

## Schardin 问题的数值研究\*

沙莎 陈志华<sup>†</sup> 张焕好 姜孝海

(南京理工大学瞬态物理重点实验室, 南京 210094)

(2011年5月6日收到; 2011年7月1日收到修改稿)

激波绕过三角楔 (Schardin 问题) 时会产生激波马赫反射与绕射、三角楔尾涡与涡串等复杂物理现象. 本文利用三阶精度加权基本无振荡 (WENO) 格式、结构化矩形网格的自适应加密方法与沉浸边界法对 Schardin 问题进行了数值模拟. 数值结果清晰地显示了激波与三角楔相互作用, 在楔面发生马赫反射以及在楔角绕射诱导主涡的过程, 并与 Schardin 等的实验结果及相关数值结果完全符合. 另外, 数值结果还详细反映了先前实验与数值结果没有详细讨论的主涡滑移层上的涡串生成机理, 以及激波与涡串相互作用和产生声波的过程.

**关键词:** 激波, 涡串, WENO 格式, AMR 方法

**PACS:** 47.85.Gj, 47.40.Nm

## 1 引言

Schardin 问题源于 1957 年 Schardin<sup>[1]</sup> 用高速阴影摄像记录的关于平面激波绕过三角楔时, 在其表面发生反射和绕射所形成的复杂流动现象. Schardin 问题包含激波马赫反射与绕射、激波与主涡作用、激波与涡串作用以及声波等典型流体物理现象, 因此引起了广泛关注和研究. 先前研究表明, Schardin 现象中主要包括反射激波与主涡相互作用被分离成加速激波和减速激波, 同时主涡受 K-H 不稳定影响, 其外缘演变成系列涡串, 然后减速激波与涡串相互作用的过程.

Sivier 等<sup>[2]</sup> 基于欧拉方程、自适应非结构化网格加密方法与 FEM-FCT 格式, 对 Schardin 问题进行了数值研究, 其结果清晰地反映了激波绕射诱导主涡以及反射激波与主涡在第一阶段相互作用的过程. 为了避免 Schardin 实验中因入射激波与三角楔相互作用产生的膨胀波对流场的干扰, Chang 等<sup>[3]</sup> 增加了激波管宽度, 并利用双曝光激光全息干涉测量和阴影技术对 Schardin 问题再次进行了实验研究, 实验结果清晰地反应了激波绕射三角楔体诱导主涡以及激波与主涡相互作用的过程. 另外, 他们还基于欧拉方程对其进行了数值模拟, 结果同样揭示了激波与主涡相互作用分离成加速激波和

减速激波的过程, 并对激波与涡串相互作用的初始过程进行了讨论, 然而, 其数值计算结果没有清晰反映减速激波与主涡串相互作用以及诱导声波的现象. 类似的研究还包括激波绕 90° 拐角流场<sup>[4]</sup> 以及圆柱绕流<sup>[5]</sup> 等.

直到目前为止, Schardin 问题中关于涡串的产生以及激波与涡串相互作用过程仍没有被完全揭示. 近年来, 随着高精度格式与相关网格技术的发展, 捕捉复杂边界的激波分辨率得以提高<sup>[6,7]</sup>. 为了完全揭示 Schardin 问题第二阶段过程中的激波与涡串相互作用过程, 本文基于高精度加权基本无振荡 (WENO) 格式, 结合沉浸边界法 (IBM) 与自适应网格加密 (AMR) 技术, 对 Schardin 问题重新进行了数值模拟, 其结果与 Schardin 及 Chang 的实验结果<sup>[1,3]</sup> 以及先前对第一阶段激波与主涡的相互作用过程<sup>[2,3]</sup> 完全相符, 同时清晰地显示了激波与涡及涡串的相互作用过程, 以及诱导声波的机理.

## 2 数值方法

## 2.1 控制方程

二维非定常可压流的 Euler 方程:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

\* 高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20103219110037) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: chenzh@mail.njust.edu.cn

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\rho, \rho u, \rho v, \rho E]^T, \\ \mathbf{F} &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho E + p)u]^T, \\ \mathbf{G} &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (\rho E + p)v]^T. \end{aligned}$$

以上各式中  $\rho$  为气体密度,  $p$  为压力,  $u, v$  分别为  $x$  与  $y$  方向的速度分量.  $E$  为单位质量气体的总能量,

$$E = \frac{p}{(r-1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$$

$r$  为理想气体绝热指数.

## 2.2 数值方法

WENO 格式<sup>[6]</sup>对基本无振荡(ENO)格式的光滑模板提出加权平均,使格式在光滑区域的计算精度得到提高,并在间断附近仍保持 ENO 格式的分辨率. WENO 格式比 ENO 格式具有更好的有效性、通量的光滑性以及收敛解的稳定性,而在间断处则与 ENO 格式相当.正因如此, WENO 格式自提出以来,在流体运动尤其是包含激波和复杂流动现象的数值模拟中得到了越来越广泛的应用.本文选用三阶精度 WENO 格式.

