

厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动非线性扰动模型 孤子的渐近解法*

林万涛^{1)†} 陈丽华²⁾ 欧阳成³⁾ 莫嘉琪³⁾⁴⁾

1) (中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

2) (福建师范大学福清分校数学与计算机科学系, 福清 350300)

3) (湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

4) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2011年8月9日收到; 2011年12月20日收到修改稿)

研究了一类厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动 (ENSO) 随机扰动模型. 首先, 利用特殊的待定系数方法得到了无扰动 ENSO 模型下的孤子精确解. 然后利用渐近理论和方法构造了随机扰动 ENSO 模型的近似解, 并举例说明得到的渐近解具有较好的精度.

关键词: 孤子, 渐近方法, 厄尔尼诺/拉尼娜现象

PACS: 02.30.Mv

1 引言

厄尔尼诺/拉尼娜和南方涛动 (ENSO) 是分别发生在热带大气和海洋中的异常事件. 针对 ENSO 事件所讨论的模型是影响全球气候表象的一个复杂的大尺度非线性海洋-大气耦合模型, ENSO 事件的发生严重地影响着全球气候和生态等方面的变化. 许多学者用各种方法对它的局部和整体性态作了探讨, 如自忆性原理方法、Fokker-Plank 方法、高阶奇异谱分析方法等, 并将研究结果应用于预报性研究等方面^[1-3].

目前, 非线性渐近理论和方法在学术界是一个十分热门的研究领域^[4-7], 许多学者做了大量工作^[8-10], 文献^[11-16]也讨论了一类微分方程的边值问题、反应扩散问题、奇摄动冲击层解非线性孤波解等.

本文讨论一类大气物理中海-气现象的 ENSO 模型, 在一定的条件下, 从数学角度研究了该模

型本身的不稳定性, 并利用特殊方法较简捷地得到了相应非线性模型解的任意次近似的渐近展开式^[4-7].

考虑如下 ENSO 随机扰动模型^[4]:

$$\frac{dT}{dt} = a_1 T - a_2 \mu h + \sqrt{2/3} T(T - \mu h) + f(T, h), \quad (1)$$

$$\frac{dh}{dt} = b(2h - T) + g(T, h). \quad (2)$$

这里 T 为海表温度; h 为温跃层厚度;

$$a_1 = \Delta \bar{T}'_z + \Delta \bar{T}'_x - \alpha'_s,$$

$$a_2 = \Delta \bar{T}'_x,$$

其中 $\Delta \bar{T}'_z$ 和 $\Delta \bar{T}'_x$ 为无量纲状态系数, α'_s 为海表温度 Newton 冷却系数; b 为有关气-海函数的无量纲系数; μ 为量度温跃层位移效应的系数; f 和 g 分别为关于海表温度和温跃层厚度随机因素而产生的扰动函数, 并设它们是充分光滑的函数. 我们将得

* 国家自然科学基金 (批准号: 40876010, 11071205)、中国科学院战略性先导研究计划 (批准号: XDA01020304)、浙江省自然科学基金 (批准号: Y6110502)、福建省教育厅自然科学基金 (批准号: JA10288) 和安徽教育厅自然科学基金 (批准号: KJ2011A135) 资助的课题.

† E-mail: linwt@lasg.iap.ac.cn

到扰动模型 (1), (2) 式的孤波渐近解.

当 $\mu a_2 > 2a_1$, $b > 0$ 时, ENSO 模型 (1), (2) 式就成为线性齐次系统, 系统的零解为不稳定鞍点. 而当非线性随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式中非线性项满足一定条件时, 可以判定其奇解仍不稳定.

在大气物理问题中, 我们往往对模型的不稳定孤子解感兴趣. 因为不稳定孤子解的出现, 预示着大气系统将会给人类带来不同程度的灾害. 为此, 下面探讨随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式相应的渐近孤子解.

