV 内波传播方程, 从而产生了最早的模拟浅海内波的模型<sup>[4]</sup>. KdV 方程虽然对于描述内波的非线性效应和频散性效应是一个适宜的物理模型, 但常系数 KdV 方程对于研究内波在变化海域的传播无能为力, 因为其系数会因为地形和层化等因素发生变化<sup>[5]</sup>. 后来产生了许多以 KdV 方程为基础的扩展模型, 其中 EKdV 方程通过引入高阶非线性项从而解决了内波极性转变研究的不足, 同时 EKdV 方程可以用来描述大振幅内波的传播. 在深海内波研究中, Benjamin 和 Ono<sup>[6,7]</sup> 得到适用于描述无限深流体中界面波的 Benjamin-Ono 方程 (BO 方程). Kubota 等<sup>[8]</sup> 推导出有限振幅界面长内波方程 (intermedi-

ate longwave, ILW), 且在水深趋于浅水条件时, 其解趋于 KdV 方程的解; 在水深趋于无限水深条件时, 其解趋于 BO 方程的解. Chio 和 Camass<sup>[9]</sup> 分别得到了在浅水和深水的两层流体界面内波的完全非线性演化方程. 我们最新推出了用来研究深海内波传播的 NLS 方程<sup>[10]</sup>. 虽然上述模型能在一定条件下分别描述浅海或深海内波传播, 但无法准确地模拟内波从深海至浅海的传播.

本文选择内波多发区-南中国海东沙岛附近海域, 根据地形由深海到浅海的变化, 采用 NLS 方程和 EKdV 方程相结合的混合模型来模拟内波从深海到浅海的传播, 模拟结果表明, 混合模型模拟内波演变与该海区的实际传播相一致, 比采用单一方程模拟结果更好.

## 2 NLS 模型和 EKdV 模型

## 2.1 NLS 模型

以二层流体模型为基础, 从流体力学方程组获得深海内波传播 NLS 方程<sup>[10]</sup>

$$-iA_t + \alpha A_{xx} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61171161) 资助的课题.

† E-mail: mengjm@fio.org.cn

其中,  $A$  为内波垂向位移;  $\alpha, \beta$  分别为频散系数和非线性系数, 它们是上、下层水深、密度等参量的函数.

在一定条件下, 利用 NLS 方程可以得到稳定态孤波解

$$A(x, t) = A_0 \operatorname{sech}\left(\frac{x'}{l}\right), \quad (2)$$

其中,  $x' = x - C_p t$ ;  $A_0$  为内波的最大振幅;  $l$  为内波的特征半宽度.

## 2.2 EKdV 模型

内波在浅海传播满足 EKdV 方程<sup>[11]</sup>

$$\eta_t + (c_0 + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2) \eta_x + \beta \eta_{xxx} = 0, \quad (3)$$

其中,  $\eta(x, t)$  表示内波振幅,  $c_0$  表示线性相关速度,  $\alpha_1$  表示非线性系数,  $\alpha_2$  表示高阶非线性系数,  $\beta$  表示频散系数. 在二层流体模型的假设下, 可得方程 (3) 中的各项系数<sup>[11]</sup>.

Stanton 和 Ostrovsky 提出了 EKdV 方程的孤波解<sup>[12]</sup>

$$\eta = -\frac{\alpha_1 \nu}{\alpha_2} \left\{ \tanh\left(\frac{x - Vt}{\Delta} + \delta\right) - \tanh\left(\frac{x - Vt}{\Delta} - \delta\right) \right\}, \quad (4)$$

其中,  $\nu$  是个从 0 到 1 变化的非线性参数, 其他参数如下

$$\delta(\nu) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu}\right),$$

$$\Delta = \sqrt{-\frac{24\alpha_2\beta}{\alpha_1^2\nu^2}},$$

$$V = c_0 - \frac{\alpha_1^2\nu^2}{6\alpha_2},$$

其中,  $V$  是相速度,  $\Delta$  是个宽度规模,  $\delta$  是相位因子.

## 3 数值模拟实验

### 3.1 混合模型模拟内波由深海到浅海的传播

在南海东沙岛附近, 由 MODIS 图像得到的内波演变如图 1 所示. 从图 1 可以看到内波由深海向东沙岛传播, 再继续通过陆架坡传到浅海的演变情形. 由于该海区地形是确定的, 从多幅遥感图像已验证了内波演变的规律. 因此, 图 1 的

遥感图像具有代表性.  $AC$  段水深变化情况:  $AB$  段水深由 2356 m 到 969 m,  $BC$  段水深由 969 m 至 188 m. 所以,  $AB$  段采用深海内波传播的 (1) 式为模型,  $BC$  段采用浅海内波传播的 (3) 式为模型. 利用差分法数值计算方程 (1) 和方程 (3), 从而获得内波演变.

