

利用混沌信号幅值实现混沌同步

唐良瑞[†] 樊冰 亢中苗

(华北电力大学电气与电子工程学院, 北京 102206)

(2011年7月28日收到; 2011年12月20日收到修改稿)

构造了一个三维混沌系统, 简要分析了该混沌系统的平衡点性质、混沌吸引子相图和 Lyapunov 指数等特性. 在此基础上, 利用反馈同步思想设计了一种利用混沌信号部分信息实现混沌同步的方法, 完成了三维混沌系统的同步. 该方法仅利用混沌信号幅值信息即可实现两个混沌系统的同步, 其同步建立与混沌信号的极性无关, 此特性可有效提高混沌通信质量. 通过分析系统的条件 Lyapunov 指数证实该方法的有效性, 数值仿真表明该方法与利用混沌信号全部信息的线性反馈同步法相比, 同步建立时间基本相同.

关键词: 三维混沌, 混沌同步, 条件 Lyapunov 指数, 混沌通信

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Ac, 05.45.Vx

1 引言

混沌同步因其在物理学、信息科学及保密通信等领域的重要价值, 已成为混沌研究领域的热点之一. 自 1990 年 Pecora 和 Carroll^[1] 提出了一种混沌同步方法首次实现了两个混沌系统之间的同步以来, 混沌同步的理论研究有了极大的进展. 到目前为止, 人们已提出多种方法用以实现混沌同步, 主要有驱动-响应同步法^[1-3]、主动-被动同步法^[4]、反馈控制同步法^[5-9]、自适应同步法^[10-12]、主动控制同步法^[13,14]、非线性状态观测器同步法^[15,16]、神经网络同步法^[17]等.

虽然人们已对混沌同步问题做了大量研究, 但是目前大多数混沌同步方法都是基于完整的混沌信号来研究混沌系统间的同步问题, 即利用混沌信号的全部信息来实现混沌同步, 对于是否可以仅采用混沌信号的部分信息来实现混沌同步的问题则鲜有讨论. 而在混沌保密通信领域, 若能实现仅利用混沌信号的部分信息建立同步, 则有可能同时实现信息的传递与同步, 因而该问题对保密通信具有重要意义. 针对这一问题, 本文提出了一种仅利用混沌信号的部分信息来实现混沌同步的方法. 该方法利用混沌信号的幅值信息实现混沌系统同步, 其同步建立与混沌信号的极性无关. 理论分析与数值

仿真结果证明了该方法的有效性.

2 三维混沌系统

2.1 混沌系统数学模型

三维混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + by + yz, \\ \dot{y} &= cx - dy - xz, \\ \dot{z} &= ex - fz + gxy,\end{aligned}\quad (1)$$

式中 a, b, c, d, e, f, g 为实常数. 当 $a = 25, b = 16, c = 40, d = 4, e = 5, f = 5, g = 7$ 时, 系统存在一个典型的混沌吸引子, 如图 1 所示.

2.2 耗散性分析

对系统 (1), 有

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{x} + \frac{\partial \dot{y}}{y} + \frac{\partial \dot{z}}{z} \\ &= -(a + d + f).\end{aligned}\quad (2)$$

当 $a + d + f > 0$ 时, 系统 (1) 为一耗散系统, 其相体积元 $V(t) = V(0)e^{-(a+d+f)t}$ 按指数速率收缩; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 相空间体积为零, 运动轨迹被吸引到一个有限的相空间中, 这就是吸引子.

