空间变尺度因子球坐标系与四维时空度规

卞保民† 赖小明 杨玲 李振华 贺安之

(南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094)

(2011 年 2 月 11 日收到; 2011 年 12 月 14 日收到修改稿)

时空度规是广义相对论的一个基础性概念, 是宇宙学和天体物理学建立模型的逻辑基础. 将随时序参数变化的空间尺度因子函数引入相对论四维时空间隔模型, 研究空间球对称形式的四维平直时空度规、Schwarzschild 度规、Robertson-Walker(R-W) 度规之间的变换条件. 基于空间变尺度因子球坐标系的时空间隔, 通过严格的计算, 推导出 R-W 度规中与 $k = \pm 1$ 对应的尺度因子函数解析解, 还推导出星球外非真空条件下的四维时空度规. 提出了一种理解现代物理学非平直时空模型的新视角.

关键词: 广义相对论, 标准宇宙模型, 尺度因子

PACS: 04.90.+e, 95.30.Sf, 98.80.Es

1 引 言

Robertson-Walker (R-W) 度规是当代宇宙学的数学基础, 其中包含一个待定的尺度因子 R 和表征时空拓扑结构的常数 k. 宇宙学家将普遍存在的河外星系红移现象作为 R-W 度规变尺度因子的客观反映, 推出宇宙空间具有均匀膨胀性质的重要结论. 近一个世纪以来, 哈勃红移、宇宙微波辐射背景 [1,2]、Ⅰa 型超新星光度与红移关系 [3−5] 以及宇宙大尺度结构均匀 [6] 等天文观测数据, 被认为是物理宇宙处于膨胀、加速膨胀状态的证据. 为了解释 “宇宙加速膨胀”, 在宇宙演化遵循标准大爆炸模型的基础上, 部分研究者引进具有负压强特性的暗能量. 目前已提出了诸多的暗能量模型, 如将宇宙学常数视为暗能量加冷暗物质的模型 [7]、广义的 Chaplygin 气体模型 [8]、双标量场 (Quintom) 模型 [9] 以及复标量场 (Hessence) 模型 [10] 等. 还有一些研究者提出了非标准宇宙模型, 例如 Avinash 和 Rvachev[11] 认为宇宙空间在大尺度上满足非阿基米德几何, 这在物理上等效引入了一种变尺度因子的宇宙模型. Sorrell[12] 则退回到 Zwicky 的光疲劳理论建立了一个静态宇宙, 解释Ⅰa 型超新星光谱红移与光亮度的对应关系, 但以光疲劳概念为基础的模型并不具有很强的说服力. 标度相对论的研究者 Nottale[13] 认为宇宙时空具有分形结构, 并在此基础上研究了宇宙的加速膨胀等现象. 文献 [14] 则用变光速模型讨论宇宙学疑难问题. 与上述模型不同, 文献 [15] 基于引力作用下气体一维不定常流自相似运动微分方程, 得到空间变尺度因子 $R(t)$ 的表达式, 给出一种无发散性宇宙模型, 该模型能解释 “宇宙加速膨胀” 现象.

为了进一步厘清文献 [15] 中变尺度因子模型的物理意义以及它们在宇宙学、天体物理学模型中的应用价值, 本文以相对论四维时空间隔概念为基础, 在 Minkowski 空间球坐标系 (t, r, θ, φ) 中引入随时序变化的空间尺度因子 R, 在此基础上研究分析含变尺度因子的空间球对称四维时空度规的对角化, 获得广义相对论非线性时空 R-W 度规、Schwarzschild 度规以及相应的尺度因子. 本文的研究结果表明, 文献 [15] 中变尺度因子模型具有普遍意义.

2 空间变尺度因子球坐标系四维时空间隔

Minkowski 平直时空 (t, x, y, z) 四维间隔 $\mathrm{d}s^2$ 定义为

$$\mathrm{d}s^2 \equiv -c^2\mathrm{d}\tau^2 - c^2\mathrm{d}t^2$$

† E-mail: bianbaomin_56@yahoo.com.cn

$$+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2. \tag{1}$$

取空间球坐标形式

$$\begin{aligned}&r^2\equiv x^2+y^2+z^2,\\&x\equiv r\sin\theta\cos\varphi,\\&y\equiv r\sin\theta\cos\varphi,\\&z\equiv r\cos\theta,\end{aligned}$$

则 (1) 式可写成

$$\begin{aligned}-c^2\mathrm{d}\tau^2 =& -c^2\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\\&-c^2\mathrm{d}t^2+R_0^2\mathrm{d}\varsigma^2\\&+R_0^2\varsigma^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\end{aligned} \tag{2}$$

