

一级近似下的单模激光增益模型随机共振*

张良英^{1)†} 金国祥²⁾ 曹力³⁾

1) (襄樊学院物理与电子工程学院, 襄樊 441053)

2) (武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室, 武汉 430073)

3) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

(2011年3月21日收到; 2011年7月9日收到修改稿)

把周期信号输入单模激光, 对激光增益模型中的乘法噪声项取一级近似通过计算相关函数得到功率谱, 发现输出信号是洛伦兹型的. 信噪比随抽运噪声强度和量子噪声强度的变化均出现随机共振, 但共振峰对应的噪声强度比零级近似下的小.

关键词: 乘法噪声, 相关函数, 随机共振

PACS: 42.60.Mi, 05.40.-a

1 引言

噪声有两面性, 我们通常看到的是其消极的一面, 噪声的建设性的、积极的一面, 很好地表现在随机共振上. 作为非线性问题的前沿课题之一, 随机共振的研究在理论和实验上都取得了较大进展^[1-16]. 将信号加载到激光辐射源上, 使激光作为传递信息的工具, 激光通讯有广阔的应用前景. 单模激光增益模型描述的激光系统是非线性随机系统, 要得到描述这个系统的非线性随机方程的解析解只能用近似方法, 以往采用的线性化近似方法是将确定论部分在定态光强附近线性化, 而将乘法噪声项用加法噪声代替^[14], 这种方法的好处是容易计算相关函数和功率谱, 但可能丢失由乘法噪声引起的重要物理结果. 本文所做的改进是将乘法噪声项取一级近似, 这样可以保留乘法噪声引起的物理现象. 经过计算相关函数后发现输出功率谱不再是单频周期信号, 而是有一定频率宽度的洛伦兹型信号. 信噪比随抽运噪声强度和量子噪声强度的变化均出现随机共振, 但共振峰对应的噪声强度比零级近似情况下的小.

2 一级近似下的单模激光增益模型

单模激光增益模型输入周期信号后的光强方

程为

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}\xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) + A\cos(\Omega t). \quad (1)$$

噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质为

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(s) \rangle = Q\delta(t-s), \\ \langle \eta(t)\eta(s) \rangle = D\delta(t-s), \quad (2)$$

$$\langle \xi(s)\eta(t) \rangle = \langle \xi(t)\eta(s) \rangle = \lambda\sqrt{DQ}\delta(t-s), \quad (-1 \leq \lambda \leq 1).$$

(1) 式中 I 为激光光强; λ 为噪声关联强度; Q, D 分别为抽运噪声和量子噪声强度; $\beta = \frac{\tilde{A}}{I}$, \tilde{A} 和 Γ 分别为自饱和系数和增益系数; K 为损失系数; A 为信号振幅; Ω 为信号频率. 为了解析求解 (1) 式, 以往采用 Hernandez 等人提出的加法噪声线性化近似^[14], 其要点是将 (1) 式的确定论部分 (即右边头两项) 在确定论定态光强

$$I_0 = \frac{\Gamma - K}{\beta K}$$

附近线性化, 即令

$$I = I_0 + \varepsilon(t),$$

代入 (1) 式中的确定论部分, 保留 $\varepsilon(t)$ 的一级项, 而对随机部分则将 I 近似为 I_0 , 数学上就是将乘法噪

* 国家自然科学基金 (批准号: 11045004) 和湖北省教育厅科研基金重点项目 (批准号: D20101506) 资助的课题.

† E-mail: ly850@sohu.com

声项用加法噪声项代替, 则 (1) 式近似为

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma\varepsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1 + \beta I_0}\xi(t) + 2\sqrt{I_0}\eta(t) + A \cos(\Omega t), \quad (3)$$

式中 $\varepsilon(t)$ 为微扰项, $\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma$.

