

## 大参数周期信号随机共振解析\*

杨定新<sup>†</sup> 胡政 杨拥民

(国防科学技术大学机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

(2011年7月4日收到; 2011年11月3日收到修改稿)

通过调节双稳系统参数实现大参数频率范围内周期信号的随机共振, 在工程上具有重要意义. 推导了双稳系统参数的归一化变换, 利用归一化变换原理对大参数周期信号的随机共振进行了数值仿真, 阐明该原理适用于任意频率周期信号. 对大参数随机共振用电路模拟进行了实验验证, 揭示了通过调节双稳系统参数可以实现大参数频率范围内的随机共振. 分析了二次采样实现大参数周期信号随机共振的机理, 通过数值仿真与参数归一化变换方法进行了比较. 仿真结果表明, 在输入信号幅度变化的情况下, 二次采样方法易出现发散现象, 而归一化变换具有更好的稳定性与适应性.

**关键词:** 双稳系统, 大参数随机共振, 弱周期信号检测, 数值仿真

**PACS:** 05.40.-a, 02.60.Cb

## 1 引言

随机共振理论最初是由意大利学者 Benzi 等<sup>[1,2]</sup>于20世纪80年代提出, 用于解释地球远古气象中每隔10万年左右冰川期与暖气候期周期交替出现的现象. 根据随机共振理论, 当淹没在强背景噪声中的微弱周期信号通过某些特殊非线性系统(如双稳系统)时, 在噪声与信号的协同作用下会发生噪声能量向信号能量的转移, 使得非线性系统的输出信噪比得到增强. 随机共振理论在强噪声背景下微弱周期信号的检测方面显示出了独特的优势, 人们对基于双稳系统随机共振原理的微弱信号检测方法开展了大量的理论和实验研究<sup>[3-14]</sup>. 这些研究在一定程度上加深了人们对随机共振机理的理解, 但仍有一些问题没有得到明确阐释, 特别是对于双稳随机共振系统所适合检测的周期信号参数范围方面存在一些有待辨析的认识. 传统的观点<sup>[9-13]</sup>认为随机共振只适用小参数信号(幅值远小于1、频率远小于1 Hz), 而在工程实践中往往需要处理信号频率远远大于1 Hz的大参数周期信号, 因此如何利用随机共振检测高频微弱周期信号

具有重要意义. 为解决微弱高频周期信号的检测问题, 文献<sup>[9-12]</sup>提出了在随机共振小参数约束条件下检测高频周期信号的二次采样方法. 文献<sup>[13]</sup>认为对于高频周期信号, 通过改变双稳系统参数, 无论怎样调节也很难达到信号的随机共振状态, 因此不能通过调节参数实现大参数信号的检测. 而在文献<sup>[14]</sup>中, 有利用双稳系统随机共振检测高频周期信号的实例. 综上分析, 目前对双稳系统随机共振原理适合检测的周期信号参数范围尚没有明确的阐释, 导致了在应用上的一些模糊认识.

针对参数调节随机共振问题, 文献<sup>[15]</sup>提出采用双稳系统的归一化变换来适应不同频率的周期信号. 可是, 文献<sup>[15]</sup>在变换过程中对于噪声的处理不尽合理, 本文在文献<sup>[15]</sup>的基础上进一步推导了双稳系统参数的归一化变换, 在推导过程中从时域拉伸与频域压缩的角度来处理噪声的变换, 从物理意义上给出了明确解释. 利用参数归一化变换, 通过选择不同的双稳系统参数, 可以适应任意频率的周期信号, 并分别用数值方法和电路模拟法进行了仿真与实验验证, 明确了所谓的小参数约束仅仅是在双稳系统结构参数归一化条件下存在. 有些

\* 国家自然科学基金(批准号: 50905184)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yangdingxincn@163.com

文献在分析随机共振时均默认双稳系统结构参数为 1, 在此前提下才分析得出随机共振只适用小信号的结论. 本文还对利用二次采样方法产生的随机共振现象进行了理论解释, 并与参数归一化方法进行了对比.

## 2 双稳系统随机共振模型

### 2.1 系统模型

在随机共振的研究中, 受微弱周期信号和白噪声驱动的双稳系统是最经常采用的一种非线性系统, 其动力学方程可表示为<sup>[1]</sup>

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + A \sin(2\pi ft) + n(t). \quad (1)$$

方程 (1) 中,  $a$  和  $b$  为双稳系统的结构参数;  $x(t)$  为系统的输出信号;  $n(t)$  是均值为零、强度为  $D$  的白噪声, 满足

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= 0, \\ \langle n(t)n(0) \rangle &= 2D\delta(t). \end{aligned}$$

白噪声可表示为

$$\begin{aligned} n(t) &= \sigma\xi(t), \\ \sigma^2 &= 2D \end{aligned} \quad (2)$$

式中,  $\sigma^2$  为噪声的方差,  $\sigma$  为噪声的均方根值,  $\xi(t)$  是均值为零、方差为 1 的白噪声. 方程 (1) 描述了处于双势阱中的粒子受到周期力  $A \sin(2\pi ft)$  ( $A$  为幅值,  $f$  为频率) 和随机力  $n(t)$  共同作用时, 在过阻尼条件下的运动. 从动力学的观点分析, 随机共振是处于双势阱的粒子在周期力和随机力协同作用下产生的, 且存在着噪声能量向周期信号能量转移的机制, 将一部分噪声能量转化为信号能量, 从而使信号得以放大形成随机共振, 并使系统输出功率谱在信号频率  $f$  处出现峰值.

在随机共振研究中, 通常双稳系统参数  $a, b$  均取为 1, 研究发现此时的随机共振只适合小信号. 根据文献 [9], 当  $a = 1, b = 1, A = 0.3, f = 0.01$  Hz,  $D = 0.31$  ( $\sigma = 0.7874$ ), 采样频率  $f_s = 5$  Hz 时, 双稳系统达到随机共振状态. 将上述参数取值代入方程 (1), 采用四阶 Runge-Kutta 算法进行数值计算, 采样点为 4000, 得到系统的输入、输出信号波形与频谱如图 1 所示, 其中频谱幅值进行了归一化处理.