本文利用 AMR 技术来进一步提高对激波的分辨率. AMR 技术可在数值计算过程中根据局部流场参数变化梯度来决定下一时间步采用网格的变化.计算物理量梯度变化越大的区域,其网格越小,反之则越大,从而使每个网格的计算误差相当,并可用较少的总网格数对所计算域的物理问题给出较高精度的数值解.1988 年 Berger 等<sup>[7]</sup>提出基于结构化矩形网格自适应加密方法,由于其数据结构较为简单,近年来得到较为广泛的推广和应用.

IBM 方法同样是近年来发展并趋于成熟的一种复杂边界处理方法.其基本思想是计算流场向复杂边界以外的空间适当拓展,使流场边界沉浸在拓展后的新流场中,并通过插值等技术确保复杂边界上的点满足所需边界条件.因此 IBM 可利用笛卡尔坐标对复杂边界形状的流场进行数值计算.其关键是如何保证拓展流场中边界点满足固有的边界条件,可参考文献[8,9].

## 2.3 数值方法验证

为了检验以上数值方法对激波的分辨率,我们以激波与单楔相互作用的典型算例进行验证.取初始边界条件以及计算域等与文献[10]一致.图1为本文计算过程中激波反射区附近自适应加密网

格分布及本文计算的激波马赫反射结构与 Huang 等<sup>[10]</sup>的计算结果比较情况,其中坐标值均为无量纲单位,以单楔长度的一半为特征值.

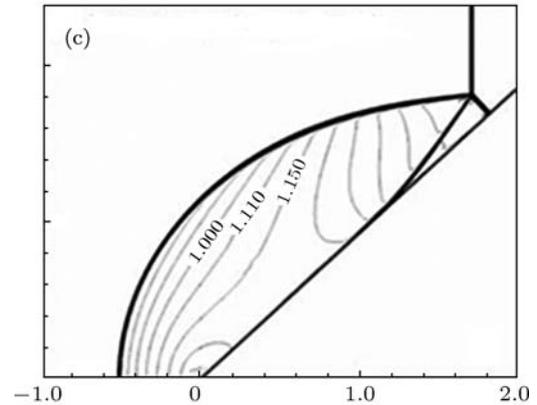
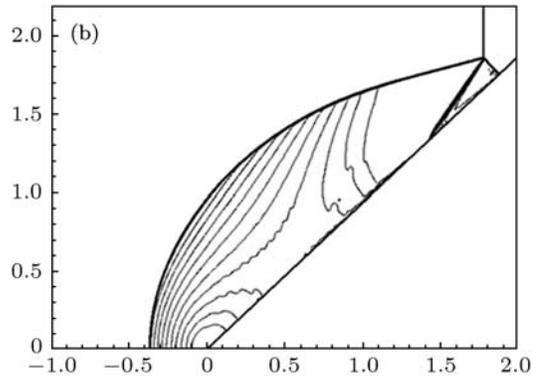
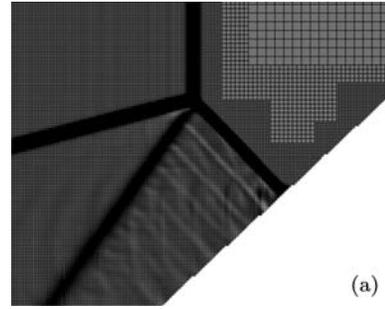


图1 单楔激波反射算例 (a) 计算过程中的典型加密网格; (b) 本文计算结果; (c) 文献[10]计算结果

由图可知,本文数值方法可准确捕捉激波,清晰揭示激波流场中马赫反射中的三波点、马赫杆及滑移线等精细流场结构,并与 Huang 等<sup>[10]</sup>的计算结果及相关实验结果相符.

## 3 Schardin 问题的计算与讨论

为了与先前 Schardin 问题的研究结果比较,本文取三角楔模型,如图2所示.该模型与文献[3]相同,为等边三角形,其中边长为 20 mm.取左侧来流

马赫数  $Ma = 1.34$ , 右侧为出口条件, 上下边界均为固壁反射条件.

图 3 为本文计算的不同时刻激波绕三角楔过程的序列模拟结果与文献 [1] 的序列实验阴影对比. 由图可知, 本文的计算结果与实验结果完全相符, 且可反映 Schardin 实验过程中的激波流场细节变化 (将在下文讨论). 图 4 为  $t = 0.0011875$  s 时激波绕过三角楔所形成的波系结构. 图中字母所代表的波系名称可参见图标. 此时, 激波在楔尾发生绕射, 并在楔体尾部相碰, 分别与上、下两主涡相互作用, 形成典型的激波流场波系结构.