(3) 式相当于对 (1) 式的随机项取 $\varepsilon(t)$ 的零级近似. 由于这一近似是把乘法噪声驱动的 (1) 式近似为加法噪声驱动的 (3) 式, 故文献中称之为加法噪声线性化近似. 下面简单地称之为“零级近似”, 以突出和本文提出的“一级近似”的本质差异. 本文所做的改进是对 (1) 式中的随机部分也保留 $\varepsilon(t)$ 的一级项, 故称之为一级近似模型, 物理上就是这一近似仍保留乘法噪声驱动这一特点. 具体做法是对随机部分用泰勒级数在 I_0 点展开并保留 $\varepsilon(t)$ 的一级项, 则 (1) 式成为

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma\varepsilon(t) + D + \left(\frac{2I_0}{1 + \beta I_0} + \frac{2\varepsilon}{(1 + \beta I_0)^2} \right) \xi(t) + \left(2\sqrt{I_0} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{I_0}} \right) \eta(t) + A \cos(\Omega t). \quad (4)$$

(4) 式就是本文提出的一级近似下的单模激光增益模型, 它比零级近似模型多出两个乘法噪声项. 为求解方便, 下面引入复合噪声 $\eta'(t)$ 和 $\xi'(t)$, 它们是高斯噪声 $\eta(t)$ 和 $\xi(t)$ 的线性组合, 故也是高斯噪声. 令

$$\eta'(t) = \frac{2}{(1 + \beta I_0)^2} \xi(t) + \frac{1}{\sqrt{I_0}} \eta(t),$$

$$\xi'(t) = \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(t) + 2\sqrt{I_0} \eta(t),$$

则 (4) 式写成

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma\varepsilon(t) + D + \xi'(t) + \varepsilon(t)\eta'(t)$$

$$+ A \cos(\Omega t). \quad (5)$$

噪声 $\xi'(t)$ 和 $\eta'(t)$ 的统计性质由 (2) 式可算出为

$$\langle \xi'(t) \rangle = \langle \eta'(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \eta'(t)\eta'(s) \rangle = D_0\delta(t - s),$$

$$\langle \xi'(t)\xi'(s) \rangle = Q_0\delta(t - s),$$

$$\langle \xi'(t)\eta'(s) \rangle = \langle \eta'(t)\xi'(s) \rangle = Q'\delta(t - s),$$

其中

$$D_0 = \frac{4Q}{(1 + \beta I_0)^4} + \frac{4\lambda\sqrt{DQ}}{\sqrt{I_0}(1 + \beta I_0)^2} + \frac{D}{I_0},$$

$$Q_0 = \frac{4QI_0^2}{(1 + \beta I_0)^2} + \frac{8I_0^{3/2}\lambda\sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)} + 4I_0D,$$

$$Q' = \frac{4QI_0}{(1 + \beta I_0)^3} + \frac{2(I_0^{1/2} + \beta I_0^{3/2})\lambda\sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)^2} + 2D. \quad (6)$$

设 $t = 0$ 时 $\varepsilon(0) = 0$, (4) 式的形式解为

$$\varepsilon(t) = \int_0^t [D + \xi'(s) + A \cos(\Omega s)] e^{\int_s^t (-\gamma + \eta'(s')) ds'} ds, \quad (7)$$

3 输出功率谱及信噪比

根据平均光强相关函数的定义

$$C(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\Omega}} \langle I(\zeta + \tau)I(\zeta) \rangle d\zeta$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\Omega}} \langle (I_0^2 + I_0\varepsilon(\zeta) + I_0\varepsilon(\zeta + \tau) + \varepsilon(\zeta)\varepsilon(\zeta + \tau)) \rangle d\zeta.$$

由 (6) 和 (7) 式得到平均光强相关函数为

$$C(\tau) = \frac{(2DQ' + Q'^2 + D^2)e^{-D_0|\tau|}}{\left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right)\left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)} - \frac{D_0(2DQ' + Q'^2 + D^2)e^{-(\gamma - \frac{D_0}{2})|\tau|}}{2(\gamma - D_0)\left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right)\left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)}$$

$$+ \frac{Q_0e^{-(\gamma - \frac{D_0}{2})|\tau|}}{2(\gamma - D_0)} + \frac{A^2 \left[D_0\Omega^2 - D_0 \left(\gamma - \frac{3D_0}{2} \right) \left(\gamma - \frac{D_0}{2} \right) \right] e^{-(\gamma - \frac{D_0}{2})|\tau|}}{4(\gamma - D_0) \left[\left(\gamma - \frac{3D_0}{2} \right)^2 + \Omega^2 \right] \left[\left(\gamma - \frac{D_0}{2} \right)^2 + \Omega^2 \right]}$$

$$+ \frac{A^2 e^{-D_0|\tau|} \sqrt{\left[\Omega^2 + \left(\gamma - \frac{3D_0}{2} \right) \left(\gamma - \frac{D_0}{2} \right) \right]^2 + (\Omega D_0)^2 \cos(\Omega\tau + \varphi)}}{2 \left[\left(\gamma - \frac{3D_0}{2} \right)^2 + \Omega^2 \right] \left[\left(\gamma - \frac{D_0}{2} \right)^2 + \Omega^2 \right]} + \frac{(2D + Q')I_0}{\left(\gamma - \frac{1}{2}D_0\right)} + I_0^2, \quad (8)$$