[†] E-mail: tangliangrui@163.com

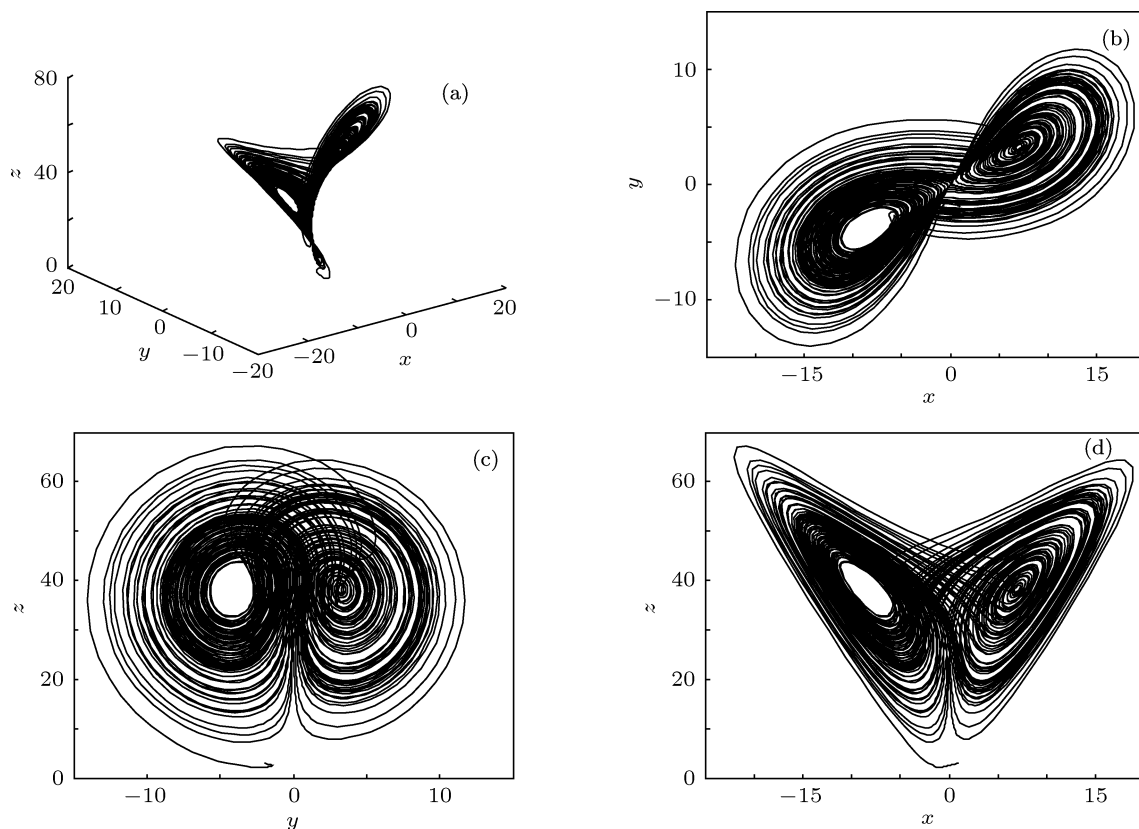


图1 混沌系统吸引子 (a) x - y - z 三维吸引子; (b) x - y 二维吸引子; (c) y - z 二维吸引子; (d) x - z 二维吸引子

2.3 平衡点

平衡点的稳定性直接决定了系统的动力学特征. 系统 (1) 的平衡点可以通过下列方程组求得:

$$\begin{cases} -ax + by + yz = 0, \\ cx - dy - xz = 0, \\ ex - fz + gxy = 0. \end{cases} \quad (3)$$

求解方程组 (3) 可得系统的三个平衡点 $S_0(0, 0, 0)$, $S_1(6.95, 3.21, 38.15)$ 和 $S_2(-8.5, -3.92, 38.15)$ 以及各平衡点处 Jacobi 矩阵的特征值 λ_1, λ_2 和 λ_3 . 系统各平衡点处 Jacobi 矩阵的特征值如表 1 所列.

表1 系统各平衡点处 Jacobi 矩阵的特征值

平衡点	λ_1	λ_2	λ_3
S_0	-5	12.89	-41.89
S_1	-39.15	$2.57 + i7.06$	$2.57 - i7.06$
S_2	-35.93	$0.97 + i9.56$	$0.97 - i9.56$

根据 Routh-Hurwitz 条件 [18], 三个平衡点处 Jacobi 矩阵特征值的实部不全为负值, 因此三个平衡点都是不稳定的鞍点.

