

具有频率涨落的简谐力激励下线性 谐振子的随机共振*

张良英^{1)†} 金国祥²⁾ 曹力³⁾

1) (襄樊学院物理与电子工程学院, 襄樊 441053)

2) (武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室, 武汉 430073)

3) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

(2011年5月29日收到; 2011年9月2日收到修改稿)

针对线性谐振子受到具有频率涨落的简谐力激励的情况, 计算出系统响应的一阶矩解析表达式. 研究发现系统的输出响应以固有频率振动, 响应振幅随简谐激励力频率的变化出现“真实”随机共振, 随固有频率的变化出现抑制和共振两种现象.

关键词: 频率噪声, 一阶矩, 随机共振

PACS: 05.40.-a, 42.60.Mi

1 引言

噪声有两面性, 我们通常看到的是其不利的一面, 噪声有利的一面在随机共振上有很好的表现. 20世纪90年代初, 人们认为只有在非线性系统中产生随机共振, 后来发现在线性系统中也可以产生随机共振^[1-11]. 传统的随机共振一般由信噪比与噪声强度的关系来体现, 文献[12]在传统的随机共振基础上又发现了广义的随机共振, 即系统响应的某些函数(如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等)随噪声强度以外的参量(如信号振幅、频率或噪声的相关时间等)非单调变化. 以往的研究大多局限于过阻尼的情况, 即研究具有一阶微分的Langevin方程, 近年来, 对二阶随机微分方程的随机共振研究十分引人注目. 王辅忠等^[13]用电子线路模拟的方法对Duffing系统进行了随机共振实验研究, 发现在一定条件下通过改变阻尼系数可获得较高的输出信噪比. 由噪声驱动的线性谐振子是一个基本的随机动力学系统, 近年来研究者做了许多工作, 具有涨落频率的谐振子已成为物

理学、生物学和化学等诸多领域的研究对象. 2003年, Gitterman^[14]研究了受外部周期力驱动的频率涨落的衰减线性谐振子, 发现输出信号的振幅和作为噪声参数的跃迁率之间存在随机共振. 2004年, Gitterman^[15]又研究了受外部周期力驱动但阻尼系数涨落的衰减线性谐振子, 发现输出与输入信号振幅之比的平方随噪声参数的变化存在着随机共振. 2009年, 靳艳飞等^[16]研究了随机有色噪声参数激励和周期调制噪声外激励联合作用下的线性阻尼谐振子的随机共振, 得出输出信号的振幅存在传统随机共振、广义随机共振和“真实”随机共振.

实际应用中经常遇到周期信号的频率和相位存在噪声的情况, 在通信系统中相位噪声对系统性能影响的分析一直是研究的难点之一^[17]. 用随机共振法检测微弱信号时发现, 调频波的相位项含有噪声^[18]. 当随机共振应用到水声信号低频线谱的检测时, 影响水声信号的频率漂移就是相位涨落^[19]. 文献[20]将频率有涨落的周期信号输入单模激光增益模型, 发现输出信噪比随频率噪声强度、抽运噪声强度和量子噪声强度的变化均出现

* 国家自然科学基金(批准号: 11045004)和湖北省教育厅科研基金重点项目(批准号: D20101506)资助的课题.

† E-mail: ly850@sohu.com

随机共振. 本文研究受具有频率涨落的外部简谐力激励的线性谐振子, 计算出系统响应的一阶矩, 发现响应振幅随频率噪声强度的变化出现传统随机共振, 随简谐激励力频率的变化出现“真实”随机共振, 随固有频率的变化出现抑制和共振两种现象.