式中的

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\Omega D_0}{\Omega^2 + \left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right) \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)} \right).$$

在 (8) 式的计算中设 $\left(\gamma - \frac{3}{2}D_0\right) > 0$, 并用到了以下公式^[15]:

$$\begin{aligned} \langle e^{a \int_s^t \eta'(s') ds'} \rangle &= e^{\frac{1}{2}a^2 D_0(t-s)}, \\ \langle \xi'(s) e^{a \int_s^t \eta'(s') ds'} \rangle &= \frac{aQ'}{2} e^{\frac{1}{2}a^2 D_0(t-s)}, \\ \langle e^{a \int_0^t \zeta(s) ds} e^{a \int_0^{t+\tau} \zeta(t) dt} \rangle &= e^{2a^2 D_0 t} e^{\frac{1}{2}a^2 D_0 \tau}, \\ \langle \xi'(s_1) e^{a \int_{s_1}^t \eta'(s') ds'} e^{a \int_{s_2}^t \eta'(s') ds'} \rangle &= \frac{aQ'}{2} e^{\frac{1}{2}a^2 D_0(s_2-s_1)} e^{2a^2 D_0(t-s_2)}, \quad (s_2 > s_1), \\ \langle \xi'(s_1) \xi'(s_2) e^{a \int_{s_1}^t \eta'(s') ds'} e^{a \int_{s_2}^t \eta'(s') ds'} \rangle &= (Q_0 \delta(s_1 - s_2) + Q'^2) e^{\frac{1}{2}a^2 D_0(s_2-s_1)} e^{2a^2 D_0(t-s_2)}, \quad (s_2 > s_1). \end{aligned}$$

对 (8) 式的平均光强相关函数进行傅里叶变换, 得到光强功率谱为

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega), \quad (9)$$

$S_1(\omega)$ 为输出信号功率谱 (只取正 ω 的谱), $S_2(\omega)$ 为输出噪声功率谱. $S_1(\omega)$ 和 $S_2(\omega)$ 的具体表达式分别为

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \frac{A^2 \sqrt{\left[\Omega^2 + \left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right) \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)\right]^2 + (\Omega D_0)^2 D_0}}{2 \left[\left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right)^2 + \Omega^2\right] \left[\left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)^2 + \Omega^2\right] [D_0^2 + (\omega - \Omega)^2]}, \\ S_2(\omega) &= \frac{2(2DQ' + Q'^2 + D^2)D_0}{\left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right) \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right) (D_0^2 + \omega^2)} - \frac{D_0(2DQ' + Q'^2 + D^2) \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)}{\left(\gamma - D_0\right) \left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right) \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right) \left[\left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)^2 + \omega^2\right]} \\ &\quad + \frac{Q_0 \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)}{\left(\gamma - D_0\right) \left[\left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)^2 + \omega^2\right]} \\ &\quad + \frac{A^2 \left[D_0 \Omega^2 - D_0 \left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right) \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)\right] \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)}{2(\gamma - D_0) \left[\left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right)^2 + \Omega^2\right] \left[\left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)^2 + \Omega^2\right] \left[\left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)^2 + \omega^2\right]}. \end{aligned}$$

输出信号功率谱 $S_1(\omega)$ 不是正弦信号, 而是以 Ω 为中心且有一定频率宽度的洛伦兹信号, 输出信号总功率为

$$P_s = \int_0^\infty S_1(\omega) d\omega = \frac{A^2 \sqrt{\left[\Omega^2 + \left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right) \left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)\right]^2 + (\Omega D_0)^2} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctan} \frac{\Omega}{D_0}\right)}{2 \left[\left(\gamma - \frac{3D_0}{2}\right)^2 + \Omega^2\right] \left[\left(\gamma - \frac{D_0}{2}\right)^2 + \Omega^2\right]}.$$