式中 $R_0=r/\varsigma$ 表示空间固定尺度, $(\varsigma,\theta,\varphi)$ 为与 R_0 对应的球坐标, $\mathrm{d}\tau$ 为运动质点 $p_{\varsigma,\theta,\varphi}$ 本征时微元, 由 $\varsigma\to0$ 条件下 $\mathrm{d}t\to\mathrm{d}\tau$ 可推断 t 表示原点 $(0,0,0)$ 本征时. 引入具有长度量纲的非零单调待定函数 [15] $R(t)$, 定义变尺度因子空间球坐标系 (ξ,θ,φ) 的径向坐标

$$\xi\equiv\frac{r}{R(t)}. \tag{3}$$

任意坐标点到原点距离的变尺度因子形式为

$$r=\xi R(t). \tag{4}$$

两个相邻坐标点的径向距离元 $\mathrm{d}r=R\mathrm{d}\xi+\xi\dot{R}\mathrm{d}t$, 将 $\mathrm{d}r$ 和 r 的变尺度因子形式代入 (2) 式可得

$$\begin{aligned}-c^2\mathrm{d}\tau^2 =& -c^2\mathrm{d}t^2+\left(R\mathrm{d}\xi+\xi\dot{R}\mathrm{d}t\right)^2\\&+\xi^2R^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\\=&-\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)\mathrm{d}t^2+R^2\mathrm{d}\xi^2\\&+2\xi R\dot{R}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\\&+\xi^2R^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right).\end{aligned} \tag{5}$$

与 (5) 式对应的四维时空度规呈非对角化形式

$$g\equiv\begin{bmatrix}-\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right) & \xi R\dot{R} & 0 & 0\\ \xi R\dot{R} & R^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \xi^2R^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \xi^2R^2\sin^2\theta\end{bmatrix}. \tag{6}$$

由 (5) 式还可推出角度、时空变量分离关系式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2 &\equiv \mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\\&=\frac{\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)\mathrm{d}t^2-R^2\mathrm{d}\xi^2-2\xi R\dot{R}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t-c^2\mathrm{d}\tau^2}{\xi^2R^2}.\end{aligned} \tag{7}$$

文献 [15] 给出了中心对称气体动力学模型空间变尺度因子函数的一般解, 即

$$R(t)=R_0\left(\alpha H_0t+1\right)^{1/\alpha}, \tag{8}$$

式中无量纲参数 $\alpha\geqslant0$, 特征参数 $H_0>0$, 两者的数值与具体物理模型有关. 基于 (5) 式能够推导变尺度因子空间球坐标系时空度规 (6) 式的对角化形式.

3 空间变尺度因子时空度规的对角化

3.1 基于时空坐标 (t,ξ) 非线性变换的时空度规对角化

将 $\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2$ 代入 (5) 式并进行整理,

$$\begin{aligned}-c^2\mathrm{d}\tau^2 =& -\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)\left(\mathrm{d}t^2-2\frac{\xi\dot{R}\mathrm{d}tR\mathrm{d}\xi}{c^2-\xi^2\dot{R}^2}\right.\\&\left.-\frac{R^2\mathrm{d}\xi^2}{c^2-\xi^2\dot{R}^2}\right)+R^2\xi^2\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\\=&-\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)\left[\left(\mathrm{d}t-\frac{\xi R\dot{R}\mathrm{d}\xi}{c^2-\xi^2\dot{R}^2}\right)^2\right.\\&\left.-\frac{c^2R^2\mathrm{d}\xi^2}{\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)^2}\right]+R^2\xi^2\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\\=&-c^2\left(\sqrt{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}\mathrm{d}t\right.\\&\left.-\frac{\xi R\dot{R}c^{-2}\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}\right)^2\\&+R^2\xi^2\left[\frac{(\mathrm{d}\ln\xi)^2}{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}+\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\right].\end{aligned} \tag{9}$$

若 (8) 式中取 $\alpha=1$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=R_0H_0=\dot{R}_0$ 为常量, 则存在全微分

$$\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\frac{\mathrm{d}R}{\dot{R}_0}-\frac{\xi R\dot{R}_0c^{-2}\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{d}\left(\frac{R\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}{\dot{R}_0}\right)\\
&= \mathrm{d}\tau_\zeta,
\end{aligned} \tag{10}
$$

式中

$$\tau_\zeta \equiv \frac{R\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}{\dot{R}_0}$$

代表新的时间坐标. 再引入非线性径向坐标变换

$$\zeta \equiv \frac{\xi\dot{R}_0c^{-1}}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}. \tag{11}$$

将 $c\tau_\zeta \equiv \dfrac{cR\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}{\dot{R}_0}$ 的等号两端分别与 (11) 式的等号两端相乘, 可得

$$
\begin{aligned}
c\tau_\zeta\zeta &= \frac{cR}{\dot{R}_0}\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\frac{\xi\dot{R}_0c^{-1}}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}\\
&= R\xi.
\end{aligned} \tag{12}
$$

由 (11) 式还可得

$$\frac{(\mathrm{d}\ln\zeta)^2}{1+\zeta^2} = \frac{(\mathrm{d}\ln\xi)^2}{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}. \tag{13}$$

将 (10), (11) 式代入 (9) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{d}\tau^2 =& -\mathrm{d}\tau_\zeta^2 + \frac{\tau_\zeta^2}{1+\zeta^2}\mathrm{d}\zeta^2\\
&+\tau_\zeta^2\zeta^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right).
\end{aligned} \tag{14}
$$

如此可见, 时空坐标系 $(\tau_\zeta,\zeta,\theta,\varphi)$ 形式下的对角化度规为

$$g_{-1} \equiv c^2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\tau_\zeta^2}{1+\zeta^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \tau_\zeta^2\zeta^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tau_\zeta^2\zeta^2\sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{15}$$

由 (14) 式还可得到时间、空间变量分离关系式

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tau_\zeta^2-\mathrm{d}\tau^2}{\tau_\zeta^2} =& \frac{\mathrm{d}\zeta^2}{1+\zeta^2}\\
&+\zeta^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right).
\end{aligned} \tag{16}
$$