2 频率有噪声的简谐激励下线性谐振子的一阶矩

线性谐振子在简谐力激励下的微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \cos \Omega t. \quad (1)$$

如果简谐激励力的频率存在噪声, 可以写出瞬时角频率为

$$\tilde{\Omega} = \frac{d\phi(t)}{dt} = \Omega + \xi(t), \quad (2)$$

式中, $\phi(t)$ 为瞬时相位, $\xi(t)$ 为高斯白噪声, 它的统计性质为

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t)\xi(s) \rangle &= D\delta(t-s). \end{aligned} \quad (3)$$

由于瞬时角频率与瞬时相位之间互为微分和积分关系, 即

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_0^t \tilde{\Omega} dt \\ &= \Omega t + \int_0^t \xi(s) ds, \end{aligned}$$

因此频率存在噪声的简谐激励力为 $\cos \left[\Omega t + \int_0^t \xi(s) ds \right]$, 其统计平均为

$$\left\langle \cos \left[\Omega t + \int_0^t \xi(s) ds \right] \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= x_0 \cos \omega t + \frac{u_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{D \left(\frac{D^2}{4} + \omega^2 + \Omega^2 \right)}{2\omega \left[\frac{D^2}{4} + (\Omega + \omega)^2 \right] \left[\frac{D^2}{4} + (\Omega - \omega)^2 \right]} \sin \omega t \\ &\quad - \frac{\frac{D^2}{4} - \Omega^2 + \omega^2}{\left[\frac{D^2}{4} + (\Omega + \omega)^2 \right] \left[\frac{D^2}{4} + (\Omega - \omega)^2 \right]} \cos \omega t \\ &= A \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

由 (8) 式可知, 系统的输出响应是等幅简谐振动, 振动频率和自由振动的固有频率相同, 振幅为

$$A = \left(\left\{ x_0 - \frac{\frac{D^2}{4} + \omega^2 - \Omega^2}{\left[\frac{D^2}{4} + (\Omega + \omega)^2 \right] \left[\frac{D^2}{4} + (\Omega - \omega)^2 \right]} \right\}^2 \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \left\langle \exp(i\Omega t) \exp \left(i \int_0^t \xi(s) ds \right) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \exp(-i\Omega t) \exp \left(-i \int_0^t \xi(s) ds \right) \right\rangle \right\} \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} D t \right) \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

线性谐振子在频率有涨落的简谐力激励下的随机微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \cos \left[\Omega t + \int_0^t \xi(s') ds' \right], \quad (5)$$

式中 $\omega \neq 0$. 方程 (5) 的解为

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{u_0}{\omega} \sin \omega t \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) \cos \left[\Omega s \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \xi(s') ds' \right] ds, \end{aligned} \quad (6)$$

式中, x_0 是线性谐振子自由振动的初始位移, u_0 是线性谐振子自由振动的初始速度. 对 (6) 式进行统计平均可得

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= x_0 \cos \omega t + \frac{u_0}{\omega} \sin \omega t \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) \\ &\quad \times \left\langle \cos \left[\Omega s + \int_0^s \xi(s') ds' \right] \right\rangle ds \\ &= x_0 \cos \omega t + \frac{u_0}{\omega} \sin \omega t \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \int_0^t \exp \left(-\frac{1}{2} D s \right) \\ &\quad \times \sin \omega(t-s) \cos^{(\Omega s)} ds. \end{aligned} \quad (7)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 得到系统响应的一阶矩为

$$+ \left\{ \frac{u_0}{\omega} + \frac{D \left(\frac{D^2}{4} + \omega^2 + \Omega^2 \right)}{2\omega \left[\frac{D^2}{4} + (\Omega + \omega)^2 \right] \left[\frac{D^2}{4} + (\Omega - \omega)^2 \right]} \right\}^{1/2}, \quad (9)$$

初相位为

$$\varphi = \arctan \left\{ \left[\frac{u_0}{\omega} + \frac{D \left(\frac{D^2}{4} + \Omega^2 + \omega^2 \right)}{2\omega \left(\frac{D^2}{4} + (\Omega + \omega)^2 \right) \left(\frac{D^2}{4} + (\Omega - \omega)^2 \right)} \right] \times \left[x_0 - \frac{\frac{D^2}{4} + \omega^2 - \Omega^2}{\left(\frac{D^2}{4} + (\Omega + \omega)^2 \right) \left(\frac{D^2}{4} + (\Omega - \omega)^2 \right)} \right]^{-1} \right\}. \quad (10)$$