信噪比定义为输出信号总功率与信号频率处单位噪声谱的平均功率之比

$$R = \frac{P_s}{S_2(\omega = \Omega)}. \quad (10)$$

把(6)式中的 D_0, Q_0, Q' 代入(10)式后可得到一级近似单模激光增益模型的信噪比 R 与量子噪声强度 D 和抽运噪声强度 Q 的函数关系. 如果是零级近似, (10) 式中只有 Q_0 , 则得到用加法噪声线性化近似的信噪比 R' 与量子噪声强度 D 和抽运噪声强度 Q 的函数关系为

$$R' = \frac{\pi A^2}{2 \left(\frac{4QI_0^2}{(1 + \beta I_0)^2} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)} + 4I_0 D \right)}. \quad (11)$$

4 两种近似情况下随机共振的比较

4.1 信噪比随抽运噪声强度 Q 的变化

图 1(a) 是以噪声关联强度 λ 为参数, 根据(10)式计算得到的 R - Q 曲线, 图中显示 $\lambda \geq 0$ 时信噪比随抽运噪声强度的增大单调下降, λ 为负并且绝对值大于一定值时, R - Q 曲线出现一个共振峰, λ 的

绝对值增大, 峰值增高, 峰值位置向右移动.

图 1(b) 是以噪声关联强度 λ 为参数, 根据(11)式计算得到的 R' - Q 曲线, 图中显示 $\lambda \geq 0$ 时信噪比随抽运噪声强度的增大单调下降, λ 为负并且绝对值大于一定值时, R' - Q 曲线出现一个共振峰, λ 的绝对值增大, 峰值增高, 峰值位置向右移动.

图 1(a) 和 (b) 表明, 一级近似情况下较小的抽运噪声就能产生随机共振.

4.2 信噪比随量子噪声强度 D 的变化

图 2(a) 是以噪声关联强度 λ 为参数, 根据(10)式计算得到的 R - D 曲线, 图中显示 $\lambda \geq 0$ 时信噪比随量子噪声强度的增大单调下降, λ 为负并且绝对值大于一定值时信噪比随 D 的增大出现一个共振峰, λ 的绝对值增大, 峰值增高, 峰值位置向右移动.

图 2(b) 是以噪声关联强度 λ 为参数, 根据(11)式计算得到的 R' - D 曲线, 图中显示 $\lambda \geq 0$ 时信噪比随量子噪声强度的增大单调下降, λ 为负并且绝对值大于一定值时信噪比随 D 的增大出现一个共振峰, λ 的绝对值增大, 峰值增高, 峰值位置向右移动.

图 2(a) 和 (b) 表明, 一级近似情况下较小的量子噪声就能产生随机共振.

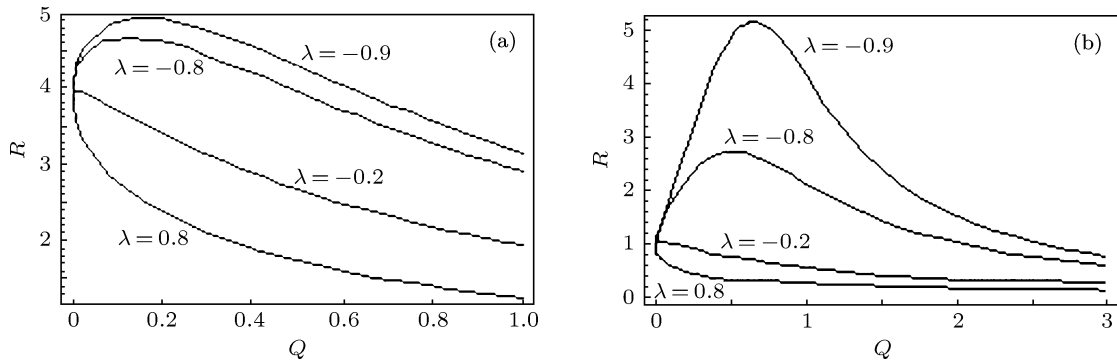


图 1 (a) 一级近似下的信噪比随抽运噪声强度的变化; (b) 零级近似下的信噪比随抽运噪声强度的变化 ($A = 1, \beta = 1, I_0 = 1, \gamma = 50, D = 0.2, \Omega = 30$)