首先以 NLS 方程模拟深海区域内波传播, 选择的模拟路径是图 1 中的  $A(20.92^\circ\text{N}, 119.00^\circ\text{E}) \rightarrow B(21.13^\circ\text{N}, 117.95^\circ\text{E})$ . 利用美国 NOAA 国家海洋资料中心下属的海气实验室 WOA05 (World Ocean Atlas 2005) 数据来确定研究海域的跃层深度. 选取上层水深为  $h_1 = 80$  m, 下层水深  $h_2$  按照下载实际数据输入, 它是个变量, 见图 4.  $\rho_1 = 1022.4 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_2 = 1026.6 \text{ kg/m}^3$ , 因而频散和非线性系数也都是变化的. 初始波形为:  $A_1 = -A_0 \operatorname{sech}(x/l)$ , 初始振幅为  $A_0 = 30$  m, 数值计算内波的传播, 内波演变图像如图 2 所示.

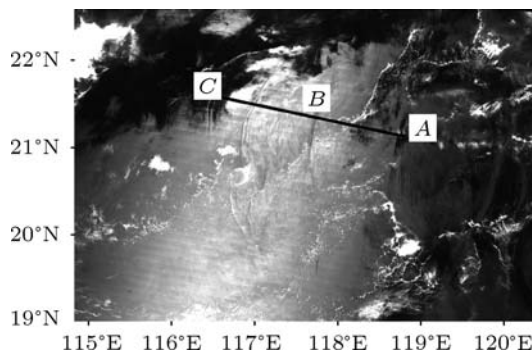


图 1 2008 年 4 月 6 日南海东沙岛附近内波 MODIS 图像

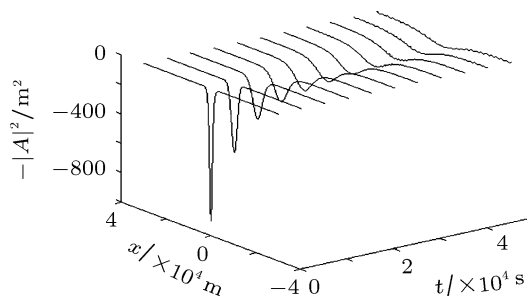


图 2 内波在深海 A—B 传播

通过图 2 发现: 内波在深海的传播过程中, 内波振幅在不断减小, 波形在不断展宽, 又由于在深海的传播过程中水深在不断减小, 从而可以推出内波振幅随着水深的减小而不断减小, 波形随着水深减小而不断展宽.

当内波传播到达  $B$  点, 再继续传播就以 EKdV

方程为传播模型, 模拟路径是图 1 中的  $B (21.13^\circ\text{N}, 117.95^\circ\text{E}) \rightarrow C (21.48^\circ\text{N}, 116.21^\circ\text{E})$ . 从深海模拟的数据中提取出了  $B$  点的内波波形, 并作为  $BC$  段传播的初始波型.

模拟中采用上述方法下载的水深数据, 由于密度分布的变化, 上层水深取  $h_1 = 60 \text{ m}$ , 相对密度差为  $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0.032$ . 数值模拟结果见图 3.  $t$  代表内波传播时间,  $u$  表示内波振幅.

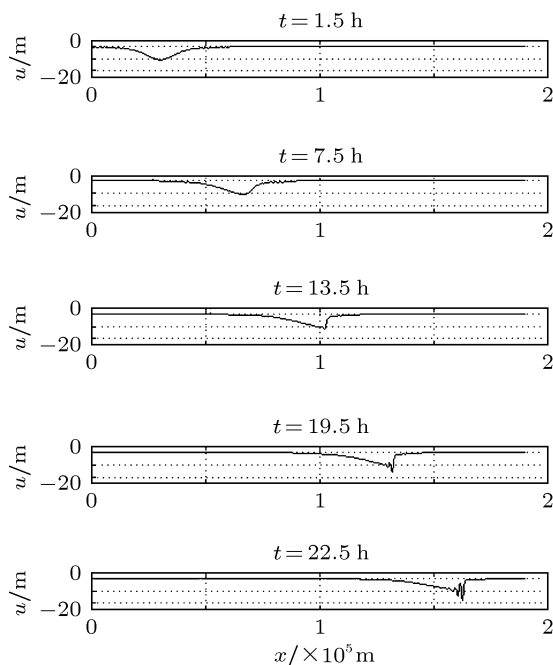


图 3 内波在浅海  $B-C$  中传播

由内波在浅海的传播图可以发现其在传播过程中将逐渐分裂, 经过一定时间后, 分裂成两个孤立子, 前导波振幅较大.