3.2 基于时空坐标 (τ,ξ) 非线性变换的时空度规对角化

若以运动质点 $p_{\varsigma,\theta,\varphi}$ 本征时 τ 作为空间尺度因子函数的自变量, 即 $R(\tau)$, 则可定义变尺度因子空间球坐标系 (ξ,θ,φ) 的径向坐标

$$\xi \equiv \frac{r}{R(\tau)}. \tag{17}$$

将 (2) 式重新写成

$$
\begin{aligned}
c^2\mathrm{d}t^2 =& c^2\mathrm{d}\tau^2+\mathrm{d}r^2\\
&+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).
\end{aligned} \tag{18}
$$

再将 $r\equiv\xi R(\tau)$ 和微元 $\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\xi+\xi\dot{R}\mathrm{d}\tau$ 代入 (18) 式并进行整理,

$$
\begin{aligned}
c^2\mathrm{d}t^2 =& \left(c^2+\xi^2\dot{R}^2\right)\mathrm{d}\tau^2+2\xi R\dot{R}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\
&+R^2\mathrm{d}\xi^2+R^2\xi^2\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\\
=& \left(c^2+\xi^2\dot{R}^2\right)\Bigg(\mathrm{d}\tau^2+2\frac{\xi\dot{R}\mathrm{d}\tau R\mathrm{d}\xi}{c^2+\xi^2\dot{R}^2}\\
&+\frac{R^2\mathrm{d}\xi^2}{c^2+\xi^2\dot{R}^2}\Bigg)+R^2\xi^2\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\\
=& \left(c^2+\xi^2\dot{R}^2\right)\Bigg[\left(\mathrm{d}\tau+\frac{\xi R\dot{R}\mathrm{d}\xi}{c^2+\xi^2\dot{R}^2}\right)^2\\
&+\frac{c^2R^2\mathrm{d}\xi^2}{\left(c^2+\xi^2\dot{R}^2\right)^2}\Bigg]+R^2\xi^2\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\\
=& c^2\Bigg(\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}\mathrm{d}\tau\\
&+\frac{\xi R\dot{R}c^{-2}\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}\Bigg)^2\\
&+R^2\xi^2\left[\frac{(\mathrm{d}\ln\xi)^2}{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}+\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\right].
\end{aligned} \tag{19}
$$

与 (9) 式相类似, 取 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\tau} = R_0H_0 = \dot{R}_0$ 为常量, 则存在全微分

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\frac{\mathrm{d}R}{\dot{R}_0}+\frac{\xi R\dot{R}c^{-2}\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}\\
&= \mathrm{d}\left(\frac{R\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}{\dot{R}_0}\right)\\
&= \mathrm{d}\tau_\tau,
\end{aligned} \tag{20}
$$

式中

$$\tau_\tau \equiv \frac{R\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}{\dot{R}_0}$$

代表新的时间坐标. 再引入径向坐标变换

$$\eta \equiv \frac{\xi\dot{R}_0c^{-1}}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}. \tag{21}$$

将 $c\tau_\tau \equiv \dfrac{cR\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}{\dot{R}_0}$ 的等号两端分别与 (21) 式的等号两端相乘, 可得

$$\begin{aligned}c\tau_\tau\eta &= \frac{cR}{\dot{R}_0}\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\frac{\xi\dot{R}_0c^{-1}}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}\\ &= R\xi.\end{aligned} \tag{22}$$

由 (21) 式还可得

$$\frac{(\mathrm{d}\ln\eta)^2}{1-\eta^2} = \frac{(\mathrm{d}\ln\xi)^2}{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}. \tag{23}$$

将 (20), (21) 式代入 (19) 式, 则有时间、空间变量分离关系式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}\tau_\tau^2}{\tau_\tau^2} = &\frac{\mathrm{d}\eta^2}{1-\eta^2}\\ &+\eta^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right).\end{aligned} \tag{24}$$

将 T_0 作为时间单位, 再进行下列时间坐标变换:

$$\begin{aligned}\tau_\beta \equiv &\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{\tau_\tau+t}{2T_0}\right)\left(\frac{\tau_\tau-t}{2T_0}\right)\right]\\ = &\frac{1}{2}\ln\left\{\left[\frac{\left(\tau+H_0^{-1}\right)\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}+t}{2T_0}\right]\right.\\ &\left.\times\left[\frac{\left(\tau+H_0^{-1}\right)\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}-t}{2T_0}\right]\right\},\end{aligned} \tag{25a}$$

$$\begin{aligned}\tau_\eta \equiv &\frac{1}{2}\ln\frac{\tau_\tau+t}{\tau_\tau-t}\\ = &\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\tau+H_0^{-1}\right)\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}+t}{\left(\tau+H_0^{-1}\right)\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}-t}.\end{aligned} \tag{25b}$$

与 (25) 式对应的逆变换为

$$t = 2T_0\mathrm{e}^{\tau_\beta}\sinh\tau_\eta, \tag{26a}$$

$$\tau_\tau = 2T_0\mathrm{e}^{\tau_\beta}\cosh\tau_\eta. \tag{26b}$$

由 (26) 式作微分计算

$$\mathrm{d}t = 2T_0\mathrm{e}^{\tau_\beta}\left(\cosh\tau_\eta\mathrm{d}\tau_\eta+\sinh\tau_\eta\mathrm{d}\tau_\beta\right), \tag{27a}$$

$$\mathrm{d}\tau_\tau = 2T_0\mathrm{e}^{\tau_\beta}\left(\sinh\tau_\eta\mathrm{d}\tau_\eta+\cosh\tau_\eta\mathrm{d}\tau_\beta\right). \tag{27b}$$