由 (9) 式可知: 振幅不但与自由振动的固有频率、简谐激励力的频率和频率噪声强度有关, 还与初始条件有关. 本文讨论 $x_0 = u_0 = 0$, 即线性谐振子初始“静寂”的情况下, 对外部激励力的响应. 相应振幅 A 的表达式为

$$A = \frac{\sqrt{D^2 \left(\frac{D^2}{4} + \omega^2 + \Omega^2 \right)^2 + 4\omega^2 \left(\frac{D^2}{4} - \Omega^2 + \omega^2 \right)^2}}{2\omega \left[\frac{D^2}{4} + (\Omega + \omega)^2 \right] \left[\frac{D^2}{4} + (\Omega - \omega)^2 \right]}. \quad (11)$$

全面反映自由振动初始值贡献的工作, 拟另文发表.

3 输出响应振幅的随机共振

3.1 响应振幅随频率噪声强度的变化

当简谐激励力频率 $\Omega = 50, 70, 90$ 时, 根据 (11) 式得到的 $A-D$ 曲线如图 1(a) 所示. 从图 1(a) 可以看出: 系统响应振幅 A 随频率噪声强度 D 的变化出现一个共振峰, 呈现传统的随机共振. 随着简谐激励力频率的增大, 共振峰位置向右移动, 且峰值降低.

当自由振动的固有频率 $\omega = 10, 20, 30$ 时, 根据 (11) 式得到的 $A-D$ 曲线如图 1(b) 所示. 从图 1(b) 可以看出, 振幅 A 随频率噪声强度 D 的变化出现一个共振峰, 呈现传统的随机共振. 随着固有频率 ω 的增大, 共振峰位置向左移动, 且峰值降低, 增大到一定值时共振峰消失.

3.2 响应振幅随简谐激励力频率的变化

当简谐激励力的频率噪声强度 $D = 10, 20, 30$ 时, 根据 (11) 式得到的 $A-\Omega$ 曲线如图 2(a) 所示. 从

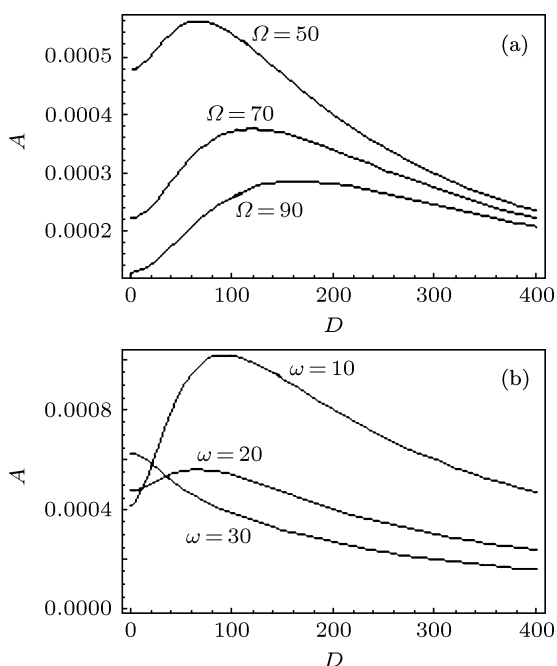


图 1 振幅 A 随频率噪声强度 D 的变化 (a) $\omega = 20$; (b) $\Omega = 50$

图 2(a) 可以看出: 系统响应振幅 A 随简谐激励力频率 Ω 的变化出现一个共振峰. 随着频率噪声强度的增大, 共振峰位置向左移动, 且峰值降低, 增大到一定值时共振峰消失.

当固有频率 $\omega = 20, 30, 40$ 时, 根据 (11) 式得到的 $A-\Omega$ 曲线如图 2(b) 所示. 从图 2(b) 可以看出, 系统响应振幅 A 随简谐激励力频率 Ω 的变化出现一个共振峰. 随着固有频率的增大, 共振峰位置向右移动, 且峰值降低.