2 无随机扰动的孤波精确解

在无随机扰动的情形下, ENSO 模型 (1), (2) 式可表示为

$$\frac{dT}{dt} = a_1 T - a_2 \mu h + \sqrt{2/3} T (T - \mu h), \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = b(2h - T). \quad (4)$$

本文采用特殊的待定系数方法来寻找 ENSO 模型 (3), (4) 式具有如下形式的 (孤子) 解:

$$T = A_0 + A_1 v + B_0(1 + v^2)^{1/2}, \quad (5)$$

$$h = C_0 + C_1 v + D_0(1 + v^2)^{1/2}, \quad (6)$$

其中 A_t , C_i ($i = 0, 1, 2$), B_0 , D_0 为常数, 而 v 满足方程

$$\frac{dv}{dt} = (1 + v^2)^{1/2}. \quad (7)$$

不难知道, 方程 (7) 的解为

$$v = \sinh t. \quad (8)$$

由 (5)—(7) 式, 有

$$T_t = A_1(1 + v^2)^{1/2} + B_0 v,$$

$$h_t = C_1(1 + v^2)^{1/2} + D_0 v.$$

将上述表达式和 (5), (6) 式代入 (3), (4) 式, 可得

$$\begin{aligned} & A_1(1 + v^2)^{1/2} + B_0 v \\ &= a_1(A_0 + A_1 v + B_0(1 + v^2)^{1/2}) \\ & - a_2 \mu(C_0 + C_1 v + D_0(1 + v^2)^{1/2}) \\ & + \sqrt{2/3}(A_0 + A_1 v + B_0(1 + v^2)^{1/2}) \\ & \times [A_0 + A_1 v + B_0(1 + v^2)^{1/2} \\ & - \mu(C_0 + C_1 v + D_0(1 + v^2)^{1/2})], \quad (9) \\ & C_1(1 + v^2)^{1/2} + D_0 v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= b(2C_0 + 2C_1 v + 2D_0(1 + v^2)^{1/2} \\ & - A_0 - A_1 v - B_0(1 + v^2)^{1/2}). \quad (10) \end{aligned}$$

在 (9), (10) 式中, 合并 v^i ($i = 0, 1, 2$) 和 $v^i(1 + v^2)$ ($i = 0, 1$) 的项, 并令其系数为零, 可得

$$\begin{aligned} & a_1 A_0 - a_2 \mu C_0 + \sqrt{2/3} A_0 (A_0 - \mu C_0) \\ & + B_0 (B_0 - \mu D_0) = 0, \\ & -k B_0 + a_1 A_1 - a_2 \mu C_1 + \sqrt{2/3} A_0 (A_1 - \mu C_1) \\ & + \sqrt{2/3} A_1 (A_0 - \mu C_0) = 0, \\ & B_0 (B_0 - \mu D_0) = 0, \\ & -k A_1 + a_1 B_0 - a_2 \mu D_0 + \sqrt{2/3} B_0 (A_0 - \mu C_0) \\ & + \sqrt{2/3} A_0 (B_0 - \mu D_0) = 0, \\ & \sqrt{2/3} B_0 (A_1 - \mu C_1) + \sqrt{2/3} A_1 (B_0 - \mu D_0) = 0, \\ & 2b C_0 - A_0 = 0, \\ & D_0 - 2b C_1 + A_1 = 0, \\ & C_1 - 2b D_0 + B_0 = 0. \end{aligned}$$

由以上各式可解得

$$A_0 = \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1 b}{2b\sqrt{2/3}b}, \quad (11)$$

$$A_1 = B_0 = C, \quad (12)$$

$$C_0 = \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1 b}{4b^2\sqrt{2/3}b}, \quad (13)$$

$$C_1 = D_0 = \frac{(2b + k)C}{4b^2 - k^2}, \quad (14)$$

其中 C 为任意常数.