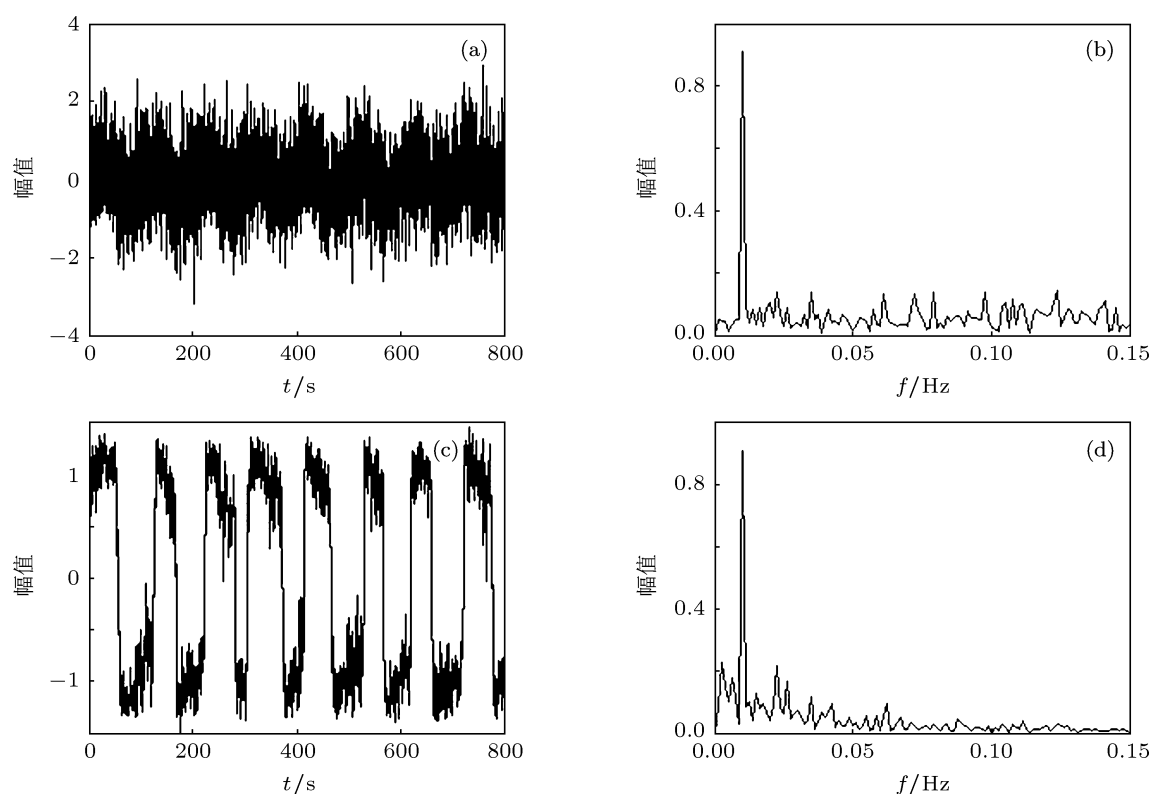


图 1 当  $f = 0.01$  Hz,  $a = b = 1$  时双稳系统的随机共振波形和频谱 (a) 系统的输入波形; (b) 系统的输入频谱; (c) 系统的输出波形; (d) 系统的输出频谱

由图 1 可见, 在输出信号中原本微弱的周期信号得到了显著增强, 出现了噪声能量向信号能量的转移, 体现出较好的随机共振现象. 这与文献 [9] 的结果一致.

上述结果表明, 通过双稳系统随机共振, 可以有效地增强小参数微弱周期信号的传输. 为了利用双稳系统实现大参数微弱周期信号的随机共振, 下面先推导方程 (1) 的参数归一化变换.

## 2.2 双稳系统参数归一化变换

当双稳系统 (1) 中参数  $a, b$  的取值不为 1 时, 引入变换

$$\begin{aligned} y &= x\sqrt{\frac{b}{a}}, \\ \tau &= at. \end{aligned} \quad (3)$$

将 (3) 式代入方程 (1) 可得

$$\begin{aligned} a\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{dy}{d\tau} &= a\sqrt{\frac{a}{b}}y - a\sqrt{\frac{a}{b}}y^3 \\ &+ A\sin\left(2\pi f\frac{\tau}{a}\right) + n\left(\frac{\tau}{a}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

方程 (1) 中  $n(t) = \sigma\xi(t)$  是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的白噪声, 经过变换后, 方程 (4) 中的噪声信号为  $n(\tau/a)$ , 相当于对  $n(t)$  在时域上进行了  $a$  倍的拉伸, 也相当于在频域上对  $n(t)$  进行了  $1/a$  倍的压缩. 而  $n(t)$  作为白噪声, 频域上在所有频率范围内均为一恒定的分量, 具有相同的功率, 频域上的拉伸或压缩不改变噪声的功率. 因此,  $n(\tau/a)$  仍是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的白噪声, 有

$$n\left(\frac{\tau}{a}\right) = \sigma\xi(\tau). \quad (5)$$

将 (5) 式代入方程 (4), 整理后可得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= y - y^3 + \sqrt{\frac{b}{a^3}}A\sin\left(2\pi\frac{f}{a}\tau\right) \\ &+ \sqrt{\frac{b}{a^3}}\sigma\xi(\tau). \end{aligned} \quad (6)$$

对比方程 (6) 和方程 (1), 注意到经过变换后双稳系统结构参数均为 1, 实现了归一化, 输入周期信号频率变为  $f/a$ , 为原来周期信号频率的  $1/a$ . 周期信号与噪声幅值同时乘上了比例因子  $\sqrt{b/a^3}$ , 进行了同比例缩放.

方程 (6) 为方程 (1) 的参数归一化形式, 两者是等价的. 因此, 对于高频信号, 通过选取较大的双稳

系统结构参数  $a$ , 可以将高频信号转化为低频信号来进行处理, 而参数  $b$  可以适应强弱不同的输入信号. 下面通过数值仿真来阐释随机共振对于大参数高频周期信号的适应性.

## 3 大参数周期信号随机共振的数值仿真与电路模拟实验

### 3.1 大参数周期信号随机共振数值仿真

以图 1 所对应的参数 ( $a = 1, b = 1, A = 0.3, f = 0.01 \text{ Hz}, f_s = 5 \text{ Hz}, \sigma = 0.7874$ ) 为参考, 此时为小参数情况, 周期信号与噪声的混合信号通过双稳系统后产生随机共振. 这一组小参数, 可以认为是某一大参数系统经过参数归一化变换后得到的. 根据参数归一化原理, 反变换回去能够得到一组大参数, 由于是等价变换, 大参数系统仍然能够发生随机共振. 假定大参数系统中高频周期信号频率  $f = 1 \text{ kHz}$  为已知, 根据参数归一化变换原则, 可以反推大参数系统中其他参数的取值, 即  $a = b = 10^5, f_s = 500 \text{ kHz}$  (保持采样频率与信号频率之比不变), 同时保持周期信号的幅值  $A = 0.3$  与噪声的均方根值  $\sigma = 0.7874$  不变, 生成输入混合信号. 将混合信号的幅值放大  $\sqrt{a^3/b} = 10^5$  倍 (归一化变换的反变换) 后代入方程 (1) 求解, 得到系统输入与输出结果如图 2 所示.