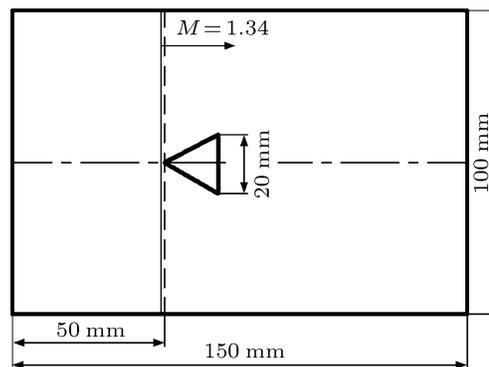


图 2 Schardin 问题的计算模型

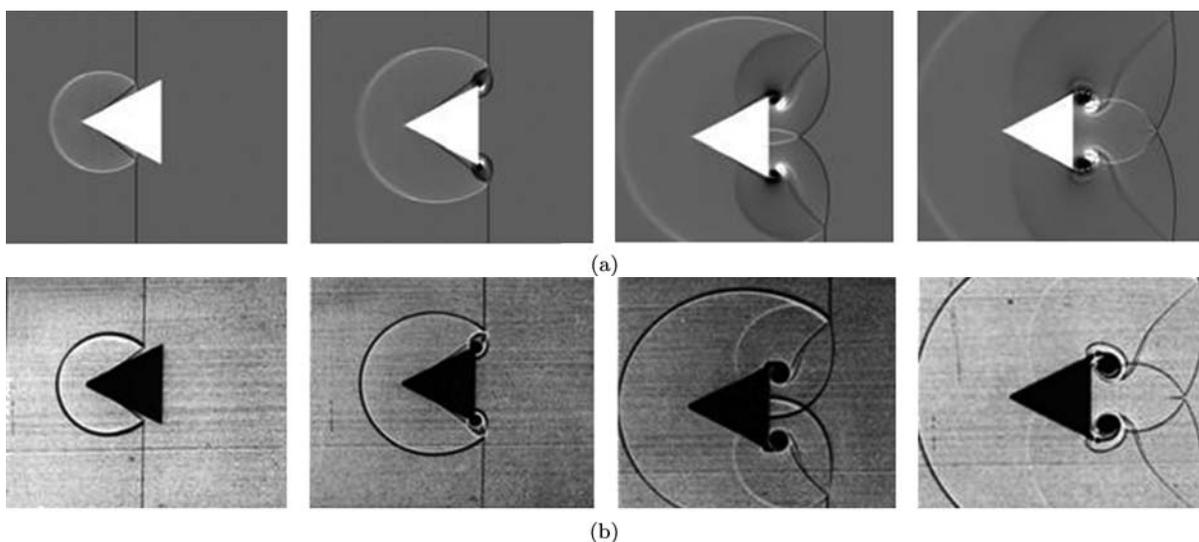


图 3 激波绕射三角楔时本文计算与文献 [1] 的实验序列结果的对比 (a) 本文计算序列结果; (b) 文献 [1] 的实验序列结果

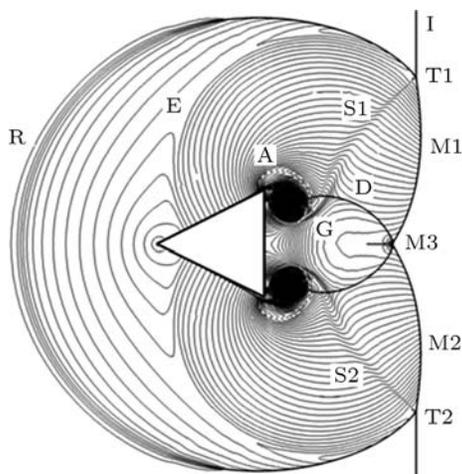


图 4 Schardin 问题的典型波系结构 I, 入射激波; R, 初始反射激波; E, 扇形膨胀波; A, 加速激波; D, 减速激波; M1, M2, M3 马赫杆; S1, S2 滑移线; T1, T2 三波点

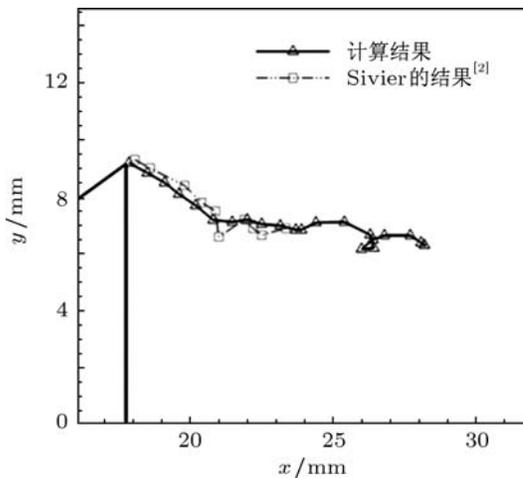


图 5 涡核轨迹对比图

综合图 3 与 4 可知, 入射激波 I 在绕过三角楔并与其相互作用的整个过程中, 整个流场基本呈轴对称, 这与先前实验及数值结果相同<sup>[2,3]</sup>. 首先, 入射激波 I 与三角楔顶点碰撞形成向上游传播的圆形反射激波 R. 随后, 入射激波 I 沿三角楔表面向下游传播, 并在其表面形成马赫反射 (见图 3(a)). 如图 4 所示, 当马赫反射三波点传播至三角楔上、下角顶点时, 马赫杆 (M1, M2) 开始发生绕射与弯曲, 波后熵增降低, 在上、下角形成扇形熵层 G, 熵层延伸至马赫杆绕射区. 同时, 三角楔上、下角分别产生向上游传播的扇形膨胀波 E, 其一端与三波点 (T1, T2) 相连. 此时, 三角楔尾部上、下角处分别形成顺时针与逆时针两个主涡, 并导致上、下滑移线 (S1, S2) 分离为两段, 一段从三角楔斜面出发, 尾端与主涡相连并受其旋转影响而产生拉伸, 另一段则从三波点 (T1, T2) 出发, 尾端呈螺旋形卷入主涡.