将 (11)—(14) 式代入 (5), (6) 式, 并考虑到 (8) 式, 我们便得到 ENSO 模型 (3), (4) 式的孤子精确解

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1 b}{2b\sqrt{2/3}b} \\ &+ C(\sinh t + \cosh t), \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1 b}{4b^2\sqrt{2/3}b} \\ &+ \frac{(2b + k)C}{4b^2 - k^2}(\sinh t + \cosh t). \quad (16) \end{aligned}$$

3 随机扰动模型的孤波渐近解

下面讨论随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式. 在一般情形下, 模型 (1), (2) 式没有初等函数形式的精确解. 因此, 我们用渐近方法来求随机扰动 ENSO

模型 (1), (2) 式的近似解. 设

$$T(t, p) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) p^i, \quad (17)$$

$$h(t, p) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(t) p^i, \quad (18)$$

并引入映射 $H_i(T, h, p): R^2 \times I \rightarrow R (i = 1, 2)$,

$$H_i(T, h, p) = L_i(T, h) - L_i(\tilde{T}, \tilde{h}) + p[L_i(\tilde{T}, \tilde{h}) - N_i(T, h)] \quad (i = 1, 2), \quad (19)$$

其中 $R = (-\infty, +\infty)$, $I = [0, 1]$, p 为求渐近解而加入的参数, $\tilde{T}, \tilde{h}$ 为随机扰动模型 (1), (2) 式的一组初始近似, 而算子 $L_i, N_i (i = 1, 2)$ 可分别表示为

$$L_1(T, h) = \frac{dT}{dt} - a_1 T + a_2 \mu h,$$

$$L_2(T, h) = \frac{dh}{dt} - b(2h - T),$$

$$N_1(T, h) = -\sqrt{2/3} T(T - \mu h) - f(T, h),$$

$$N_2(T, h) = -g(T, h).$$

显然, 由关系式 (14) 的映射式可以看出, $H_i(T, h, 1) = 0 (i = 1, 2)$ 与系统 (1), (2) 式相同, 故随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式的解 $(T(t), h(t))$ 就是方程 $H_i(T, h, p) = 0 (i = 1, 2)$ 当 $p \rightarrow 1$ 的解.

选取随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式的初始近似 $(\tilde{T}, \tilde{h})$ 为由 (15), (16) 式决定的无随机扰动的 ENSO 模型 (3), (4) 式的一组孤子解 $(\bar{T}, \bar{h})$, 即

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t) &= \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1 b}{2b\sqrt{2/3}b} \\ &\quad + C(\sinh t + \cosh t), \\ \tilde{h}(t) &= \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1 b}{4b^2\sqrt{2/3}b} \\ &\quad + \frac{(2b + k)C}{4b^2 - k^2}(\sinh t + \cosh t). \end{aligned}$$

再由 (17), (18) 式和 $H_i(T, h, p) = 0 (i = 1, 2)$, 令 $p = 0$, 于是有

$$\begin{aligned} T_0(t) &= \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1 b}{2b\sqrt{2/3}b} \\ &\quad + C(\sinh t + \cosh t), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1 b}{4b^2\sqrt{2/3}b} \\ &\quad + \frac{(2b + k)C}{4b^2 - k^2}(\sinh t + \cosh t). \end{aligned} \quad (21)$$

为了求得随机 ENSO 模型 (1), (2) 式的更高阶近似, 将 (17), (18) 式代入 (19) 式, 合并 $p^i (i = 1, 2, \dots)$ 的同次幂, 并使方程 $H_i(T, h, p) = 0 (i = 1, 2)$ 两边同次幂的系数相等, 就有

$$L_1(T_1, h_1) = f(T_0, h_0), \quad (22)$$

$$L_2(T_1, h_1) = g(T_0, h_0),$$

$$L_1(T_i, h_i) = F_i(t), \quad (23)$$

$$L_2(T_i, h_i) = G_i(t) \quad (i = 2, 3, \dots),$$

其中

$$\begin{aligned} F_i(t) &= - \left[\frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial p^{i-1}} \left(\sqrt{2/3} \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) p^i \right. \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) p^i - \mu \sum_{i=0}^{\infty} h_i(t) p^i \right) \\ &\quad \left. \left. + f \left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) p^i, \sum_{i=0}^{\infty} h_i(t) p^i \right) \right) \right]_{p=0}, \\ G_i(t) &= - \left[\frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial p^{i-1}} \right. \\ &\quad \left. \times g \left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) p^i, \sum_{i=0}^{\infty} h_i(t) p^i \right) \right]_{p=0} \end{aligned}$$