2.4 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数

大多数非线性动力学系统都可以用 Lyapunov 指数来描述它的特征, Lyapunov 指数代表相邻轨道在相空间的平均辐射率. 三维系统的动力学行为与 Lyapunov 指数 L_1, L_2 和 L_3 之间的对应关系如表 2 所列.

表2 三维系统的动力学行为与 Lyapunov 指数的对应关系

L_1	L_2	L_3	系统动力学行为
-	-	-	不动点
0	-	-	周期运动
0	0	-	准周期运动
+	0	-	混沌

本文采用奇异值分解的方法求得系统 (1) 的三个 Lyapunov 指数分别为 $L_1 = 2.29, L_2 = 0, L_3 = -36.68$. 其中最大 Lyapunov 指数 $L_{\max} = L_1 = 2.29$, 比 Lorenz 系统的最大 Lyapunov 指数 $L_{L\max}$ 要大 ($L_{L\max} = 0.897$) [19], 说明系统 (1) 比 Lorenz 系统具有更为复杂的动力学行为.

三维系统的 Lyapunov 维数 D_L 可表示为

$$D_L = j + \frac{1}{|L_{j+1}|} \sum_{i=1}^j L_i, \quad (4)$$

式中 j 表示当三维系统的所有 Lyapunov 指数非递升排序 (即 $L_1 \geq L_2 \geq L_3$) 后, 满足 $\sum_{i=1}^j L_i \geq 0$ 的最大整数. 将系统 (1) 的 Lyapunov 指数代入 (4) 式得 $D_L = 2.06$, 系统的 Lyapunov 维数是分数维数 [20], 验证了该系统为混沌系统.

3 利用幅值实现混沌同步

本文以三维混沌系统 (1) 为例, 采用单变量反馈的方式, 当 y 作为驱动变量时, 响应系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + by_1 + y_1z_1, \\ \dot{y}_1 &= cx_1 - dy_1 - x_1z_1 + mf(y, y_1), \\ \dot{z}_1 &= ex_1 - fz_1 + gx_1y_1, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 m 为反馈系数, $f(y, y_1)$ 为反馈函数. 设计反馈函数为

$$f(y, y_1) = \text{sgn}(y_1)|y| - y_1, \quad (6)$$

式中 $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数. 反馈函数的第一项由驱动变量的绝对值与响应系统中对应变量的极性复合而成. 由反馈函数可知, 混沌同步在建立过程中仅需考虑驱动信号的幅值 (绝对值), 而无需考虑驱动

信号的极性正负, 这种特性使得本方法在保密通信系统中具有很大的应用潜力.

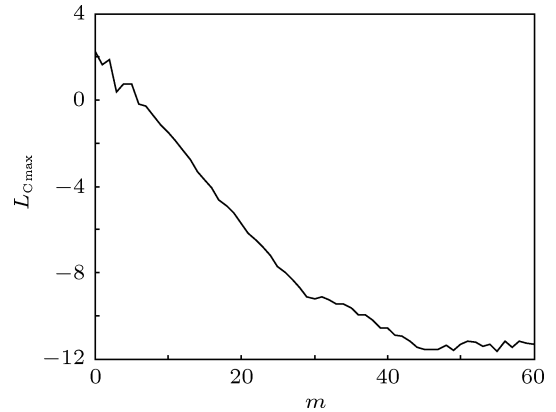


图 2 响应系统的最大条件 Lyapunov 指数 L_{Cmax} 随反馈系数 m 的变化

下面通过计算响应系统 (5) 的条件 Lyapunov 指数来判断驱动系统与响应系统是否能够达到同步. 在给定参数为 $a = 25, b = 16, c = 40, d = 4, e = 5, f = 5, g = 7$ 时, 采用奇异值分解的方法 [21] 来计算其条件 Lyapunov 指数. 图 2 所示为响应系统的最大条件 Lyapunov 指数 L_{Cmax} 随反馈系数 m 的变化情况.