图 5 为本文计算的涡核运动轨迹与文献 [2] 的对比. 由于上、下涡对称, 本文以上涡为例. 其中带三角形的实线为本文计算结果, 带方块的虚线为文献 [2] 结果. 可见, 两者的涡核轨迹相符.

### 3.1 激波与主涡相互作用

随着上、下主涡的发展, 其外层受 K-H 不稳定作用, 开始卷吸产生涡串, 同时上、下绕射马赫杆开始在楔尾中部相遇, 发生反射, 随后分别与对应主涡及其外层相互作用 (见图 4).

图 6 为上侧主涡附近的密度等值线图, 清楚地反映了主涡外层的滑移层因受 K-H 不稳定性影响形成序列涡串的详细过程. 由于斜压效应, 入射激波绕过楔角尾端形成顺时针旋转的大涡. 同时, 涡外层存在明显速度间断, 即旋涡外层受 K-H 不稳定<sup>[11,12]</sup>作用出现失稳, 并有多涡卷起 (见图 6(b))

沿主涡外缘发展成为涡串 (见图 6(c)).

图 7 为三角楔上端绕射激波与涡相互作用的初始过程. 此时, 上、下绕射马赫杆碰撞产生的反射激波 R1, 开始与主涡相互作用. 因主涡 V 为顺时针旋转, 反射激波 R1 受其影响开始发生变形 (见图 7(b)), 左半段由于运动方向与主涡旋转方向相同, 得到加速, 形成加速激波 A; 右半段则相反, 形成减速激波 D (见图 7(c)). 当激波穿越主涡时, 最终被剪断, 分裂成单个的加速激波 A 与减速激波 D. 加速激波 A 很快穿越主涡, 并迅速衰减 (见图 7(d)), 减速激波与涡的作用则显得较为复杂. 位于主涡内的激波, 同样因分布在涡核两边, 且因涡旋转而再次变形, 最终断裂为小激波, 涡核右边的小激波 D1 右端与减速激波 D 相连 (见图 7(d)), 同样被减速, 由于惯性的作用, 小激波 D1 继续在涡内顺时针旋转. 而减速激波 D 的主体向上传播并受涡外层影响产生变形, 最终呈 V 字形向上传播 (见图 7(d)).

图 8 为  $t = 0.0015625$  s 时, 三角楔尾部对称轴上密度分布以及沿  $x$  方向的速度分布. 此时, 三角楔尾部旋涡已充分发展, 因此在旋涡区域流场密度和速度受到其卷吸作用而明显下降, 随后因受加速激波 A 影响, 密度和速度均出现波动, 最后在两绕射激波碰撞处 (对应于图 4 中 M3 处) 密度和速度出现明显间断.

### 3.2 激波与涡串的相互作用

以上分析可知, Schardin 问题最终表现为减速激波 D 与主涡外部滑移层上涡串的相互作用. 我们知道, 激波与单涡相互作用可分为四类<sup>[13]</sup>, 而 Schardin 问题中的激波与涡串则属于弱激波与弱涡作用.

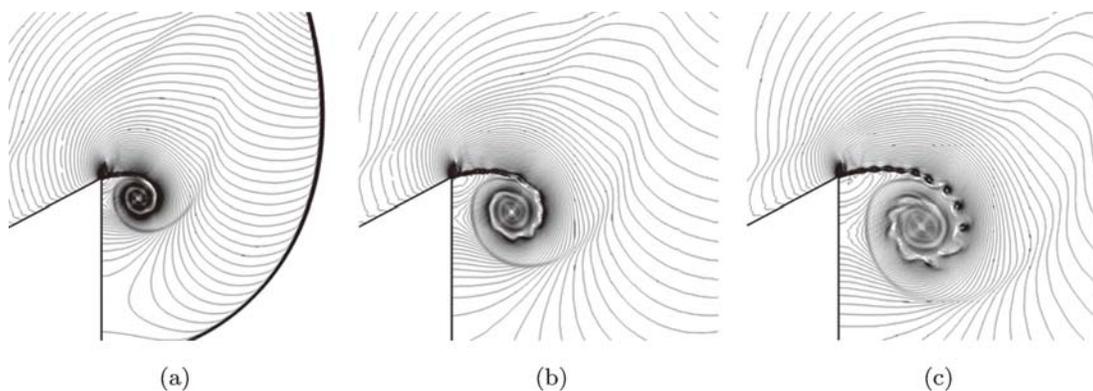


图 6 主涡滑移层上涡串形成过程 (a)  $t = 0.0005375$  s; (b)  $t = 0.00061875$  s; (c)  $t = 0.00070625$  s