结合 (26), (27) 两式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}\tau_\tau^2}{\tau_\tau^2} = \frac{\mathrm{d}\tau_\eta^2-\mathrm{d}\tau_\beta^2}{\cosh^2\tau_\eta}. \tag{28}$$

再将 (28) 式代入 (24) 式, 整理后可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}\tau_\beta^2 = &-\mathrm{d}\tau_\eta^2+\frac{\cosh^2\tau_\eta}{1-\eta^2}\mathrm{d}\eta^2\\ &+\eta^2\cosh^2\tau_\eta\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right).\end{aligned} \tag{29}$$

由此可见, 时空坐标系 $(\tau_\eta,\eta,\theta,\varphi)$ 形式下的对角化度规为

$$g_{+1} \equiv c^2T_0^2\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\cosh^2\tau_\eta}{1-\eta^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \eta^2\cosh^2\tau_\eta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \eta^2\cosh^2\tau_\eta\sin^2\theta\end{bmatrix}. \tag{30}$$

3.3 基于实物时间坐标 (τ, t) 的时空度规对角化

四维时空间隔能够与原点辐射的、时序间隔为 $\mathrm{d}t$ 的一对相邻光子被自由运动质点 $p_{\xi,\theta,\varphi}$ 依次吸收的过程对应, 吸收过程的时序间隔微元为 $\mathrm{d}\tau$. 对 (5) 式进行整理,

$$\begin{aligned}-c^2\mathrm{d}\tau^2 &= -\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)\mathrm{d}t^2+R^2\mathrm{d}\xi^2\\ &\quad+2\xi R\dot{R}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t+\xi^2R^2\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\\ &= -\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)\mathrm{d}t^2\\ &\quad+R^2\xi^2\left((\mathrm{d}\ln\xi)^2+2\frac{\dot{R}}{R}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\mathrm{d}t+\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\right)\\ &= -\left(1-\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2\\ &\quad+R^2\xi^2\left[(\mathrm{d}\ln\xi)^2\left(1+\frac{2c}{R\dot{\xi}}\frac{\xi\dot{R}}{c}\right)\right.\\ &\quad\left.+\mathrm{d}C_{\theta\varphi}^2\right].\end{aligned} \tag{31}$$

运动质点 $p_{\xi,\theta,\varphi}$ 的径向坐标 $\xi(t)$ 满足

$$1+\frac{2c}{\dot{\xi}R}\frac{\xi\dot{R}}{c} = \frac{1}{1-\dfrac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}}. \tag{32}$$

(32) 式可化为

$$1+\frac{2c}{\dot{\xi}R}\frac{\xi\dot{R}}{c} = \frac{1}{1-\dfrac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}+\left(\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}\right)^2 \\
&\quad +\left(\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}\right)^3+\cdots,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2c}{\dot{\xi}R} &= \frac{\xi\dot{R}}{c}\left[1+\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}+\left(\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}\right)^2\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}\right)^3+\cdots\right] \\
&= \frac{\dfrac{\xi\dot{R}}{c}}{1-\dfrac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

由 (34) 式可得一阶微分方程

$$
\dot{\xi}=\frac{2}{R}\left(\frac{c^2}{\xi\dot{R}}-\xi\dot{R}\right),
\tag{35a}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}\ln R}+4\xi^2=4\frac{c^2}{\dot{R}^2}.
\tag{35b}
$$

积分后的质点径向坐标解为

$$
\xi(t)=R^{-2}\sqrt{C_\xi+4c^2\int\frac{R^3}{\dot{R}^2}\mathrm{d}R}.
\tag{36}
$$

由 (8) 式可得

$$
\begin{aligned}
\dot{R} &= \frac{H_0}{\alpha H_0 t+1}R_0(\alpha H_0 t+1)^{1/\alpha} \\
&= \frac{H_0}{\alpha H_0 t+1}R \\
&= \frac{H_0}{(R/R_0)^\alpha}R \\
&= \frac{H_0 R_0^\alpha}{R^{\alpha-1}}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

对 (37) 式两边乘以 ξ/c 后再取平方, 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2} &= \frac{\xi^2 R^{2-2\alpha}H_0^2R_0^{2\alpha}}{c^2} \\
&= \frac{\xi^3R^3H_0^2R_0^{2\alpha}}{\xi R^{2\alpha+1}c^2} \\
&= \frac{V}{\xi R^{2\alpha+1}}\frac{3H_0^2R_0^{2\alpha}}{4\pi c^2},
\end{aligned}
\tag{38}
$$

式中

$$
V\equiv\frac{4\pi}{3}\xi^3R^3
$$

为空间球体积. 将球质量 M、平均密度 $\bar{\rho}$ 代入 (38) 式右端, 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2} &= \frac{\xi^2R^2}{c^2}\frac{\dot{R}^2}{R^2} \\
&= \frac{r^2}{c^2}H^2 \\
&= \frac{V}{\xi R^{2\alpha+1}}\frac{3H_0^2R_0^{2\alpha}}{4\pi c^2} \\
&= \frac{M}{\xi R^{2\alpha+1}}\frac{3H_0^2R_0^{2\alpha}}{4\pi\bar{\rho}c^2}.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