从图 2(c) 可见, 输出信号在  $\pm 1$  两个稳态值之间来回跃迁, 波形与图 1(c) 是相似的, 这正是双稳系统发生随机共振的特征. 因此, 在大参数条件下 ( $a = 10^5, b = 10^5, A = 0.3 \times 10^5, f = 1 \text{ kHz}, f_s = 500 \text{ kHz}, \sigma = 0.7874 \times 10^5$ ) 双稳系统仍然发生了随机共振.

根据参数的归一化原则, 在  $f = 1 \text{ kHz}$  确定的情况下, 参数  $a$  的取值是确定的, 必须是  $10^5$ , 而对于参数  $b$  的取值没有特殊限制,  $b$  的取值可以与  $a$  不同, 也可以取  $b > 0$  的任意数. 仍以  $f = 1 \text{ kHz}$  为例, 假定另一大参数双稳系统中结构参数的取值  $a = 10^5, b = 4000$ . 保持周期信号的幅值  $A = 0.3$  与噪声的均方根值  $\sigma = 0.7874$  不变, 生成输入混合信号, 并将混合信号的幅值放大  $\sqrt{a^3/b} = 5 \times 10^5$  倍, 代入方程 (1) 求解, 得到系统的输入与输出结果如图 3 所示. 此时双稳系统的两个稳态值  $\pm\sqrt{a/b} = \pm 5$ .

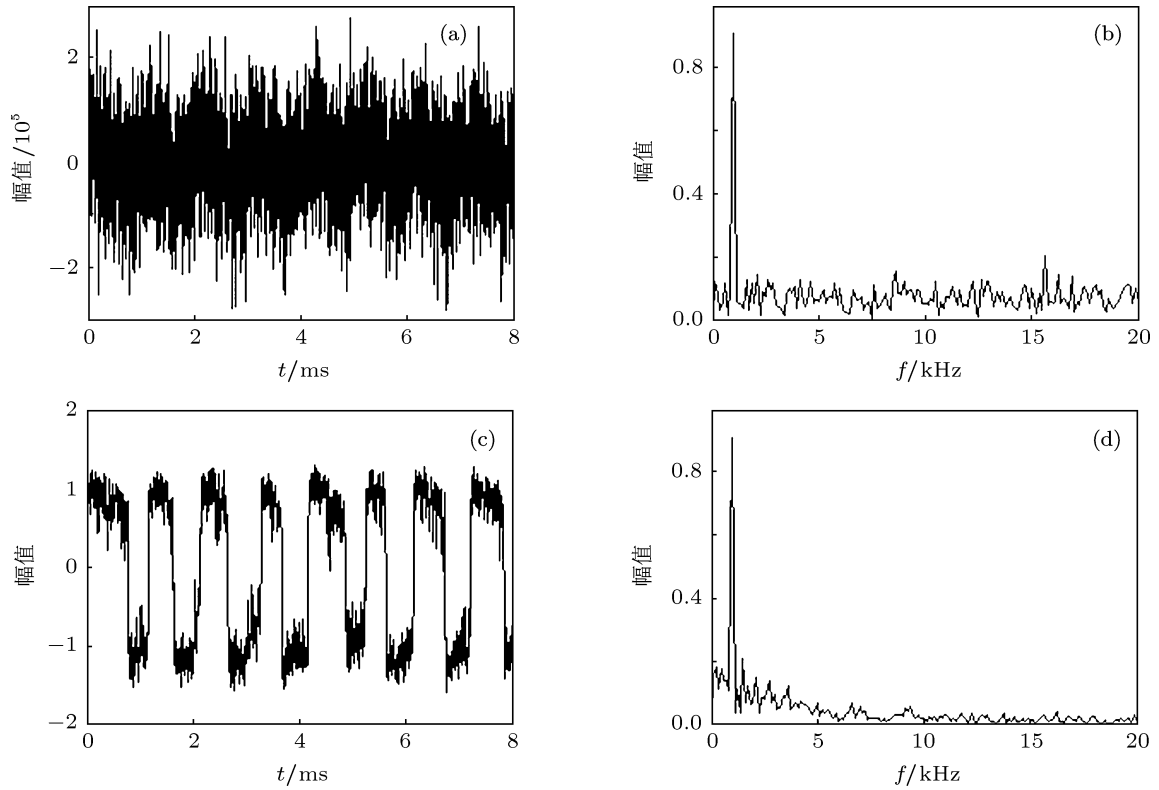


图 2 当  $f = 1 \text{ kHz}$ ,  $a = b = 10^5$  时双稳系统的随机共振波形与频谱 (a) 系统的输入波形; (b) 系统的输入频谱; (c) 系统的输出波形; (d) 系统的输出频谱

由图 3(c) 可见, 系统输出在  $\pm 5$  两个稳态值间来回跃迁, 仍然发生随机共振. 图 4 给出了  $a = 10^5$ , 参数  $b$  的取值分别为  $0.001, 1, 10^3, 10^7$  时双稳系统随机共振的输出波形, 所对应的稳态值分别为  $\pm 10^4, \pm 316.228, \pm 10, \pm 0.1$ .

由图 4 可见, 当  $b$  取不同值时, 双稳系统均处于随机共振状态, 输出波形除了来回跃迁的稳态值不同以外, 形状是完全相同的, 实际输出的稳态值与理论计算值是一致的. 而这些大参数均可归一化为图 1 所对应的同一组小参数 ( $a = 1, b = 1, A = 0.3, f = 0.01 \text{ Hz}, \sigma = 0.7874$ ). 实际上, 能够归一化为上述小参数的大参数系统有任意种, 周期信号的频率也可以取任意值.

以上分析与数值仿真表明, 对于高频周期信号, 完全可以通过调节双稳系统参数和调节混合输入信号的幅值达到随机共振状态, 实现大参数信号的增强传输. 需要指出的是, 在大参数条件下混合输入信号必须具有更大的幅值, 这在数值仿真中是能够方便实现的. 高频周期信号要实现随机共振, 最关键的是要求参数  $a$  的取值要足够大, 使参数归一化以后周期信号的频率远小于 1, 以符合小参数条件. 这也可以用双稳系统的 Kramers 跃迁率 (逃逸

速率) 来解释. 当只有噪声  $n(t)$  作用而不存在周期激励时, 质点在两个势阱间按 Kramers 跃迁率  $r_K$  进行跃迁切换.  $r_K$  表达式为 [3]

$$r_K = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right), \quad (7)$$

其中  $\Delta V = a^2/(4b)$  是双稳系统的势垒高度. 当噪声强度趋近于无穷大时, (7) 式的极限值  $r_{Klim} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}$ , 表明在双稳系统两势阱之间的跃迁率不会超过此极限值  $r_{Klim}$ . 当两势阱间跃迁率的一半与驱动的周期信号频率相匹配时, 即  $f_0 = r_K/2$  时, 随机共振现象就会产生. 因此, 能够产生随机共振的信号频率  $f_0$  必然被限制在  $0 < f_0 < r_{Klim}/2$  的范围内, 所以 Kramers 跃迁率是制约能够发生随机共振的周期信号最高频率的主要因素. 文献 [13] 也对此进行了分析, 只不过讨论的是参数  $a = 1$  时的特殊情况, 此时双稳系统只能适应频率小于 1 的小参数信号, 但据此得出通过调节参数不能实现大参数信号随机共振的论断是欠妥的. (7) 式同时也说明, 对于高频周期信号而言, 最关键的参数是  $a$ , 而对参数  $b$  的取值没有特别的要求, 这一点也被上述分析及数值仿真结果所证实.