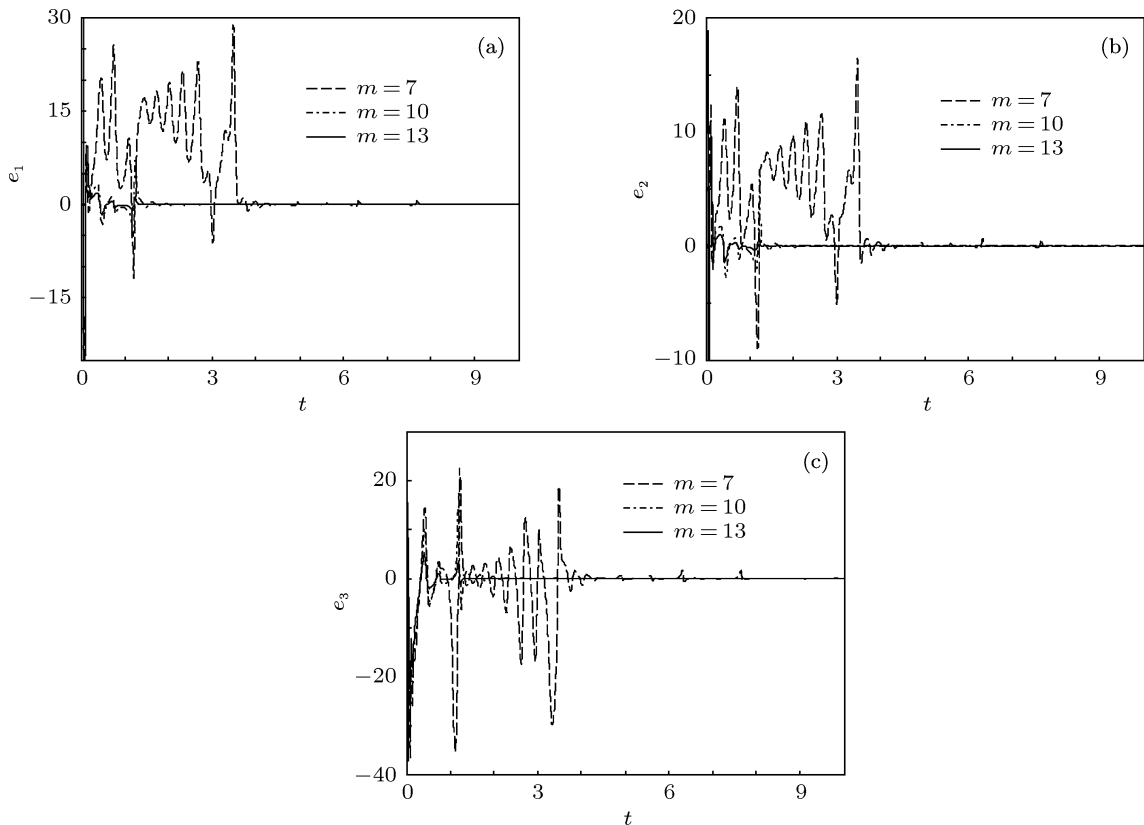


图 3 反馈系数 $m = 7, 10, 13$ 时各状态变量的同步过程 (a) 变量 x ; (b) 变量 y ; (c) 变量 z

当反馈系数 $m > 6$ 时, 系统的最大条件 Lyapunov 指数小于零, 说明在单变量 y 驱动的情况下, 选择大于 6 的反馈系数可实现响应系统与驱动系统的混沌同步. 令 e_1 , e_2 和 e_3 分别表示状态变量 x , y 和 z 在驱动系统与响应系统之间的差值, 当驱动系统和响应系统的初始值分别为 (10, 20, 30) 和 (-20, -30, -40) 时, 数值计算 e_1 , e_2 和 e_3 的结果如图 3 所示.

从图 3 可以看出, 驱动系统和响应系统经过一段时间后实现了同步, 且反馈系数 m 的值越大, 同步建立越快, 同步所需时间就越短.

将本文方法与传统线性反馈法进行比较, 当各参数及初值均相同、反馈系数 $m = 10$ 时, 数值

计算结果如图 4 所示.