由引力常数 G 和 r, H, M (或 $\bar{\rho}$) 可构成无量纲参数

$$
\begin{aligned}
\chi &= \frac{GM}{H^2r^3} \\
&= \frac{4\pi G}{3}\frac{\bar{\rho}}{H^2}.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

令 (8) 式变尺度因子 R 函数中 $\alpha=0$, 对应的 $H=H_{\mathrm{H}}=\mathrm{const.}$, 代入 (40) 式可得 χ 与时空坐标无关的条件为

$$
\begin{aligned}
\chi_0 &= \frac{G}{H_H^2}\frac{M}{r^3} \\
&= \frac{4\pi G}{3H_{\mathrm{H}}^2}\bar{\rho}_{\mathrm{H}} \\
&= \mathrm{const.}\rightarrow\bar{\rho}_H=\mathrm{const.},
\end{aligned}
\tag{41}
$$

式中

$$
\bar{\rho}_{\mathrm{H}}\equiv\chi_0\frac{3H_{\mathrm{H}}^2}{4up\pi G}
$$

为宇宙平均密度. 若令 (8) 式的 $\alpha=3/2$, 即 $R=R_0\left(\dfrac{3}{2}H_0t+1\right)^{3/2}$, 则可得

$$
\begin{aligned}
H^2r^3 &= \frac{H_0^2}{(\alpha H_0t+1)^2}\xi^3R_0^3(\alpha H_0t+1)^2 \\
&= H_0^2R_0^3\xi^3.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

代入 (40) 式后可得 χ 与时空坐标无关的条件为

$$
\begin{aligned}
\chi_{3/2} &= \frac{GM}{H^2r^3} \\
&= \frac{G}{H_0^2R_0^3}\frac{M}{\xi^3} \\
&= \frac{4\pi G}{3H_0^2R_0^3}\bar{\rho}_\xi \\
&= \mathrm{const.}\rightarrow\bar{\rho}_\xi=\mathrm{const.}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

由 (39), (40) 和 (33) 式, 可推出引力势函数 $\dfrac{GM}{r}=\chi\xi^2\dot{R}^2$. 代入 (31) 式可得

$$
\begin{aligned}
-c^2d\tau^2 &= -\left(1-\frac{GM}{\chi c^2r}\right)c^2\mathrm{d}t^2+\frac{R^2}{1-\dfrac{GM}{\chi c^2r}}\mathrm{d}\xi^2 \\
&\quad +r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right).
\end{aligned}
\tag{44}
$$

与 (44) 式对应的对角化度规为

$$g_{\alpha=0,3/2} \equiv \begin{bmatrix} -\left(1-\dfrac{GM}{\chi c^2 r}\right)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{1-\dfrac{GM}{\chi c^2 r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{45}$$

上述计算过程表明, 平直时空四维间隔模型结合空间尺度因子函数 R_0, $R(\tau_\zeta) = c\tau_\zeta$, $R(\tau_\eta) = cT_0\cosh\tau_\eta$, $R_{\alpha=0}$, $R_{\alpha=3/2}$ 能够演绎出不同的对角化时空度规. 与对角化过程相关的 τ_ζ, τ_η, τ_β. τ_τ 并不代表实物时钟, 可称为特征时序参量. 由此可知, 上述几种对角化时空度规并不具有完全的独立性.

4 讨 论

4.1 广义相对论空间球坐标系时空度规

标准宇宙模型 R-W 度规对应的时空间隔形式为 [16]

$$\begin{aligned} -c^2\mathrm{d}\tau^2 = & -c^2\mathrm{d}\tau_F^2 + \frac{R_F^2}{1-k\xi_F^2}d\xi_F^2 \\ & +R_F^2\xi_F^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{46}$$

根据最大对称空间唯一性定理 [16], (2), (14), (29) 式即为 $k=0,\mp1$ 的 R-W 度规时空间隔形式, 对应的尺度因子函数分别为

$$\begin{aligned} R_{F_0}(\tau_F) &= R_0, \\ R_{F_{-1}}(\tau_F) &= c\tau_F, \\ R_{F_{+1}}(\tau_F) &= cT_0\cosh\tau_F. \end{aligned}$$

星球外真空模型下的广义相对论Schwarzschild度规对应的时空间隔形式为

$$\begin{aligned} -c^2\mathrm{d}\tau = & -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\dfrac{2GM}{c^2 r}} \\ & +r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right). \end{aligned} \tag{47}$$

(44) 式对应的两个尺度因子函数为

$$\begin{aligned} &R_{\alpha=0} = R_0\mathrm{e}^{H_0 t}, \\ &R_{\alpha=3/2} = R_0\left(3H_0 t/2+1\right)^{2/3}. \end{aligned}$$

当取局域近似条件时则有 $H_0 t \ll 1$, 即 $R \approx R_0$. (44) 式取 $\chi = 1/2$ 即与 (47) 式等效. 由此可知, 变尺度因子时空坐标系模型与广义相对论符合.