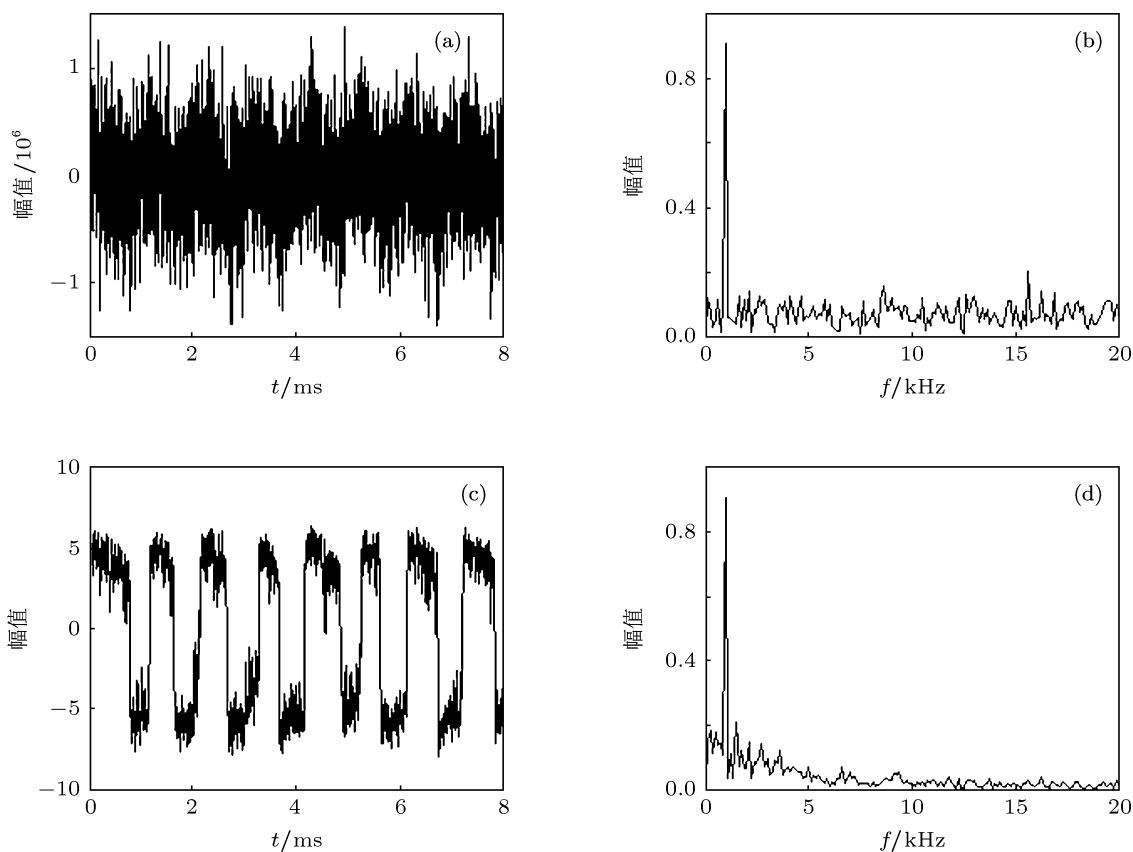


图3 当  $f = 1 \text{ kHz}$ ,  $a = 10^5$ ,  $b = 4000$  时双稳系统的随机共振波形和频谱 (a) 系统的输入波形; (b) 系统的输入频谱; (c) 系统的输出波形; (d) 系统的输出频谱

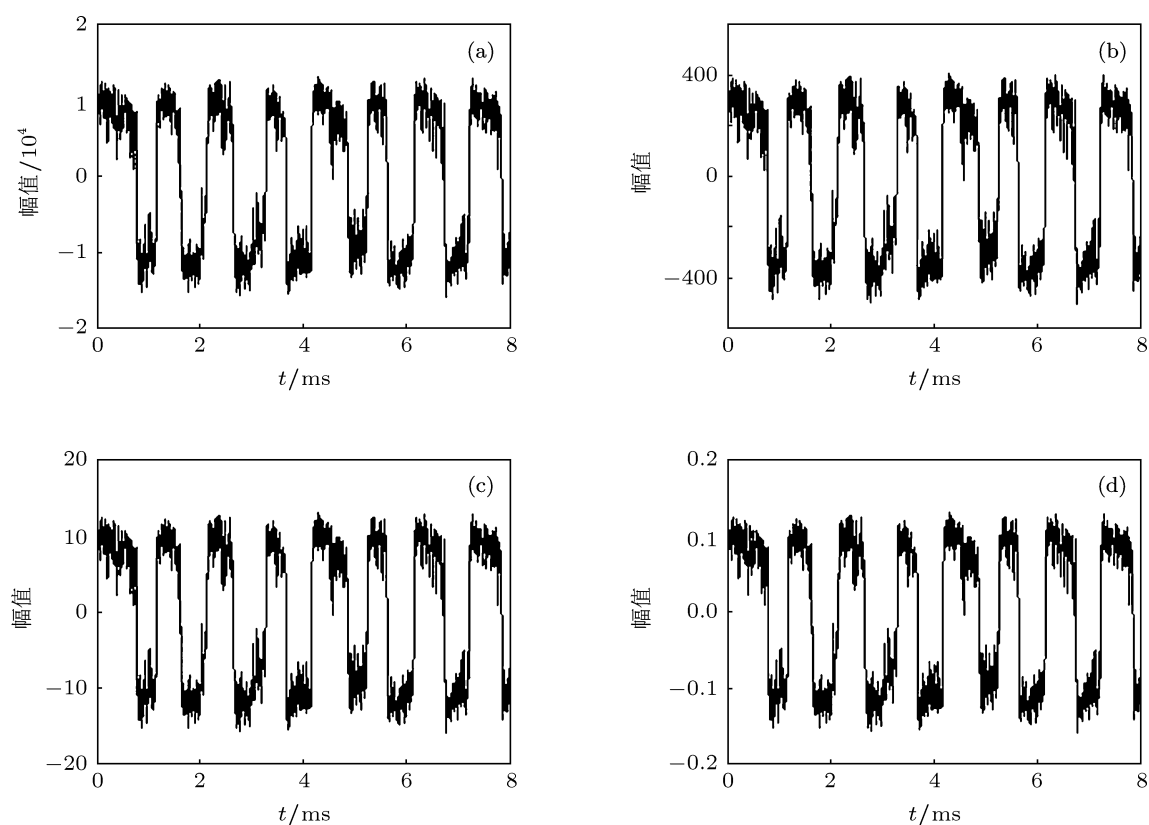


图4  $a = 10^5$ ,  $b$  取不同值时双稳系统的输出波形 (a)  $b = 0.001$ ; (b)  $b = 1$ ; (c)  $b = 10^3$ ; (d)  $b = 10^7$