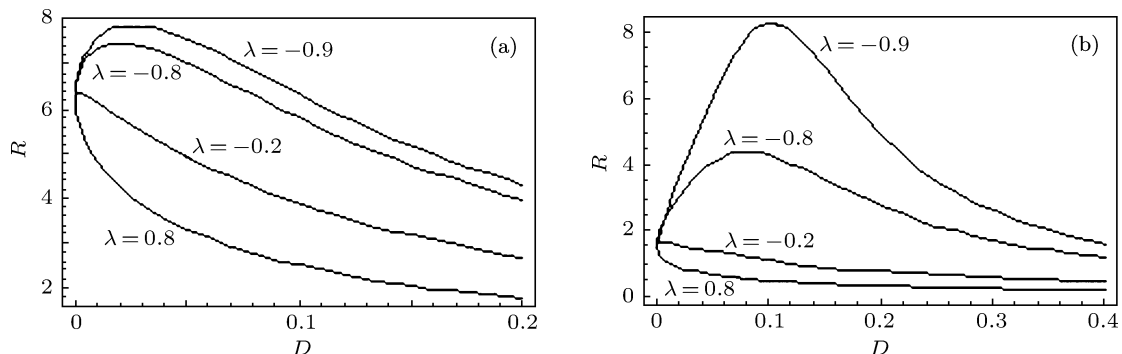


图 2 (a) 一级近似下的信噪比随量子噪声强度的变化; (b) 零级近似下的信噪比随量子噪声强度的变化 ($A = 1, \beta = 1, I_0 = 1, \gamma = 50, Q = 0.5, \Omega = 30$)

5 结论

1. 在一级近似和零级近似两种情况下, 两噪声互为负关联且绝对值大于一定值时均会出现随机共振, 但一级近似下出现随机共振的噪声强度小于零级近似下出现随机共振的噪声强度. 物理原因是一级近似考虑了光强和两个噪声的相互作用, 使 γ

的值变小, 所以出现共振的噪声强度变小.

2. 一级近似下的输出功率谱出现了零级近似所没有的新现象: 输出信号功率谱不再是单一的周期信号, 而是以信号频率 Ω 为中心且有一定频率宽度的洛伦兹信号. 物理原因是一级近似考虑了光强中的信号和两个噪声相互作用, 零级近似将 I 近似为 I_0 后忽略了这种相互作用.

-
- [1] Zhang L Y, Cao L, Wu D J, Wang J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 25
 [2] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0952
 [3] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1201
 [4] Mcnamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
 [5] Barykin A V, Seki K 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6555
 [6] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
 [7] Li J L, Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
 [8] Lin M, Huang Y M 2006 *Proc. of the CSEE* **26** 128 (in Chinese) [林敏, 黄咏梅 2006 中国电机工程学报 **26** 128]
 [9] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉, 刘立, 曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
 [10] Lin M, Meng Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3627 (in Chinese) [林敏, 孟莹 2010 物理学报 **59** 3627]
 [11] Zhang L B, Zhang L Y 2009 *Measurement & Control Technology* **28** 89 (in Chinese) [张良斌, 张良英 2009 测控技术 **28** 89]
 [12] Zhang X B, Dong H Y, Xuan Z L 2008 *Applied Acoustics* **27** 283 (in Chinese) [张晓兵, 董华玉, 玄兆林 2008 应用声学 **27** 283]
 [13] Fulinski A, Gora P F 2000 *Journal of Statistical Physics* **101** 483
 [14] Hernandez-Garcia E, Toral R, San Miguel M 1990 *Phys. Rev. A* **42** 6823
 [15] Zang L Y, Cao L, Wu D J 2009 *Communications in Theoretical Physics* **52** 143
 [16] Zang X Y, Xu W, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060514 (in Chinese) [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2011 物理学报 **60** 060514]

Stochastic resonance in a gain-noise model of single-mode laser under the first-order approximation*

Zhang Liang-Ying¹⁾ Jin Guo-Xiang²⁾ Cao Li³⁾

1) (*School of Physics and Electronic Engineering, Xiangfan University, Xiangfan 441053, China*)

2) (*Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China*)

3) (*School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

(Received 21 March 2011; revised manuscript received 19 July 2011)

Abstract

By adding periodic signal into single-mode laser, and taking the first-order approximation to the multiplication noise of the laser gain-noise model, we find that the output signal is of the Lorentz type when we obtain power spectrum by calculating the correlated function. The signal-to-noise ratio shows the stochastic resonance occurs with the variations of intensities of the pump noise and quantum noise, and the noise intensity of resonant peak is smaller than that under the zeroth approximation.

Keywords: multiplication noise, correlated function, stochastic resonance

PACS: 42.60.Mi, 05.40. - a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11045004), and the Key project Scientific Research Foundation from the Education Department of Hubei Province of Chain (Grant No. D20101506).

† E-mail: ly850@sohu.com