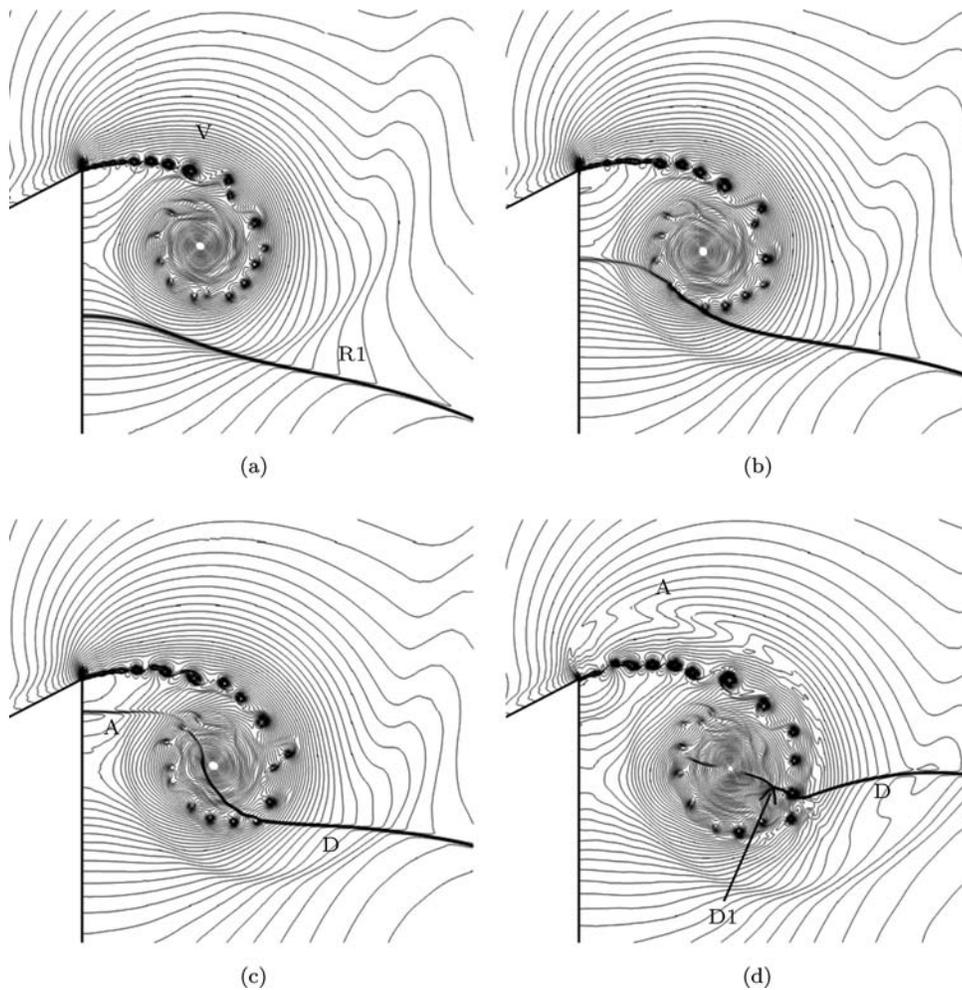


图7 绕射激波与涡相互作用的初始过程 (a)  $t = 0.000875$  s; (b)  $t = 0.00090625$  s; (c)  $t = 0.0009375$  s; (d)  $t = 0.001$  s

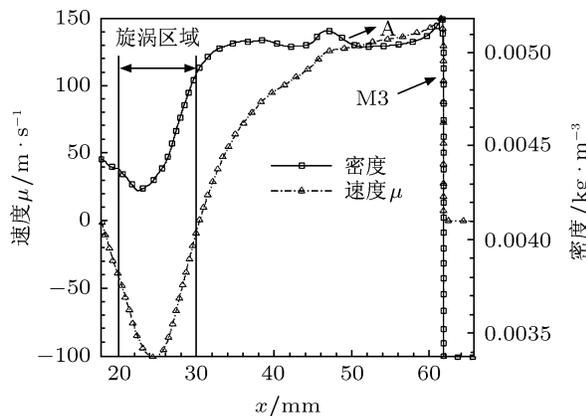


图8  $t = 0.0015625$  s 时三角楔尾部对称轴上的密度与速度分布

为了便于分析,选减速激波 (D1,D) 与涡串中的四个连续小涡 (V1—V4) 作用过程为例,如图9所

示. 其中, 减速激波向上传播, 涡串中的各小涡均为顺时针旋转. 当激波穿过第一个小涡 V1 时, 受到小涡旋转影响, 左半部分开始加速, 右半部则被再次减速 (见图 9(a),(b)), 同时, 旋涡受到拉伸. 当激波与 V1 开始分离时, 激波弯曲并产生常规反射激波 R11, R12 (见图 9(c)), 随后演变成马赫反射并产生两个三波点. 整个作用过程与前人研究相符 [13]. 减速激波与第二个小涡 V2 作用时, 其变形及反射过程与 V1 类似 (见图 9(d)), 产生第二对反射激波 R21, R22, 而紧随其后的小涡 V3, V4 等与激波进行类似作用过程 (见图 9(e),(f)).