### 3.2 大参数周期信号随机共振电路模拟实验

文献 [14] 对基于随机共振的弱信号探测进行了实验研究. 在实验中所取周期信号的幅值  $A = 0.09$ , 频率  $f = 17$  Hz, 噪声强度  $D = 4$ , 通过电路模拟双稳系统有效地检测出了微弱的高频周期信号. 文献 [14] 对混合输入信号并没有专门进行幅值放大. 实际上, 文献 [14] 并没有给出电路模拟双稳系统的参数值, 下面给出本文所做与文献 [14] 类似的利用电路模拟双稳系统检测微弱周期信号的结果.

方程 (1) 可以用图 5(a) 所示的反馈系统结构框图来表示, 其中包括比例放大、积分、求和、反相以及变量相乘等环节. 这些环节可以通过电路来模拟, 模拟电路如图 5(b) 所示.

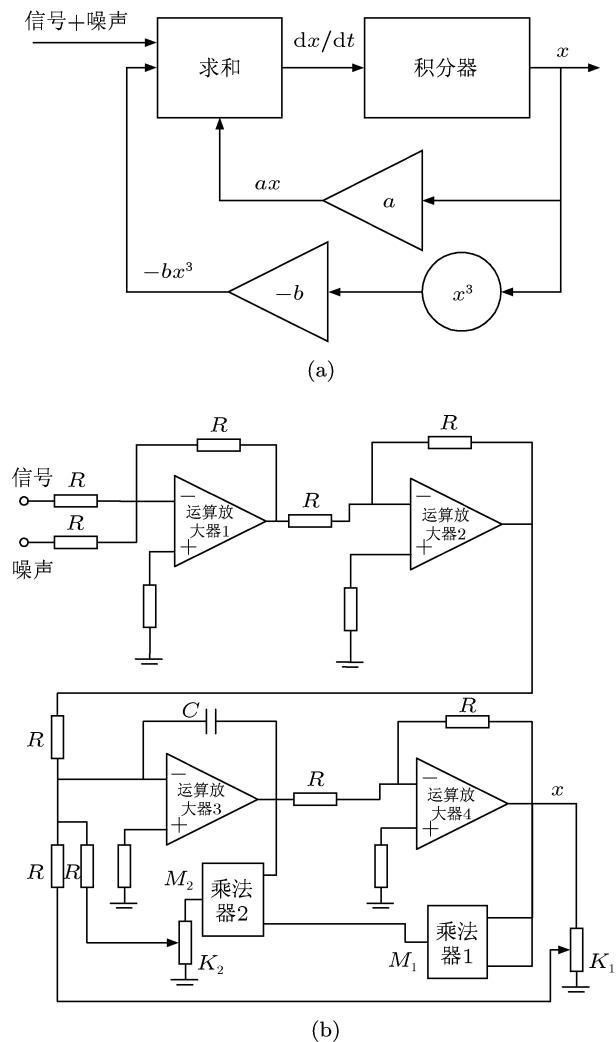


图 5 双稳系统反馈结构与模拟电路图 (a) 双稳系统反馈结构示意图; (b) 双稳系统模拟电路图

图 5(b) 中运算放大器 3、电阻  $R$ 、电容  $C$  构成积分器, 积分器输出为  $-x$ ,  $M_1$  和  $M_2$  为乘法器的比例系数, 乘法器 1 的输出为  $M_1x^2$ , 乘法器 2 的输出为  $-M_1M_2x^3$ , 经比例系数为  $K_2$  的分压器分压输入到积分器的一端; 积分器输出  $-x$  同时经反相器得到  $x$ ,  $x$  再经比例系数为  $K_1$  的分压器分压加到积分器的另一个输入端.  $K_1$  和  $K_2$  的范围均在  $(0,1]$  区间内. 输入信号 (如正弦信号  $U_0 \sin 2\pi f_0 t$ ) 与白噪声  $n(t)$  同时加到运算放大器 1 的输入端进行反相求和, 为适应模型, 将输入信号与噪声的反相求和信号送入运算放大器 2, 再反相后送到积分器的输入端.

根据模拟电路原理, 图 5(b) 所示电路系统的方程为

$$x = \int \left[ \frac{K_1}{RC} x - \frac{K_2 M_1 M_2}{RC} x^3 + \frac{U_0 \sin(2\pi f_0 t) + n(t)}{RC} \right] dt. \quad (8)$$

对 (8) 式两边求微分可得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{K_1}{RC} x - \frac{K_2 M_1 M_2}{RC} x^3 + \frac{U_0 \sin(2\pi f_0 t) + n(t)}{RC}. \quad (9)$$

比较 (8) 式与方程 (1), 可得到以下关系:

$$\begin{aligned} a &= \frac{K_1}{RC}, \\ b &= \frac{K_2 M_1 M_2}{RC}, \\ A &= \frac{U_0}{RC}, \\ n(t) &= \frac{n(t)}{RC}. \end{aligned} \quad (10)$$

取参数  $R = 15$  k $\Omega$ ,  $C = 168$  pf,  $K_1 = 0.0785$ ,  $K_2 = 0.4676$ ,  $M_1 = 0.1$ ,  $M_2 = 0.1$ , 由此可以计算得到  $a = 31150.79$ ,  $b = 1855.56$ .

实验中取信号频率  $f = 150$  Hz, 输入的正弦信号幅值  $U_0 = 100$  mV, 白噪声的均方根值  $\sigma = 955.2$  mV, 此时混合信号输入信噪比为  $-19.96$  dB. 选用采样频率  $f_s = 1$  kHz, 采样点数  $N = 10000$  对输入输出信号进行采样. 白噪声与正弦信号的混合输入以及系统的输出波形与频谱如图 6 所示.

由图 6(d) 可知, 其中存在明显的 150 Hz 周期成分及其谐波, 而从混合输入的频谱 (图 6(b)) 中已分辨不出是否有 150 Hz 的周期信号, 可见利用

随机共振原理实现了对微弱周期信号的增强传输与检测.