从图 4 不难看出, 本文方法建立混沌同步所需时间与传统线性反馈法相差无几, 但前者仅需要驱动系统混沌信号的幅值即可建立同步. 将这种特性应用在混沌通信中, 发送端可以利用混沌信号的极性来传递二进制信息, 接收端利用被调混沌信号的幅值来建立同步. 这样, 在通信过程中同步不会因二进制信息的变化 (被调混沌信号极性的变化) 而中断, 从理论上可以实现任意窄的码元发送与解调, 即实现任意高的信息传输速率, 克服了传统混沌键控通信中通信速率受同步时间限制的缺点, 因而该同步方法在通信领域中具有很大的应用潜力.

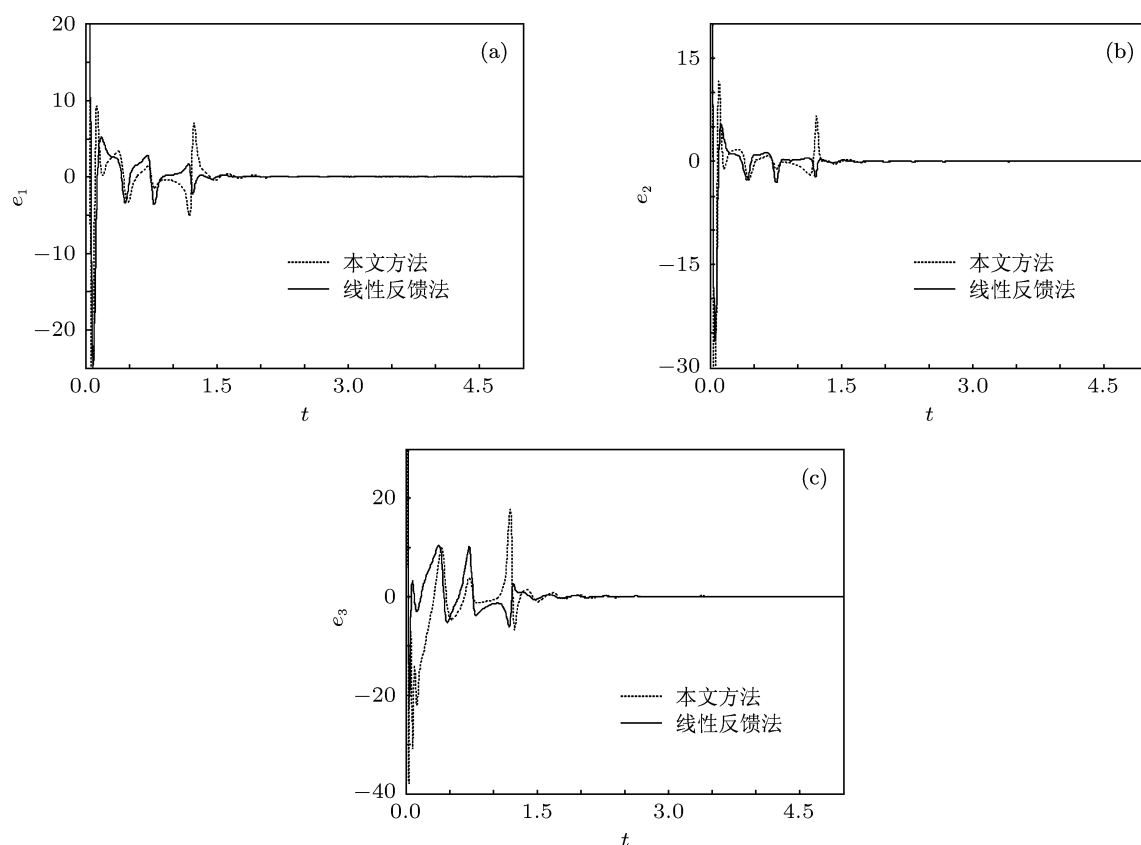


图 4 本文方法与线性反馈法各变量同步过程的比较 (a) 变量 x ; (b) 变量 y ; (c) 变量 z

4 结论

本文构造了一个三维混沌系统, 并在此基础上提出了一种利用混沌信号部分信息来实现混沌同步的方法, 该方法仅需要驱动变量的幅值即可实现同步. 通过计算系统的条件 Lyapunov 指数与数