减速激波 (D1, D) 与涡串作用过程中, 同样会产生变形 (见图 9). 如在与 V1 作用过程中, 减速激波 D1 的右端因在小涡左侧而受到加速, 然而整个 D1 又同时主涡 (顺时针) 右端被主涡减速, 因此会导致 D1 倾斜度改变, 从最初的向右倾斜 (见图 9(a)) 变成基本平行 (见图 9(f)), 最终为向左倾斜.

减速激波 D 因左端与主涡与小涡相互作用, 受它们顺时针旋转作用而被减速, 因此其左端在整个作用过程中一直被减速, 最终导致 D 向左的倾斜度越来越大. 整个减速激波 (D1 与 D) 在与主涡及外层涡串作用过程中基本呈 V 字形.

相关研究表明, 激波与涡相互作用时还会产生声波 [14], 本文所揭示的 Schardin 问题中减速激波与涡串作用同样会产生序列声波, 而减速激波与单个小涡作用产生声波过程与前人研究结果类似. 前人对激波与涡作用的研究中 [13-15], 常用压差 (压力脉动) 以及膨胀度 (速度散度) 等参量的等势分布来代表声场分布, 为了清晰说明减速激波 D 与主涡滑移层上的涡串作用及其产生声波的过程, 以下采取类似方法进行详细分析.

图 10 为不同时刻减速激波与单涡及涡串相互作用产生声波的过程. 为了清晰说明, 其中左图为示意图, 右图则为对应时刻流场的速度散度图. 其中各涡均为顺时针方向旋转, 减速激波与  $x$  轴呈一定角度 ( $\theta$ ) 斜向上传播, 随着减速激波与涡串作用,  $\theta$  角不断发生变化, 同时减速激波发生变形. 图 10(a) 为初始时刻 ( $t = 0.00093125$  s),  $\theta \approx 30^\circ$  的情况, 此时减速激波与涡串上的第一个涡 (Va) 刚

接触, 激波发生变形, 产生稀疏 - 压缩区域, 随后在稀疏区外产生一个新的压缩区, 同时在压缩区外产生一个新的稀疏区形成第一道四极子声波 (前导声波) 并呈圆形向外扩散. 随着激波与涡作用的加深, 激波进一步变形, 最终产生两道反射激波 Ra1 和 Ra2. 同时由于恢复机理的作用, 激波与涡作用过程会继续产生第二道声波, 同样具有四极子特性, 整个过程与文献 [12] 类似. 随着减速激波的继续传播, 激波与涡串上的第二个涡 Vb 发生作用 (见图 10(b),  $t = 0.00094375$  s), 此时减速激波与 Va 作用产生的两道反射激波 (Ra1, Ra2) 已沿减速激波向两端移动, 而与 Vb 作用产生第二对反射激波 Rb1, Rb2 以及新的声波. 反射激波 Ra2 和 Rb1 之间发生反射, 随后继续向两侧传播.

图 10(c) 为图 9(e) ( $t = 0.00105625$  s) 中流场减速激波与涡串作用产生声波的情况. 可知, 减速激波与三个同向旋转的连续小涡 (见图 9(e), V1—V3) 作用, 产生三组反射激波以及三组声波. 可以预见, 随着时间推移, 减速激波继续向上传播, 与涡串上的弱涡逐个发生作用产生多对反射激波与多组声波.