(10) 式所对应的参数经过归一化变换后的取值为  $a = 1, b = 1, f = 0.004815 \text{ Hz}, A \approx 0.29 \text{ V}, \sigma \approx 2.77 \text{ V}$ , 可见归一化后周期信号频率远小于  $1 \text{ Hz}$ 、幅值远小于  $1 \text{ V}$ , 满足小参数信号条件.

从表面上看, 并没有专门对输入模拟电路的混合信号幅值进行放大, 甚至比归一化以后的幅值还小, 实际上, 电路模拟的双稳系统已经将输入混合信号进行了放大, 放大的倍数为  $1/(RC) = 370370.37$ , 已经属于大参数条件下的随机共振. 这与本文以上分析是一致的.

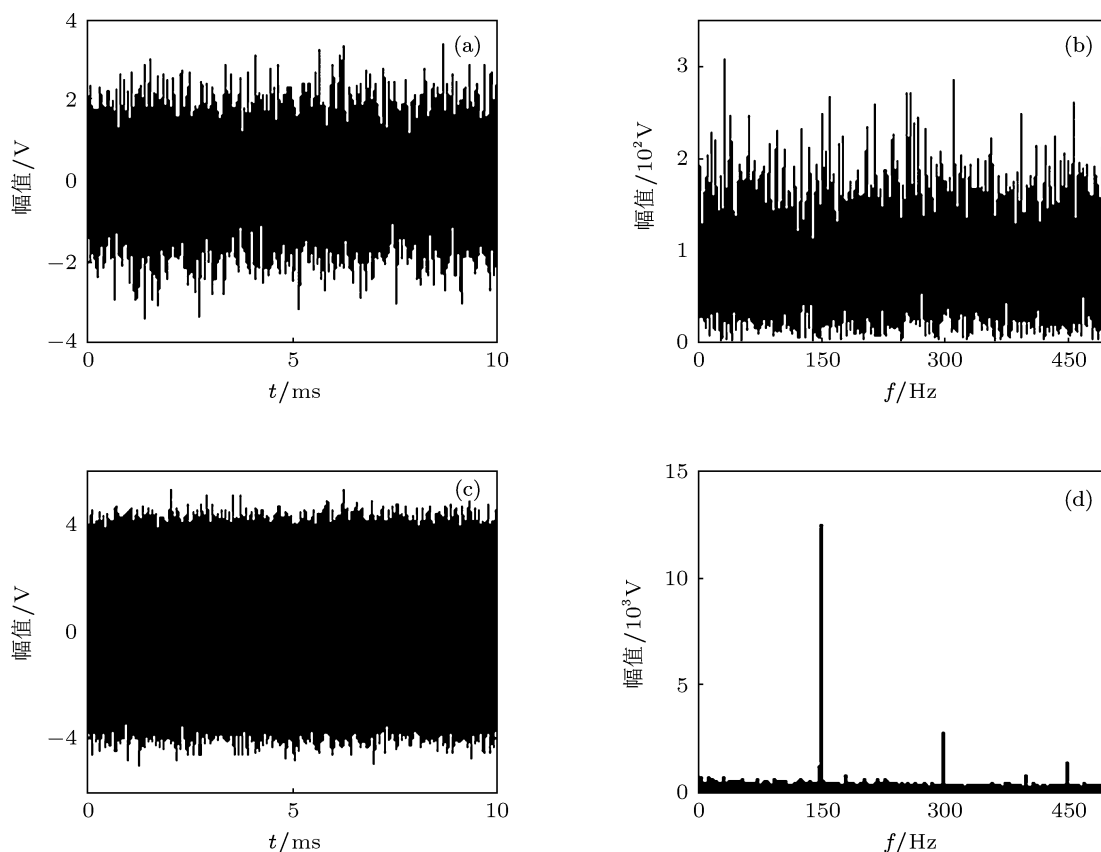


图6 双稳系统模拟电路输入输出波形与频谱 (a) 混合输入波形; (b) 输入频谱; (c) 输出波形; (d) 输出频谱

### 4 二次采样随机共振分析

在实际信号处理中, 为了处理高频信号的随机共振问题, 文献 [9—12] 给出了二次采样 (或变尺度) 频率变换方法. 该方法是通过一个频率尺度  $r$  ( $r$  是大于零的有理数), 将高频信号变换为一个符合随机共振的低频信号, 然后对该低频信号进行随机共振并识别其特征频率分量, 最后再按频率尺度  $r$  将低频信号恢复为原来的高频信号. 对于实际采集的离散信号, 二次采样频率变换方法的核心是通过频率尺度  $r$  改变方程 (1) 的数值计算步长.

记方程 (1) 中  $s(t) = A \sin(2\pi ft) + n(t)$ , 假设

当  $a = 1, b = 1, f = f_0, f_s = Mf_0, A = A_0, \sigma = \sigma_0$  时双稳系统达到随机共振状态, 其中  $A_0, f_0, R$  满足小参数随机共振条件. 进行数值仿真时, 实际上代入模型计算的是经过采样以后的离散序列. 采样间隔  $\Delta t = 1/f_s$ , 则数值仿真时混合输入信号的离散序列为

$$\begin{aligned}
 s(k) &= A_0 \sin(2\pi f_0 k \Delta t) + \sigma_0 \xi(k \Delta t) \\
 &= A_0 \sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right) + \sigma_0 \xi(k \Delta t) \\
 &\quad (k = 0, 1, 2, \dots, N - 1). \quad (11)
 \end{aligned}$$

由 (11) 式可以发现, 在  $s(k)$  中  $A_0 \sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right)$  与频

率  $f_0$  无关, 而由于白噪声频谱在  $(-\infty, +\infty)$  范围内是均匀分布, 在生成白噪声序列时, 不用考虑  $\Delta t$  的影响, 因此实际代入模型进行计算的采样序列  $s(k)$  为

$$s(k) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right) + \sigma_0 \xi(k). \quad (12)$$

由 (12) 式可见,  $s(k)$  可以看作是任意频率周期信号与白噪声混合叠加后的离散采样序列, 这说明  $s(k)$  可以看作是满足小参数条件的低频周期信号 (例如  $f = f_0$ ) 与白噪声的混合叠加, 也可以看作是任意高频周期信号 (例如当  $r = 100$  时,  $f = 100f_0$ ) 与白噪声的混合叠加. 但是在随机共振数值仿真计算中, 必须要输入数值计算步长, 也就是序列的采样间隔  $\Delta t$ . 根据前面的假设, 当采样间隔  $\Delta t = 1/f_s = 1/(Mf_0)$  时, 双稳系统达到随机共振状态. 当  $f = 100f_0$  时, 实际采样频率  $f_s = 100Mf_0$ , 此时如果以  $\Delta t = 1/(100Mf_0)$  作为计算步长代入模型进行计算, 双稳系统肯定达不到随机共振状态.