4.2 变尺度因子空间球坐标系的径向坐标变换关系

原点辐射光子自由程 r 的原点时序度量形式为 $r \equiv ct$, 固定尺度因子平直空间球坐标形式下 $r \equiv \varsigma R_0$. 两种形式再结合 (4) 式, 可推导变尺度因子球坐标系径向坐标 ξ 与 ς 之间的变换关系. 取计时单位 $T_0 \equiv R_0/c$, 由 $r \equiv \xi R(t) = \xi R(\varsigma T_0) = \varsigma R_0$ 关系可得

$$\xi = \frac{R_0}{R(\varsigma T_0)}\varsigma, \tag{48a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varsigma} = \frac{R_0}{R(\varsigma T_0)}\left[1-\frac{\dot{R}(\varsigma T_0)}{R(\varsigma T_0)}\varsigma T_0\right]. \tag{48b}$$

不失一般性, 取 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{R}_0 = c$. 与尺度因子 $R(t) = ct + R_0$ 相关的径向坐标变换式为

$$\xi_{k=-1} = \frac{1}{\varsigma+1}\varsigma, \tag{49a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi_{k=-1}}{\mathrm{d}\varsigma} = \frac{1}{(\varsigma+1)^2}; \tag{49b}$$

$$\zeta = \frac{\varsigma+1}{\sqrt{2\varsigma+1}}\varsigma, \tag{50a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\varsigma} = \frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{\sqrt{2\varsigma+1}^3}. \tag{50b}$$

与尺度因子 $R(\tau) = c\tau + R_0$ 相关的径向坐标变换式为

$$\xi_{k=1} = \frac{1}{\varsigma+1}\varsigma, \tag{51a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi_{k=1}}{\mathrm{d}\varsigma} = \frac{1}{(\varsigma+1)^2}; \tag{51b}$$

$$\eta = \frac{(\varsigma+1)\varsigma}{\sqrt{2\varsigma^2+2\varsigma+1}}, \tag{52a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\varsigma} = \frac{\varsigma^2+\varsigma+1}{(2\varsigma^2+2\varsigma+1)^{3/2}}(2\varsigma+1). \tag{52b}$$

变换后径向坐标的值域 $\xi_{k=\pm1} < 1$. $\lim\limits_{\varsigma\to\infty}\dfrac{\mathrm{d}\xi_{\pm1}}{\mathrm{d}\varsigma} \to 0$ 表明, 随着 ς 的增大, 坐标间隔 $\Delta\xi_{k=\pm1}$ 反映 $\Delta\varsigma$ 的

能力逐渐丧失. 与尺度因子 $R(t) = R_0 e^{H_H t}$ 相关的径向坐标变换式为

$$\xi_{\alpha=0} = \frac{\varsigma}{e^{H_H T_0 \varsigma}}, \tag{53a}$$

$$\frac{d\xi_{\alpha=0}}{d\varsigma} = \frac{1 - H_H T_0 \varsigma}{e^{H_H T_0 \varsigma}}. \tag{53b}$$

与尺度因子 $R(t) = R_0 (3H_0 t/2 + 1)^{2/3}$ 相关的径向坐标变换式为

$$\xi_{\alpha=3/2} = \frac{\varsigma}{(3H_0 T_0 \varsigma/2 + 1)^{2/3}}, \tag{54a}$$

$$\frac{d\xi_{\alpha=3/2}}{d\varsigma} = \frac{1 - \dfrac{H_0 T_0 \varsigma}{3H_0 T_0 \varsigma/2 + 1}}{(3H_0 T_0 \varsigma/2 + 1)^{2/3}}. \tag{54b}$$

与 (8) 式对应的径向坐标一般变换式为

$$\xi = \frac{\varsigma}{(\alpha H_0 T_0 \varsigma + 1)^{1/\alpha}}, \tag{55a}$$

$$\frac{d\xi}{d\varsigma} = \frac{1 - (1-\alpha) H_0 T_0 \varsigma}{(\alpha H_0 T_0 \varsigma + 1)^{1+1/\alpha}}. \tag{55b}$$

径向坐标 ξ 的极大值对应于平直空间 L 点的坐标为

$$\varsigma_L = \frac{1}{(1-\alpha) H_0 T_0},$$

极大值为

$$\xi_{\max} = \frac{1}{H_0 T_0 (1-\alpha)^{1-1/\alpha}}.$$

相对于平直四维时空坐标系 $(t, \varsigma, \theta, \varphi)$, $\xi_{k=\pm1}$ 和 ξ_α 为径向距离 r 的非线性映射形式, ξ/ς 值随 r 的增大而减小, 且 ξ 的值域有限, 故时空坐标系 $(t, \xi, \theta, \varphi)$ 维数小于 4.

综上所述可知, 结合原点辐射光子传播过程来讨论相对论四维时空间隔模型, 变尺度因子空间球坐标系 $(t, \xi, \theta, \varphi)$ 并不一定代表物理空间 (r, θ, φ) 具有均匀膨胀的性质.