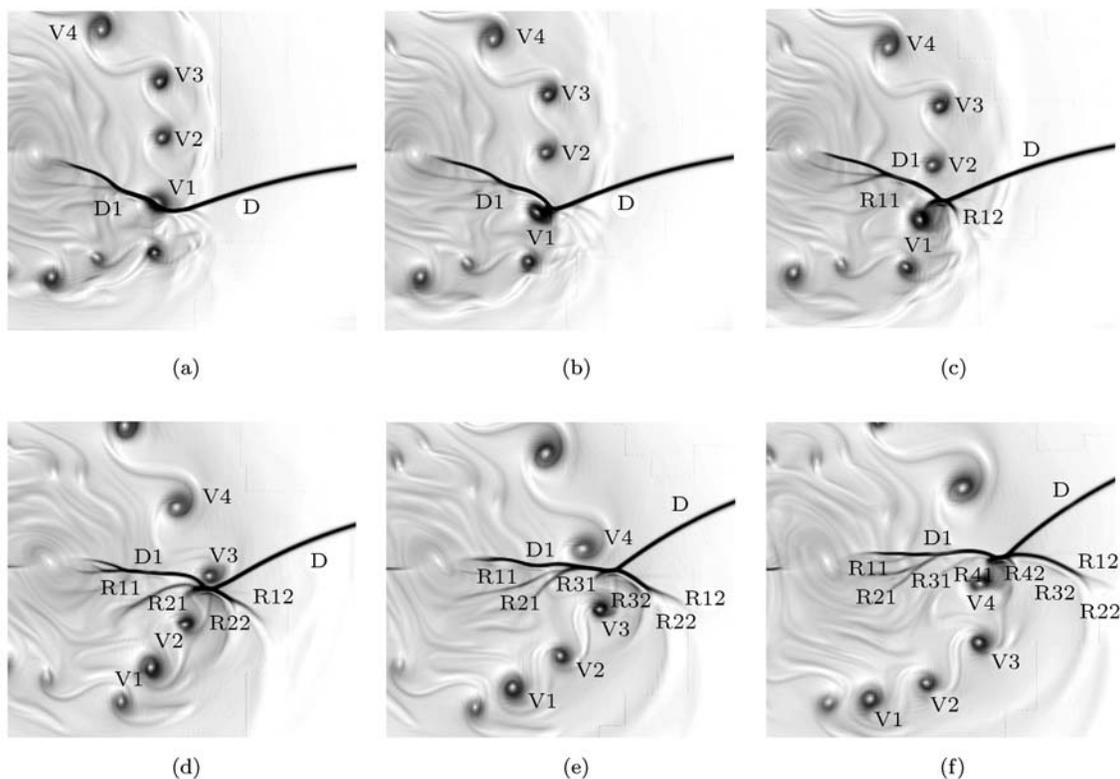


图 9 减速激波与主涡滑移层上涡串的作用过程 (a)  $t = 0.001$  s; (b)  $t = 0.00100625$  s; (c)  $t = 0.001025$  s; (d)  $t = 0.0010375$  s; (e)  $t = 0.00105625$  s; (f)  $t = 0.001075$  s

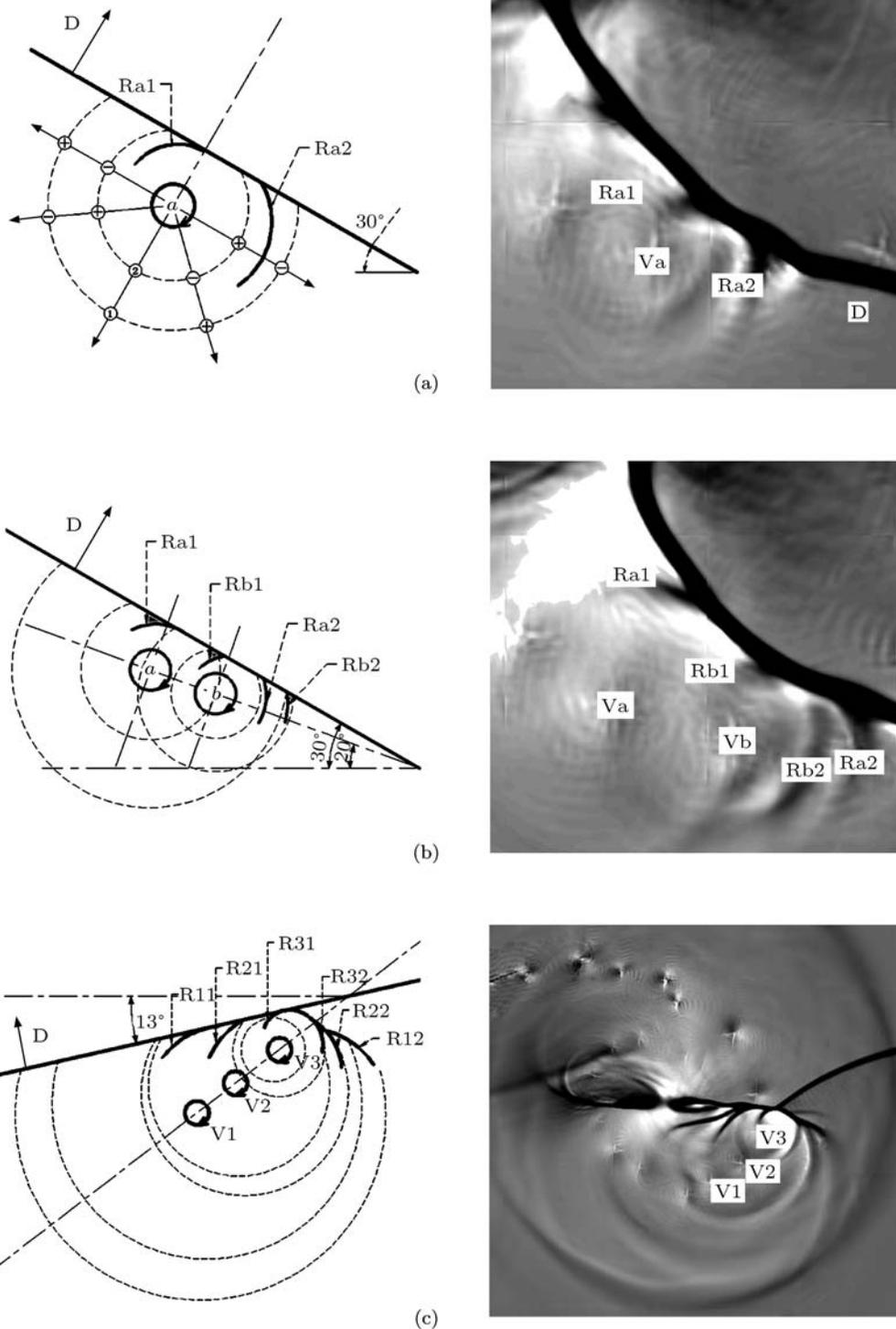


图 10 不同时刻, 激波与单涡及涡串作用产生声波过程 (a) 单涡  $t = 0.00093125$  s; (b) 涡串  $t = 0.00094375$  s; (c) 涡串  $t = 0.00105625$  s; (+ 压缩区, - 稀疏区)