把上面的数值计算结果综合处理, 可以得到内波从深海到浅海的总传播状况, 如图 4 所示.

图 4 中下图为图 1 中  $A \rightarrow C$  路线的海底地形, 上图为内波由深海经陆架坡到浅海传播的总体概貌. 可见, 内波的振幅不断减小, 在深海区波形逐渐变得扁平, 到了浅海区, 内波前沿变陡, 随之分裂, 最终裂变为两条比较明显的内波, 这与所选择区域 2008 年 4 月 6 日 MODIS 图像中内波传播的趋势相同. 由此可知, 在深海区虽然水深不断减小, 但是该区域还是频散作用强于非线性作用. 而浅海区却是非线性作用逐渐增强, 这导致内波分裂.

由此可见, 采用混合模型模拟的南海东沙岛附

近内波由深海至浅海的传播与遥感实测相一致.

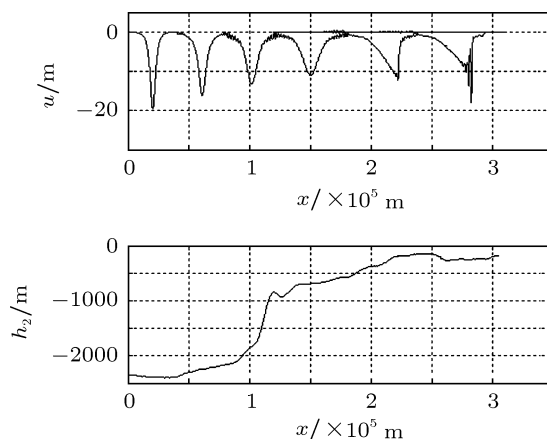


图 4 内波从深海到浅海 ( $A-C$ ) 的传播

### 3.2 单一模型模拟内波从深海到浅海的传播

采用与上述相同的条件, 分别利用单一 NLS 方程 (1) 或 EKdV 方程 (3) 模拟内波在路径  $A (20.92^\circ\text{N}, 119.00^\circ\text{E}) \rightarrow C (21.48^\circ\text{N}, 116.21^\circ\text{E})$  的传播, 数值计算结果如图 5 和图 6 所示.

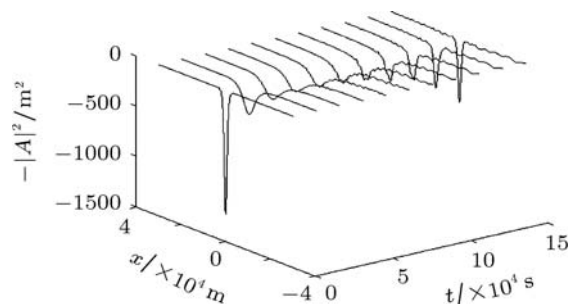


图 5 利用 NLS 方程模拟内波从深海到浅海 ( $A-C$ ) 的传播

由图 5 可见, 如果采用 NLS 方程模拟内波在整个路径的传播过程, 则内波的振幅随着水深减小先减小又增大, 内波波型先展宽又压缩, 但是在浅海区域内波没有发生分裂, 与实际遥感图像的内波演变不符, 说明 NLS 方程描述浅海内波传播误差较大. 而用 EKdV 方程模拟内波在整个路径的传播过程, 由图 6 可见, 内波在深海的传播过程中没有展宽过程, 而是内波的尾翼出现了振荡结构, 到达浅海并没有出现两个孤立子, 显然与实际遥感图像内波传播也不符. 因而, 单独采用一种模型仿真内波的传播是不准确的.