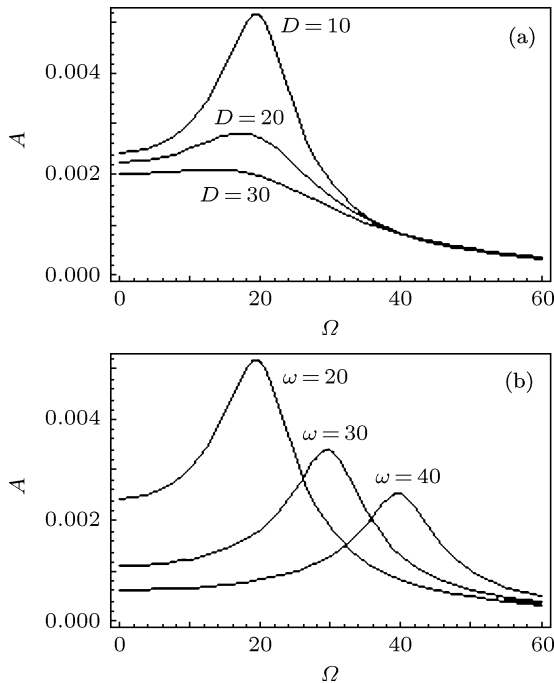


图 2 振幅 A 随简谐激励力频率 Ω 的变化 (a) $\omega = 20$; (b) $D = 10$

3.3 响应振幅随固有频率的变化

当简谐激励力的频率噪声强度 $D = 7, 14, 35$ 时, 根据 (11) 式得到的 $A-\omega$ 曲线如图 3(a) 所示. 从图 3(a) 可以看出: 系统响应振幅 A 随固有频率 ω 的变化先出现一个谷, 将这种振幅有极小值的现象称为抑制, 在简谐激励力的频率处出现一个共振峰. 随着噪声强度的增大, 谷位置向右移动, 深度变浅, 共振峰位置不变, 峰值降低, 当频率噪声强度增大到接近激励力频率时, 谷和共振峰消失.

当简谐激励力频率 $\Omega = 40, 50, 60$ 时, 根据 (11) 式得到的 $A-\omega$ 曲线如图 3(b) 所示. 从图 3(b) 可以看出: 系统响应振幅 A 随固有频率 ω 的变化先出现一个谷, 后出现一个峰, 即出现抑制和共振两种现象. 随着简谐激励力频率的增大, 谷位置向左移动,

深度变浅, 共振峰位置向右移动, 峰值降低.

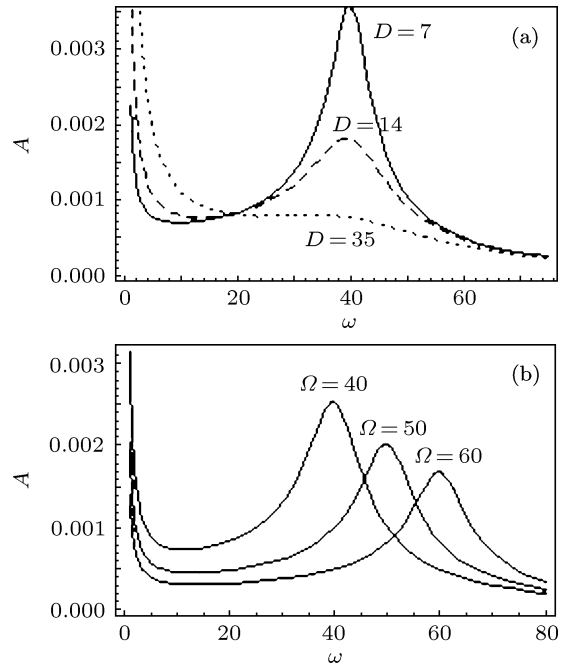


图 3 振幅 A 随固有频率 ω 的变化 (a) $\Omega = 40$; (b) $D = 10$

图 2 和图 3 均说明: 共振峰的位置出现在固有频率和简谐激励力频率相等处, 该现象类似于线性谐振子在简谐激励下发生的共振, 称其为“真实”的随机共振^[15]. 图 2(a) 和图 3(a) 还说明: 频率噪声强度相当于阻尼系数, 类似于过阻尼现象, 噪声强度增大到一定值后抑制和共振现象均消失.