### 4 结论

本文结合高精度 WENO 格式、AMR 及 IBM 方法, 对 Schardin 问题进行了数值模拟. 计算结果与先前相关实验及数值结果完全相符, 准确描述了入射激波与三角楔、楔尾反射激波与主涡相互作用

用过程. 另外, 计算结果清晰地揭示了 Schardin 问题中因主涡滑移层 K-H 不稳定而产生珠状弱涡串的详细过程, 揭示了前人研究所未能反映的关于激波与涡串相互作用过程. 通过本文研究, 得到以下主要结论.

- 1) 绕射马赫杆与主涡的相互作用使绕射激波

分裂成加速和减速激波, 加速激波在穿过主涡滑移层后受低压影响而迅速衰减, 而减速激波则被分成 D 和 D1 两部分, 在整个过程中基本呈 V 形.

2) 减速激波与涡串中的单涡相互作用, 类似于弱激波与弱涡的作用. 减速激波产生变形并导致激波产生两个马赫反射. 而与涡串作用过程则使减速激波产生多次变形, 并生成多个三波点. 最终使减

速激波 D1 的倾斜由向右变为向左, 同时加大 D 的左倾斜.

3) 减速激波与涡串相互作用过程会产生多道声波. 而与其中的单涡作用时, 通过激波变形在涡内形成拉伸与压缩区, 产生两道声波, 且皆呈四极子特性.

- 
- [1] Schardin H 1957 *Photo Sci.* **5** 19
- [2] Sivier S, Loth E, Baum J, Lohner R 1992 *Shock Waves* **2** 31
- [3] Chang S M, Chang K S 2000 *Shock Waves* **10** 333
- [4] Uchiyama N, Inoue O 1995 *AIAA J.* **33** 1740
- [5] Chen Z H, Fan B C, Zhou B M, Li H Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 1077
- [6] Liu X D, Osher S, Chan T 1994 *Comput. Phys.* **115** 200
- [7] Berger M, Colella P 1988 *Comput. Phys.* **82** 64
- [8] Kim J, Kim D, Choi H 2001 *Comput. Phys.* **171** 132
- [9] Dadone A, Grossman B 2002 *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit* Reno, USA, January 14–17, 2002 p1059
- [10] Huang J C, Hsieh T Y, Yang J Y, Takayama K 2008 *Shock Waves* **18** 193
- [11] Charendon S 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Clarendon press) p481
- [12] Wang L F, Teng A P, Ye W H, Fan Z F, Tao Y M, Lin C D, Li Y J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8426 (in Chinese) [王立锋, 滕爱萍, 叶文华, 范征锋, 陶焯晟, 林传栋, 李英骏 2009 物理学报 **58** 8426]
- [13] Chang K S, Chang S M 2004 *Symposium on Interdisciplinary Shock Wave Research* (Japan: Sendai) p22
- [14] Inoue O, Hattori Y 1999 *J. Fluid Mech.* **380** 81
- [15] Grasso F, Pirozzoli S 2000 *Theor. Comp. Fluid Dyn.* **13** 421

# Numerical investigations on the Schardin's problem\*

Sha Sha    Chen Zhi-Hua<sup>†</sup>    Zhang Huan-Hao    Jiang Xiao-Hai

(Key Laboratory of Transient Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(Received 6 May 2011; revised manuscript received 1 July 2011)

## Abstract

When shock waves passes through a triangle wedge (Schardin's problem), some complicated physical phenomena, including shock wave Mach refraction and diffraction, wedge wake, vortexlet, etc. may occur. In this paper, the Schardin's problem is investigated numerically with the combination of the third-order WENO scheme, structured adaptive mesh refinement (AMR) method and immersed boundary method. Our numerical results show clearly the interaction between the incident shock wave and the triangle wedge, the Mach reflection on the wedge surface, its diffraction at the wedge tips, and the induction of the main vortex, which accord excellently with Schardin's experimental and previous numerical results. In addition, our numerical results display in detail the induction process of the vortexlet along the slip layer of the main vortex and the interaction of the shock wave with the vortexlet, and the generation of the serial acoustic waves, which have not been reported in the literature.

**Keywords:** shock waves, vortexlet, WENO scheme, AMR method

**PACS:** 47.85.Gj, 47.40.Nm

---

\* Project supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20103219110037).

<sup>†</sup> E-mail: chenzh@mail.njust.edu.cn