为逐次已知的函数. 由 (22), (23) 式并令初始值为零, 依次可得 $(T_i(t), h_i(t)) (i = 1, 2, \dots)$, 即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_1(t) \\ h_1(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 t) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 t) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 t) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \int_0^t \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 \tau) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 \tau) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 \tau) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 \tau) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(T_0(\tau), h_0(\tau)) \\ g(T_0(\tau), h_0(\tau)) \end{pmatrix} d\tau, \\ \begin{pmatrix} T_i(t) \\ h_i(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 t) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 t) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 t) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\times \int_0^t \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 \tau) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 \tau) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 \tau) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 \tau) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_i(\tau) \\ G_i(\tau) \end{pmatrix} d\tau \quad (i = 2, 3, \dots), \quad (25)$$

其中 $T_0(t), h_0(t)$ 由 (20), (21) 式表示, 而

$$\lambda_i = \frac{1}{2}(a_1 + 2b) \pm \sqrt{(a_1 + 2b)^2 + 4b(\mu a_2 - 2a_1)} \quad (i = 1, 2). \quad (26)$$

综上所述, 由 (17), (18) 式可得随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式的 m 次孤子近似解 $(\tilde{T}_m(t), \tilde{h}_m(t))$ 为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{T}_m(t) \\ \tilde{h}_m(t) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1b}{2b\sqrt{2/3}b} + C(\sinh t + \cosh t) \\ \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1b}{4b^2\sqrt{2/3}b} + \frac{(2b+k)C}{4b^2 - k^2}(\sinh t + \cosh t) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 t) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 t) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 t) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \\ & \times \int_0^t \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 \tau) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 \tau) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 \tau) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 \tau) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(T_0(\tau), h_0(\tau)) \\ g(T_0(\tau), h_0(\tau)) \end{pmatrix} d\tau \\ & + \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 t) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 t) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 t) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \\ & \times \int_0^t \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 \tau) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 \tau) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 \tau) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 \tau) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m F_i(\tau) \\ \sum_{i=1}^m G_i(\tau) \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

当 f, g 取适当的值时, 我们还可进一步得知^[5]

$$\begin{pmatrix} T(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{T}_m(t) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{h}_m(t) \end{pmatrix}$$

就是随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式的孤子精确解.

4 应用举例

在随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式中, 不妨设扰动项为 $f = \varepsilon T^3, g = \varepsilon h^3$, 其中 ε 为正的小参数. 这时模型 (1), (2) 式可表示为

$$\frac{dT}{dt} = a_1 T - a_2 \mu h + \sqrt{2/3} T(T - \mu h) + \varepsilon T^3, \quad (28)$$

$$\frac{dh}{dt} = b(2h - T) + \varepsilon h, \quad (29)$$

由 (27) 式可得随机扰动 ENSO 模型 (28), (29) 式的二次孤子近似解 $(\tilde{T}_2(t), \tilde{h}_2(t))$ 为

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_2(t) \\ \tilde{h}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1b}{2b\sqrt{2/3}b} + C(\sinh t + \cosh t) \\ \frac{(a_2 + \sqrt{2/3})\mu - 2a_1b}{4b^2\sqrt{2/3}b} + \frac{(2b+k)C}{4b^2 - k^2}(\sinh t + \cosh t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 t) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 t) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 t) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \\
& \times \int_0^t \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 \tau) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 \tau) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 \tau) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 \tau) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_0^3(\tau) \\ h_0^3(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
& + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 t) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 t) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 t) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \\
& \times \int_0^t \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 \tau) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 \tau) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 \tau) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 \tau) \end{pmatrix}^{-1} \\
& \times \begin{pmatrix} \sqrt{2/3}(2T_0(\tau)\bar{T}_1(\tau) - \mu T_0(\tau)\bar{h}_1(\tau) - \mu\bar{T}_1(\tau)h_0(\tau)) + 3T_0^2(\tau)\bar{T}_1(\tau) \\ 3h_0^2(\tau)\bar{h}_1(\tau) \end{pmatrix} d\tau,
\end{aligned}$$