4.3 时空坐标 τ, t, ξ 与特征时序参数

可取任一实物光源为原点建立空间球坐标系模型, 原点时序参数定义为 t. 物理学必须借助信号传播过程、传播信号参数的变化 (即测量) 标定非原点实物元的坐标 (ξ, θ, φ). 在基于原点辐射光子传播过程建立的变尺度因子球坐标系中, 运动质点 $p_{\xi,\theta,\varphi}$ 记录时序 τ 与原点记录时序 t 不等价. 设 (r, θ, φ), $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ 分别对应原点处时序间隔为 dt 先后辐射的两个原点辐射光子传播过程, $d\tau$ 为 $p_{\xi,\theta,\varphi}$ 吸收该对光子的本征时间隔, 由 (2) 式可得

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\right\}} < \Delta t. \tag{56}$$

(56) 式与运动时钟变慢的相对论形式符合. 且可得质点 $p_{\xi,\theta,\varphi}$ 运动距离元的计算公式

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = c\sqrt{\Delta t^2 - \Delta\tau^2}. \tag{57}$$

(56), (57) 式表明,“时序相邻的序列光子” 是反映实物元空间相对关系信息的观测基础.

特征时序参数 $\tau_\zeta, \tau_\eta, \tau_\beta, \tau_\tau$ 与时空坐标 τ, t, ξ 不同组合对应. 特征时序参数不是可直接计量的实物时钟序数. 同步引入的径向坐标 ζ 和 η 也不与原点辐射光子传播过程 r 直接对应. 这些 “形式时钟” 和 “形式径向坐标” 的理论意义是使变换后的四维时空度规能呈现对角化形式.

4.4 非原点实物元状态参数的独立性

取变尺度因子模型, 由 (5) 式可得

$$\xi = \frac{\sqrt{c^2(1-\dot\tau^2)\dot R^2 + R^2\left(c^2 - c^2\dot\tau^2 - R^2\dot\xi^2\right)\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right)} - R\dot R\dot\xi}{\dot R^2 + R^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right)}. \tag{58}$$

不计角度变化, 则有

$$\xi = \frac{c\sqrt{1-\dot\tau^2} - R\dot\xi}{\dot R}. \tag{59}$$

可见非原点实物元状态所对应的基本参数为 (ξ, θ, φ), $\left(\dot\xi, \dot\theta, \dot\varphi\right)$, 形式上都可表示成原点时序 t 的函数. 在变尺度因子坐标系形式下, 坐标参数和速度参数相互关联, 不具有完全独立性.

4.5 原点辐射光子自由程的映射模型

标准宇宙模型没有给出 R-W 度规变尺度因子函数的具体解析形式, 尺度因子 R 随时序增大的形式被理解为 "宇宙物理空间具有均匀膨胀特性". 本文认为宇观意义的尺度因子只能是宇宙空间普遍存在的自由传播信号特征的映射形式.

由 (11) 式的径向坐标变换关系所对应的变尺度因子为

$$R(t) = ct + R_0, \tag{60a}$$

$$R(\tau_\zeta) = c\tau_\zeta. \tag{60b}$$

(21) 式的径向坐标变换关系所对应的变尺度因子为

$$R(\tau) = c\tau + R_0, \tag{61a}$$

$$R(\tau_\eta) = cT_0 \cosh \tau_\eta. \tag{61b}$$

这里 $R(t)$ 和 $R(\tau)$ 的时间导数均为常数, 可理解为原点辐射光子自由程的映射形式. 所以径向坐标 $\xi_{k=\pm 1}$ 映射的空间范围受限条件为 $r < ct$ 或者 $r < c\tau$.

(45) 式时空度规对应的变尺度因子为

$$R_{\alpha=0} = R_0 \mathrm{e}^{H_{\mathrm{H}} t}, \tag{62}$$

$$R_{\alpha=3/2} = R_0 \left(3H_0 t/2 + 1\right)^{2/3}. \tag{63}$$

由 (41) 式可知, $\alpha = 0$ 对应于宇宙平均密度为常量的物质背景. $R_{\alpha=0}$ 既反映原点辐射光子传播过程, 又作为光子吸收参数 $cT(t)$ 的映射形式. (62) 式中哈勃常数 H_{H} 的值极其微小, 在局域空间内 $R_{\alpha=0} \approx R_0 = cT_0$ 与光子辐射参数对应. 由 (43) 式可知, $R_{\alpha=3/2}$ 与星球局域环境有关, 由 (63) 式可得 $\xi \ddot{R}_{\alpha=3/2} = -\dfrac{H_0^2 \xi^3 R_0^3}{2\xi^2 R_{\alpha=3/2}^2}$, 在质量为 M 的星球表面 r 处 $\xi \ddot{R}_{\alpha=3/2} \propto \dfrac{M}{r^2}$. 考虑到与广义相对论 Schwarzschild 度规的关联, 本文认为 $R_{\alpha=3/2}$ 随时序变化与自由质点观测到的局域性光子引力红移有关.

不论尺度因子 R 对应于原点辐射光子自由程或者对应于自由传播光子的观测参数, 相应的时序参数 t(或者 τ) 都可理解为该光子传播过程的度量形式. R 的物理意义与爱因斯坦在相对论中引入光程 (光子自由程) 作为空间距离的度量标准观点相符. 因而 (60), (61) 式对应的尺度因子与相对论宇宙时空模型 R-W 度规密切相关就不足为奇了. 光子传播过程的唯一性保证了径向距离 r 度量结果的确定性. 但原点辐射光子过程则可取不同的空间球坐标映射形式, 即有 $r \equiv \varsigma R_0 = \xi R$. 本文引入的变尺度因子 R 也可理解成径向坐标 ξ 附近、与径向坐标间隔 $\Delta\xi \equiv 1$ 对应的空间距离元映射形式 $\dfrac{\partial r}{\partial \xi} = R$. 并且 $\xi = \dfrac{r}{R} < \dfrac{r}{R_0} = \varsigma$, 即平直空间坐标系 $(\varsigma, \theta, \varphi)$ 代表一种极限 (抽象理想模型) 形式. 原点辐射光子自由程 (径向距离) 的坐标映射可分成线性和非线性两种逻辑形式.