由于采样序列  $s(k)$  可以看作是任意频率周期信号与白噪声混合叠加后的离散序列, 因而二次

采样用了一个巧妙的方法. 虽然此时  $s(k)$  是频率为  $f = 100f_0$  的周期信号与白噪声的混合叠加, 却将  $s(k)$  看作是频率  $f = f_0$  的低频周期信号与噪声的叠加, 以低频周期信号采样频率所对应的采样间隔  $\Delta t = 1/(Mf_0)$  代入模型进行计算, 此时数值计算得到的双稳系统输出自然达到随机共振状态, 并在频率  $f_0$  处出现谱峰. 由于此时实际采样频率  $f_s = 100Mf_0$ , 故可推算出实际周期信号频率为  $100f_0$ .

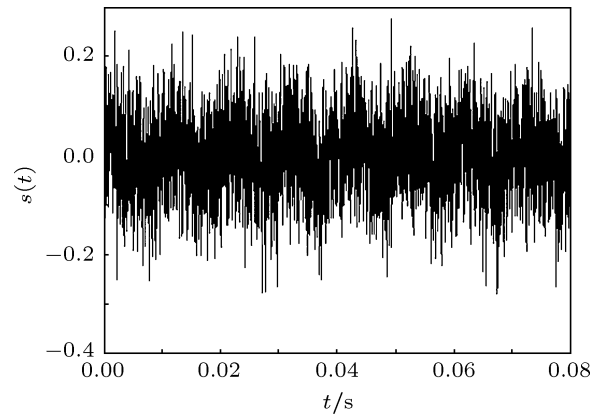


图 7 100 Hz 周期信号与噪声混合信号幅值缩小到原来的 1/10 后的波形

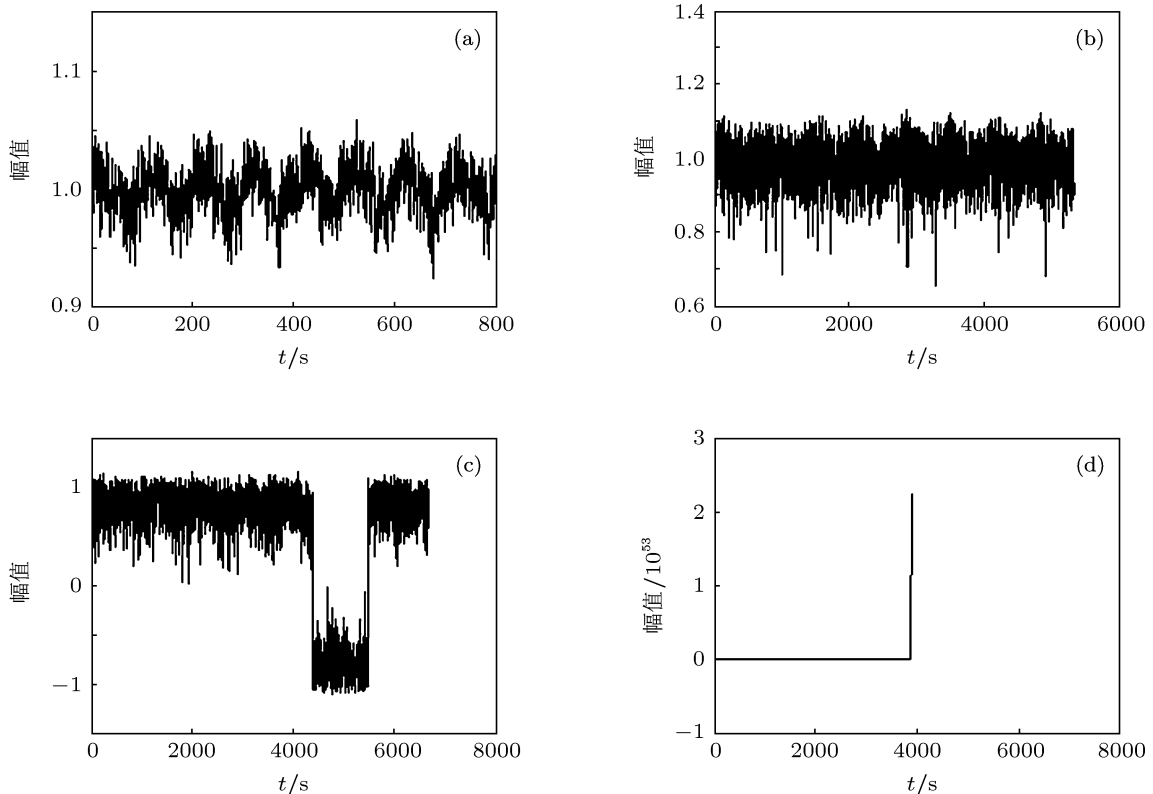


图 8 不同二次采样频率所对应的双稳系统输出波形 (a)  $f_{rs} = 5$  Hz; (b)  $f_{rs} = 0.75$  Hz; (c)  $f_{rs} = 0.6$  Hz; (d)  $f_{rs} = 0.55$  Hz



因此,在双稳系统参数  $a = 1, b = 1$  条件下,二次采样随机共振方法要求实际的混合输入采样序列必须在某个采样步长下能够发生随机共振. 确定合适的采样步长需要有一个寻优过程. 在工程实践中,混合信号在采样时通常会作放大处理,放大倍数是根据需要随时调整的,因此采样得到混合信号的信噪比是固定的,但采样序列的幅值却可能变化很大. 当混合输入信号的信噪比保持不变,对幅度进行缩放时,运用二次采样方法在搜索合适的二次采样频率过程中有可能会数值仿真发散的情况,增大了寻优的难度. 仍以图 1 所对应的小参数 ( $a = 1, b = 1, A = 0.3, f = 0.01 \text{ Hz}, f_s = 5 \text{ Hz}, \sigma = 0.7874$ ) 为参考,假定实际周期信号频率  $f = 100 \text{ Hz}$ , 采样频率  $f_s = 50 \text{ kHz}$ , 周期信号与噪声的混合信号幅值缩小到原来的  $1/10$  后的波形如图 7 所示.

当二次采样频率  $f_{rs}$  取值不同时,双稳系统输出波形如图 8 所示. 由于输入信号幅值缩小到原来的  $1/10$ ,因而直接取原参考小信号所对应的采样步长  $\Delta t = 0.2 \text{ s}$  代入模型进行计算,系统输出不会出现随机共振状态,输出只在单势阱内波动,不会发生跃迁,如图 8(a) 所示. 当  $f_{rs} = 0.75 \text{ Hz}$  时,同样没有势阱间的跃迁发生,系统输出波形如图 8(b) 所示. 当  $f_{rs} = 0.6 \text{ Hz}$  时,系统输出波形如图 8(c) 所示,此时存在着势阱间的跃迁发生,但仍没有达到随机共振状态. 图 8(d) 为二次采样频率  $f_{rs} = 0.55 \text{ Hz}$  时系统的输出波形,明显可见系统输出已经不稳定,出现发散,这对于二次采样频率的寻优过程增大了难度.