值仿真证明了该方法的可行性和正确性, 并与传统单变量线性反馈法进行了比较, 同步时间基本相同. 在混沌通信中, 利用混沌信号的极性来传递信息并用本文提出的同步方法来实现同步, 可以使高速保密通信成为可能, 这在通信领域有广阔的应用前景.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Maggio G M, di Bernardo M, Kennedy M P 2000 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **47** 1160
- [3] Lu J G 2005 *Chaos Solitons Fract.* **26** 1125
- [4] Kocarev L, Parlitz V 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5028
- [5] Bai E W, Lonngen K E 2000 *Chaos Solitons Fract.* **11** 1041
- [6] Agiza H N, Yassen M T 2001 *Phys. Lett. A* **278** 191
- [7] Wang G R, Yu X L, Chen S G 2000 *Control, Synchronization and Utilization of Chaos* (Beijing: National Defense Industry Press) p354 (in Chinese) [王光瑞, 于熙龄, 陈式刚 2000 混沌的控制、同步与利用 (北京: 国防工业出版社) 第 354 页]
- [8] Wang X Y, Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 (in Chinese) [王兴元, 孟娟 2008 物理学报 **57** 726]
- [9] Zhang R X, Yang S P, Liu Y L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1549 (in Chinese) [张若洵, 杨世平, 刘永利 2010 物理学报 **59** 1549]
- [10] Huberman B A, Lumer E 1990 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **37** 547
- [11] Andrievsky B 2002 *Math. Comput. Sim.* **58** 285
- [12] Hu J, Zhang Q J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 503
- [13] Steliana C 2003 *Chaos Solitons Fract.* **15** 507
- [14] Cai N, Jing Y W, Zhang S Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 802 (in Chinese) [蔡娜, 井元伟, 张嗣瀛 2009 物理学报 **58** 802]
- [15] Wu X J, Lu H T, Shen S L 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2329
- [16] Fu S H, Pei L J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5985 (in Chinese) [付士慧, 裴利军 2010 物理学报 **59** 5985]
- [17] Chen M, Jiang C S, Jiang B, Wu Q X 2009 *Chaos Solitons Fract.* **39** 1856
- [18] Liu Z H 2006 *Basic and Application of Chaotic Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p28 (in Chinese) [刘宗华 2006 混沌动力学基础及其应用 (北京: 高等教育出版社) 第 28 页]
- [19] Fang J Q 2001 *Manage Chaos and Develop High and New Technology* (Beijing: Atomic Energy Press) p35 (in Chinese) [方锦清 2001 驾驭混沌与发展高新技术 (北京: 原子能出版社) 第 35 页]
- [20] Yi K X, Sun X, Shi J Y 2000 *J. CAD CG* **12** 672 (in Chinese) [易开祥, 孙鑫, 石教英 2000 计算机辅助设计与图形学报 **12** 672]
- [21] Zhang X D, Li Z P, Zhang L L 2005 *J. Univ. Sci. Technol. Beijing* **27** 371 (in Chinese) [张晓丹, 李志萍, 张丽丽 2005 北京科技大学学报 **27** 371]

A chaos synchronization method based on amplitude

Tang Liang-Rui[†] Fan Bing Kang Zhong-Miao

(School of Electric and Electronic Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

(Received 28 July 2011; revised manuscript received 20 December 2011)

Abstract

A three-dimensional chaotic system is presented. The equilibrium point, the chaotic attractor and the Lyapunov exponent are investigated. According to the chaotic system, we propose a novel chaos synchronization method in which only the amplitude of chaotic signal is used to realize chaos synchronization. This feature can be used in chaotic communication system to improve the communication quality and speed. By computing the conditional Lyapunov exponents and numerical simulation the synchronization method is proved to be feasible and effective. The synchronous speed of the method is the same as that of the traditional linear feedback method.

Keywords: three-dimensional chaos, chaos synchronization, conditional Lyapunov exponents, chaotic communication

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Ac, 05.45.Vx

[†] E-mail: tangliangrui@163.com