5 结 论

基于一个引入空间球坐标系的变尺度因子模型, 以 Minkowski 四维时空间隔定义为基础, 能够推导出标准宇宙模型 R-W 时空度规与 $k = \pm 1$ 对应的尺度因子函数, 也能够推导出星球外非真空条件下的四维时空度规和广义相对论 Schwarzschild 度规. 通过计算给出了具有对角化形式的不同时空度规的径向坐标变换公式, 这些公式表明空间变尺度因子所对应的四维时空坐标系并不一定意味着三维空间的均匀膨胀. 本文认为, 原点辐射光子信号是物理学时空模型的观测基础, 抽象的、平直的四维时空几何学是建立物理学时空模型的逻辑基础.

[1] Bennett C L, Hill R S, Hinshaw G, Nolta M R, Odegard N, Page L, Spergel D N, Weiland J L, Wright E L, Halpem M, Larosik N, Kogut A, Limon M, Meyer S S, Tucker G S, Wollack E 2003 *Astrophys. J.* **148** 97

[2] Mather J C, Cheng E S, Cottingham D A, Eplee R E, Fixsen D J, Hewagama T 1994 *Am. Astron. Soc.* **420** 439

[3] Riess A G, Filippenko A V, Challis P, Clocchiattia A, Diereks A, Gamavich P M, Gilliland R L, Hogan C J, Jha S, Kirshner R P, Lebundgut B, Phillips M M, Reiss D, Schmidt B P, Schommer R A, Smith R C, Spyromilio J, Stubbs C, Suntzeff N B, Tonry J 1998 *Astron. J.* **116** 1009

[4] Schmidt B P, Suntzeff N B, Phillips M M, Schommer R A, Clocchiatti A, Kirshner R P, Garnavich P, Challis P, Leibundgut B, Spyromilio J, Riess A G, Filippenko A V, Hamuy M, Smith R C, Hogan C, Stubbs C, Diercks A, Reiss D, Gilliland R, Tonry J, Maza J, Dressler A, Walsh J, Ciardullo R 1998 *Astrophys. J.* **507** 46

[5] Benitez N, Riess A, Nugent P, Dickingson M, Chornock E, Filippenko V 2002 *Astrophys. J.* **577** L1

[6] Pope A C, Matsubara T, Szalay A S, Blanton M R, Eisenstein D J, Gray J, Lain B, Bahcall N A, Brinkmann J, Budavari T, Con-

nolly A J, Frieman J A, Gunn J E, Johnston D, KentS M, Lupton R H, Meiksin A, Nichol R C, Scranton R, Strauss M A, Szapudi I, Tegmark M, Vogeley M S, Weinberg D H, Zehavi I 2004 *Astrophys. J.* **607** 655

[7] Carroll S M 2001 *Living Rev. Rel.* **4** 1

[8] Kamenshchik A Y, Moschella U, Pasquier V 2001 *Phys. Lett.* B **511** 265

[9] Feng B, Wang X L, Zhang X M 2005*Phys. Lett.* B **607** 35

[10] Zhai X H, Zhao Y B 2006 *Chin. Phys.* **15** 2465

[11] Avinash K, Rvachev V L 2000 *Found. Phys.* **30** 139

[12] Sorrell W H 2009 *Astrophys. Space Sci.* **323** 205

[13] Nottale L 2010 *Found Sci.* **15** 101

[14] Albrecht A, Magueijo J 1999 *Phys. Rev.* D **59** 043516

[15] Lai X M, Bian B M, Yang L, Yang J, Bian N, Li Z H, He A Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7955 (in Chinese) [赖小明, 卞保民, 杨玲, 杨娟, 卞牛, 李振华, 贺安之 2008 物理学报 **57** 7955]

[16] Weinberg S 1980 *Gravitation and Cosmology* (Beijing: Science Press) pp441, 475 (in Chinese) [温伯格 S 1980 引力论和宇宙论 (北京: 科学出版社) 第 441, 475 页]

Variable space scale factor spherical coordinates and time-space metric

Bian Bao-Min† Lai Xiao-Ming Yang Lin Li Zhen-Hua He An-Zhi

(*Department of Information Physics and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094*, China*)

(Received 11 February 2011; revised manuscript received 14 December 2011)

Abstract

The time-space metric is a fundamental concept of general relativity, and it is the logical foundation of cosmology and astrophysics. A time-related space scale factor is introduced into a 4-dimensional time-space interval model. The transformations among the flat metric, the Schwarzschild metric and the Robertson-Walker (R-W) metric are obtained in spherical coordinate system. Based on the time-space interval of the time-related scale factor coordinate, the solutions of R-W metric with parameter $k = \pm 1$ and the non-vacuum metric outside stars are deduced. A new point of view is advanced to comprehend the modern physical non-flat time-space.

Keywords: general relativity, standard cosmological model, scale factor

PACS: 04.90.+e, 95.30.Sf, 98.80.Es

† E-mail: bianbaomin_56@yahoo.com.cn