4 结论

本文研究了线性谐振子在频率存在噪声的简谐力激励下系统响应的一阶矩, 推导得到了一阶矩的表达式. 研究表明: 系统的输出响应是以固有频率为振动频率的简谐振动; 系统的输出响应振幅出现了“真实”随机共振和抑制现象, 噪声强度增大到一定值后共振和抑制现象均消失.

本文只讨论了 $x_0 = u_0 = 0$ 的情况下响应振幅的随机共振特性, 由于线性谐振子是无阻尼的, 在 x_0 和 u_0 不是都为零的情况下, 总响应振幅的随机共振特性会发生定性的改变. 但我们发现在 x_0 和 u_0 均很小的情况下, 本文的结果在定性和定量上都是正确的. 只有在初始 x_0 和 u_0 达到一定值时, 总响应振幅才会开始偏离本文的结果. 由于许多实际系统是在固有振动未曾开启的情况下突然受到外界激励的, 故本文的结论有一定的参考价值.

- [1] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江, 李蓉, 温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [2] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese) [张良英, 曹力, 吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]
- [3] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2003 物理学报 **52** 2712]
- [4] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1201
- [5] Li J L, Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
- [6] Zhou B C, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5623 (in Chinese) [周丙常, 徐伟 2007 物理学报 **56** 5623]
- [7] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉, 刘立, 曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
- [8] Lin M, Huang Y M 2006 *Proc. Chin. Soc. Electr. Eng.* **26** 128 (in Chinese) [林敏, 黄咏梅 2006 中国电机工程学报 **26** 128]
- [9] Jin G X, Cao L, Zhang L Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3739 (in Chinese) [金国祥, 曹力, 张良英 2007 物理学报 **56** 3739]
- [10] Chen D Y, Wang Z L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3333 (in Chinese) [陈德彝, 王忠龙 2008 物理学报 **57** 3333]
- [11] Song Y L 2008 *Acta Phys. Sin.* **55** 6482 (in Chinese) [宋艳丽 2008 物理学报 **55** 6482]
- [12] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [13] Wang F Z, Wen X D, Li R, Qin G R 1996 *J. Beijing Normal Univ.* **32** 47 (in Chinese) [王辅忠, 温孝东, 李蓉, 秦光戎 1996 北京师范大学学报 **32** 47]
- [14] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
- [15] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
- [16] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [17] Wang Y J, Zhao H L, Li M J 2010 *J. Nanjing Univ. Aeron. Astron.* **42** 68 (in Chinese) [王永建, 赵洪林, 李明江 2010 南京航空航天大学学报 **42** 68]
- [18] Zhang L B, Zhang L Y 2009 *Meas. Control Techn.* **28** 89 (in Chinese) [张良斌, 张良英 2009 测控技术 **28** 89]
- [19] Zhang X B, Dong H Y, Xuan Z L 2008 *Appl. Acoust.* **27** 283 (in Chinese) [张晓兵, 董华玉, 玄兆林 2008 应用声学 **27** 283]
- [20] Zhang L Y, Jin G X, Cao L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044207 (in Chinese) [张良英, 金国祥, 曹力 2011 物理学报 **60** 044207]

Stochastic resonance of linear harmonic oscillator subjected to simple harmonic force with frequency fluctuation*

Zhang Liang-Ying^{1)†} Jin Guo-Xiang²⁾ Cao Li³⁾

1) (*School of Physics and Electronic Engineering, Xiangfan University, Xiangfan 441053, China*)

2) (*Key Laboratory of Intelligent Robot of Hubei Province, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China*)

3) (*School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

(Received 29 May 2011; revised manuscript received 2 September 2011)

Abstract

In view of the situation that the linear harmonic oscillator is subjected to the simple harmonic force with the frequency fluctuation, we work out the expression of the first-order moment for the system response. It is found that the system output response vibrates at the natural frequency, that the response amplitude shows bona-fide stochastic resonance as the simple harmonic excitation force frequency varies, and that the suppression and the resonance appears as the natural frequency varies.

Keywords: frequency noise, first-order moments, stochastic resonance

PACS: 05.40.-a, 42.60.Mi

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11045004) and the Key Program of the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Hubei Province, Chain (Grant No. D20101506).

† E-mail: ly850@sohu.com