利用参数归一化方法就不存在上述问题. 根据归一化原理反推系统参数  $a, b$  的取值及混合信号的放大倍数. 首先取  $a = b = 10^4$ , 然后估算得到图 7 所示采样信号的均方根值  $\sigma_0 = 0.081$ . 而参考小信号中噪声均方根值  $\sigma = 0.7874$ , 在进行归一化反变换前先将采样信号放大  $\sigma/\sigma_0 = 9.72$  倍,然后根据归一化变换再放大  $\sqrt{a^3/b} = 10^4$  倍,得到最终混合输入采样信号,代入双稳系统模型进行求解后得到的输出波形与频谱如图 9 所示. 由图 9(a) 可见,此时系统输出具有明显的随机共振特征,系统达到随机共振状态. 此仿真结果表明,参数归一化方法与二次采样方法相比在处理大参数周期信号时更

稳定,更具有适应性.

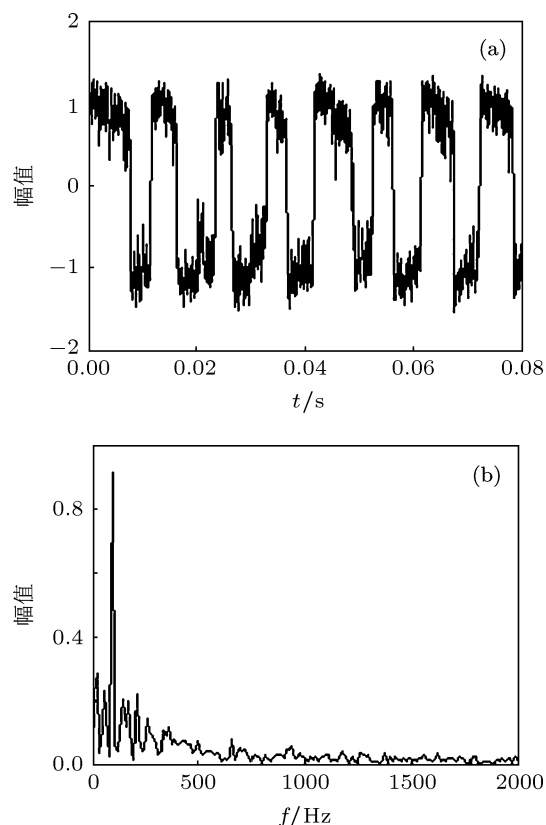


图 9 对图 7 所示信号进行归一化变换处理后的双稳系统输出波形和频谱 (a) 输出波形; (b) 输出频谱

## 5 结论

本文针对基于双稳系统随机共振原理的高频微弱周期信号检测问题,推导了双稳系统参数的归一化变换,利用归一化变换原理对大参数周期信号的随机共振进行了数值仿真. 研究表明,随机共振检测微弱周期信号不存在对周期信号频率的限制,大参数条件下混合输入信号也必须具有更大的幅值. 给出了电路模拟双稳系统随机共振的大参数条件,得到与数值仿真一致的结果. 分析了二次采样随机共振的原理,并与归一化变换方法进行了比较. 对于大参数输入信号,在幅度缩放情况下二次采样方法易出现数值仿真发散的情况,而采用参数归一化变换方法,数值仿真具有更好的稳定性和适应性. 本文通过参数调节实现随机共振的方法在大参数周期信号增强传输与检测中具有一定的指导意义与实用价值.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *Physica A* **14** L453  
 [2] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiana A 1982 *Tellus* **34** 11  
 [3] Bulsara A R, Gammaitoni L 1996 *Phys. Today* **49** 39  
 [4] Chen H, Varshney P K 2008 *IEEE Trans. Signal Process.* **56** 5031  
 [5] Liu Z Q, Zhang H M, Li Y Y, Hua C C, Gu H G 2010 *Physica A* **389** 2642  
 [6] Sasaki H, Sakane S, Saito H, Todorokihara M, Aoki R 2010 *J. Physiol. Sci.* **60** 138  
 [7] Zhang H Q, Xu W, Sun C Y, Xu Y 2011 *Int. J. Mod. Phys. B* **25** 1775  
 [8] Lin M, Huang Y M, Fang L M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2041 (in Chinese) [林敏, 黄咏梅, 方利民 2008 物理学报 **57** 2041]  
 [9] Leng Y G, Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2432 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇 2003 物理学报 **52** 2432]  
 [10] Leng Y G, Wang T Y, Qin X D, Li R X, Guo Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 717 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇, 秦旭达, 李瑞欣, 郭焱 2004 物理学报 **53** 717]  
 [11] Leng Y G, Leng Y S, Wang T Y, Guo Y 2006 *J. Sound Vib.* **292** 788  
 [12] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇, 郭焱, 吴振勇 2007 物理学报 **56** 30]  
 [13] Leng Y G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5196 (in Chinese) [冷永刚 2009 物理学报 **58** 5196]  
 [14] Zhu G Q, Ding K, Zhang Y, Zhao Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3001 (in Chinese) [朱光起, 丁珂, 张宇, 赵远 2010 物理学报 **59** 3001]  
 [15] Chen M, Hu N Q, Qin G J, An M C 2009 *Chin. J. Mech. Eng.* **45** 131 (in Chinese) [陈敏, 胡萑庆, 秦国军, 安茂春 2009 机械工程学报 **45** 131]

# The analysis of stochastic resonance of periodic signal with large parameters\*

Yang Ding-Xin<sup>†</sup> Hu Zheng Yang Yong-Min

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 4 July 2011; revised manuscript received 3 November 2011)

## Abstract

It is of significance in engineering to achieve stochastic resonance of periodic signal with large frequency by turning the parameters of a bistable system. The normalization transform of bistable system parameter is deduced. Stochastic resonance of periodic signal with large parameters is exhibited by numerical simulation based on the proposed normalization transform, by which an arbitrary high frequency periodic signal can be processed. Analog circuit is used to verify the stochastic resonance happening in the bistable system with large parameters. The mechanism of realizing a periodic signal with large parameters by twice sampling stochastic resonance is analyzed, which is compared with normalization transform method through numerical simulation. The simulation results show that the numerical solution of twice sampling stochastic resonance is prone to being unstable with the variation of mixed input signal amplitude, while the normalization transform method possesses more stability and adaptability.

**Keywords:** bistable system, stochastic resonance with large parameters, detection of weak periodic signal, numerical simulation

**PACS:** 05.40.-a, 02.60.Cb

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50905184).

<sup>†</sup> E-mail: yangdingxin@163.com