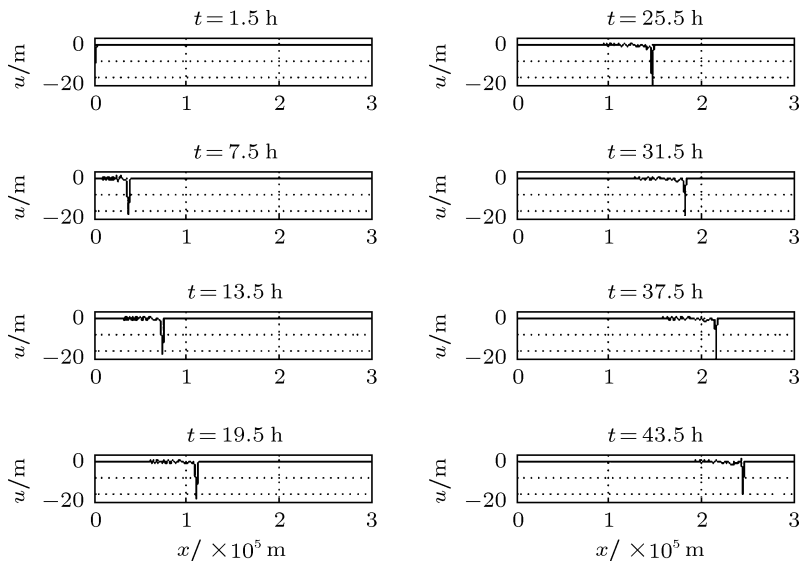


图6 利用 EKdV 方程模拟内波从深海到浅海 (A—C) 的传播

### 4 结论

本文用 NLS 方程和 EKdV 方程相结合形成混合模型, 数值模拟内波从深海到浅海的传播, 内波在深海是不断展宽的, 而经过陆架坡折处到达浅海, 内波逐渐分裂, 最后分裂成两个振幅较大的内波串. 这与 2008 年 4 月 6 日 MODIS 遥感内波图像符合

得非常好. 而使用单一的方程来模拟该海区的结果与 MODIS 遥感内波图像具有较大差异. 混合模型数值计算的内波波型变化与海底地形由深变浅、导致频散作用由强到弱、非线性作用由弱到强相符合, 从而证明用 NLS 方程和 EKdV 方程的混合模型模拟内波在深海到浅海的传播是可行的, 这种方法对研究内波传播具有指导意义.

[1] Fang X H, Du T 2005 *Fundamentals of Oceanic Internal Waves and Internal Waves in the China Seas* (Qingdao: Ocean University of China Press) p69 (in Chinese) [方欣华, 杜涛 2005 海洋内波基础和中国海内波 (青岛: 中国海洋大学出版社) 第 69 页]

[2] Shen H 2005 *Ph. D. Dissertation* (Qingdao: Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [申辉 2005 博士学位论文 (青岛: 中国科学院海洋研究所)]

[3] Wen W Y, Chen X G, Song J B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7149 (in Chinese) [温文斌, 陈小刚, 宋金宝 2010 物理学报 **59** 7149]

[4] Korteweg D J, de Vries G 1895 *Phil. Mag.* **39** 5 422

[5] Bai Y F 2005 *MS Thesis* (Qingdao: Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [白晔斐 2005 硕士学位论文 (青岛: 中国科学院海洋研究所)]

[6] Benjamin T B 1967 *J. Fluid Mech.* **29** 559

[7] Hiroaki O 1975 *J. Phys. Soc. Japan* **39** 1082

[8] Kubota T, Ko D R S, Dobbs L D 1978 *J. Hydraulics* **12** 157

[9] Choi W, Camassa R 1999 *J. Fluid Mech.* **396** 1

[10] Song S Y, Wang J, Meng J M, Wang J B, Hu P X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1123 (in Chinese) [宋诗艳, 王晶, 孟俊敏, 王健步, 扈培信 2010 物理学报 **59** 1123]

[11] Lee C Y, Beardsley R C 1974 *J. Geophys. Res.* **79** 453

[12] Stanton T P, Ostrovsky L A 1998 *Geophys. Res. Lett.* **25** 2695

# Numerical simulation of the spread of internal waves see from deep sea to shallow sea from the mixed model\*

Wang Jing<sup>1)</sup> Ma Rui-Ling<sup>1)</sup> Wang Long<sup>1)</sup> Meng Jun-Min<sup>2)†</sup>

1) (*College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China*)

2) (*First Institute of Oceanography, Qingdao 266061, China*)

(Received 28 April 2011; revised manuscript received 21 June 2011)

## Abstract

From remote sensing images, it is found that the internal wave spreads from deep sea, by shelf slope, to shallow sea in the South Chinese sea. Because of the different environmental conditions and model applicabilities, it is the best to use two models to simulate the spread of ocean internal waves in deep or shallow sea. The spread of waves in deep sea is simulated with the nonlinear Schrödinger (NLS) equation first and then the spread of wave in shallow sea is simulated with the extended Korteweg de Vries (EKdV) equation by differential method. It can be found that the results are in good agreement with the actual remote sensing images, compared with those obtained by single model which consists of the NLS equation or the EKdV equation.

**Keywords:** mixed model, internal waves, nonlinear Schrödinger equation, EKdV equation

**PACS:** 47.35.-i, 47.35.Bb, 47.35.Fg

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61171161).

† E-mail: mengjm@fio.org.cn