其中 λ_i ($i = 1, 2$) 由 (25) 式表示, T_0 和 h_0 分别由 (20) 和 (21) 式表示, $(\bar{T}_1(\tau), \bar{h}_1(\tau))$ 可表示为

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{T}_1(\tau) \\ \bar{h}_1(\tau) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 t) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 t) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 t) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \\
&\times \int_0^t \begin{pmatrix} \mu a_2 \exp(\lambda_1 \tau) & \mu a_2 \exp(\lambda_2 \tau) \\ (a_1 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 \tau) & (a_1 - \lambda_2) \exp(\lambda_2 \tau) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_0^3(\tau) \\ h_0^3(\tau) \end{pmatrix} d\tau.
\end{aligned}$$

利用摄动理论可以证明^[6,7], 随机扰动 ENSO 模型 (28), (29) 式有孤子解 $(T(t), h(\tau))$, 并具有如下的估计式:

$$\begin{pmatrix} T(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_2(t) \\ \tilde{h}_2(t) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3) \quad (0 < \varepsilon \ll 1). \quad (30)$$

由 (30) 式可知, 本文所用的渐近方法得到的近似解具有较好的精度.

5 结 论

ENSO 事件是一个复杂的自然现象. 我们可以通过振子模型的孤子解的渐近展开式对相应的耦合系统作出预报, 使人们尽早知晓该 ENSO 现象相应物理量的定性、定量方面的情况. 用渐近方法得到的非线性随机扰动 ENSO 模型 (1), (2) 式

的近似解 (20), (21) 式是一个解析表示式. 我们还可继续对近似解的解析表示式进行微分、积分等运算, 进一步得到相关的其他物理量的近似表示式.

与单纯的模拟方法相比较, 用模拟和渐近理论相结合的方法来研究 ENSO 模型更具优越性, 后者能起到互补的作用.

- [1] Hong L, Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪灵, 徐健学 2001 物理学报 **50** 612]
- [2] Lü J H, Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12
- [3] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林, 戴兴刚, 王爱慧, 丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]
- [4] Lei J, Ma S H, Fang J P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050302 (in Chinese) [雷军, 马松华, 方建平 2011 物理学报 **60** 050302]
- [5] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press) pp1—52
- [6] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing) pp299—306
- [7] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauserm Verlag) pp211—226
- [8] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
- [9] D'Aprile T, Pistoia A 2010 *J. Differ. Eqs.* **248** 556
- [10] Faye L, Frenod E, Seck D 2011 *Discrete Cont. Dyn. Syst.* **29** 1001
- [11] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204
- [12] Mo J Q 2009 *Sci. China G* **39** 568
- [13] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6701 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2010 物理学报 **59** 6701]
- [14] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440
- [15] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030202
- [16] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205

Asymptotic solving method of soliton for El Niño/La Niña-southern oscillation nonlinear disturbed model*

Lin Wan-Tao^{1)†} Chen Li-Hua²⁾ Ouyang Cheng³⁾ Mo Jia-Qi³⁾⁴⁾

1) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamic, Institute of Atmospheric Physics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

2) (Department of Mathematics and Computer Science, Fuqing Branch of Fujian Normal University, Fuqing 350300, China)

3) (Faculty of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China)

4) (Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China)

(Received 9 August 2011; revised manuscript received 20 December 2011)

Abstract

A class of El Niño/La Niña-southern oscillation (ENSO) stochastic disturbed model is considered. Firstly, using the special method of undetermined coefficients, the exact solution of the non-disturbed ENSO model is obtained. Then the approximate solutions of stochastic disturbed ENSO model are constructed by using the asymptotic theory and method. And it is illustrated with example that the asymptotic solutions have the better degree of accuracy.

Keywords: soliton, asymptotic method, El Niño/La Niña phenomenon

PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40876010, 11071205), the Strategic Priority Research Program of Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDA01020304), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6110502), the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Fujian Province, China (Grant No. JA10288), and the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant No. KJ2011A135).

† E-mail: linwt@lasg.iap.ac.cn