

一类非线性相对转动系统的组合共振分岔与混沌*

李海滨¹⁾ 王博华^{1)†} 张志强²⁾ 刘爽¹⁾ 李延树¹⁾

1)(燕山大学工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

2)(北京军区总医院放射诊断科, 北京 100700)

(2011年10月30日收到; 2011年12月6日收到修改稿)

研究一类具有异宿轨道的非线性相对转动系统的分岔与混沌运动。应用耗散系统的拉格朗日方程建立一类组合谐波激励作用下非线性相对转动系统的动力学方程。利用多尺度法求解相对转动系统发生组合共振时满足的分岔响应方程并进行奇异性分析, 得到了系统稳态响应的转迁集。根据相对转动系统异宿轨道参数方程, 求解了异宿轨道的 Melnikov 函数, 并给出了系统发生 Smale 马蹄变换意义下混沌的临界条件。最后采用数值方法, 通过分岔图, 最大 Lyapunov 指数图, 相轨迹图和庞加莱截面图研究系统参数对混沌运动的影响。

关键词: 相对转动, 组合共振, 分岔, 混沌

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

1 引言

分岔和混沌是非线性科学领域重要的研究内容 [1–5], 在保密通信 [6–11]、信号处理 [12–17] 和生命科学 [18–23] 等领域取得了迅猛发展和广泛应用。刘爽等 [24–26] 研究了一类非线性相对转动系统的 Hopf 分岔现象并对其进行了有效控制。马少娟等 [27] 应用 Laguerre 正交多项式逼近法研究了含有随机参数的双势阱 Duffing 系统的分岔和混沌。薛春霞等 [28] 利用 Karman 关于板的大挠度理论, 考虑涡电流在板中引起的 Lorenz 力, 研究了横向磁场中大挠度金属薄板的混沌振动。罗诗裕等 [29] 引入正弦平方势, 研究了晶体摆动场辐射系统的全局分叉与混沌。文献 [30] 研究了 S 形本构关系的弹性直杆纵振时的混沌行为。文献 [31] 研究了一类受周期扰动航天器从绕最小惯量主轴到最大惯量主轴旋转的姿态机动过程中的混沌现象。以上研究可以归结为单一周期激励作用下一类非线性系统的分岔和混沌。然而在实际工程物理结构中, 往往同时存在频率不等的组合谐波激励, 在该类谐波激励下非线性系统常表现出复杂的动力学行为。

大型旋转机械如涡轮式发电机、轧钢机和汽轮机等设备, 是电力、石油和化工等现代企业中的关键生产设备, 该类系统常被抽象为转子 - 轴承相

对转动系统来进行研究 [24–26]。本文研究该类非线性相对转动系统在组合谐波激励作用下的动力学行为, 分别采用多尺度法和 Melnikov 法分析相对转动系统的组合共振分岔与混沌特性, 最后用数值方法进一步研究系统参数对混沌运动的影响, 揭示旋转机械异常工作时的振荡规律。

2 相对转动系统非线性动力学方程

相对转动系统是实际工程中广泛存在的动力传递系统。考虑一类具有一次、三次扭转刚度和外扰激励作用下的两质量系统, 系统的动能和势能分别为

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2, \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{4} k_2 (\theta_1 - \theta_2)^4. \quad (2)$$

阻尼力为

$$F_1^c = -c(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (3)$$

$$F_2^c = -c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1). \quad (4)$$

广义力矩为

$$Q_j = \sum_{i=1}^2 F_i^j \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 61104040) 和河北省自然科学基金(批准号: E2012203090) 资助的课题。

† E-mail: bohua1208@126.com

式中, J_i 为系统集中质量的转动惯量, $\theta_i, \dot{\theta}_i$ 分别为系统集中质量的转角和转速, k_1 为系统线性扭转刚度, k_2 为系统非线性扭转刚度, c 为系统线性阻尼系数, $F_i^i = F_i + F_i^c$, F_i 为广义外力矩, F_i^c 为系统广义阻尼力, q 为广义坐标。

将(1)–(5)式代入具有耗散项的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2), \quad (6)$$

得

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) + k_2(\theta_1 - \theta_2)^3 \\ + c(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = F_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} J_2 \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) + k_2(\theta_2 - \theta_1)^3 \\ + c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = F_2. \end{aligned} \quad (8)$$

考虑实际工程中的相对转角变化, 由(7)式减去(8)式, 得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 + \alpha \dot{x} = F(t), \quad (9)$$

式中, $x = \theta_1 - \theta_2$, $\dot{x} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$, $\ddot{x} = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2$, $\omega_0^2 = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} k_1$, $\beta = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} k_2$, $\alpha = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} c$, $F(t) = \frac{1}{J_1 J_2} (J_2 F_1 - J_1 F_2)$.

考虑外扰激励为频率不等的组合谐波激励

$$F(t) = f_1 \cos(\Omega_1 t) + f_2 \cos(\Omega_2 t). \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式, 得

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 + \alpha \dot{x} \\ = f_1 \cos(\Omega_1 t) + f_2 \cos(\Omega_2 t). \end{aligned} \quad (11)$$

方程(11)就是在一类具有非线性扭转刚度和组合谐波激励作用下的两质量非线性相对转动系统的动力学方程, 是进一步研究相对转动系统动力学特性的基础。

3 组合共振特性分析

3.1 分岔分析

考虑小阻尼和弱非线性的情况, 引入小参数 ε , 则(11)式可化为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \beta x^3 + \varepsilon \alpha \dot{x} \\ = f_1 \cos(\Omega_1 t) + f_2 \cos(\Omega_2 t). \end{aligned} \quad (12)$$

下面利用多尺度法对系统的组合共振问题进行求解, 设方程(12)的解为

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1), \quad (13)$$

式中, 快变时间尺度 $T_0 = t$, 慢变时间尺度 $T_1 = \varepsilon t$. 将(13)式代入(12)式, 令 ε 的同次幂系数相等, 得到如下摄动方程:

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = f_1 \cos(\Omega_1 t) + f_2 \cos(\Omega_2 t), \quad (14)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \alpha D_0 x_0 - \beta x_0^3, \quad (15)$$

式中, $D_0 = \partial/\partial T_0$, $D_0^2 = \partial^2/\partial T_0^2$, $D_1 = \partial/\partial T_1$. 设方程(14)的通解为

$$\begin{aligned} x_0 = & A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + A_1 \exp(i\Omega_1 T_0) \\ & + A_2 \exp(i\Omega_2 T_0) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $A_n = \frac{1}{2} \frac{f_n}{\omega_0^2 - \Omega_n^2}$, ($n = 1, 2$), c.c. 代表前面各项的共轭项。

将(16)式代入(15)式, 得

$$\begin{aligned} & D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 \\ = & -[i\omega_0(2A' + \alpha A) + 3\beta(A^2 \bar{A} + 2AA_1^2 + 2AA_2^2)] \\ & \times \exp(i\omega_0 T_0) \\ = & -[i\Omega_1 \alpha + 3\beta(2A\bar{A} + A_1^2 + 2A_2^2)]A_1 \exp(i\Omega_1 T_0) \\ = & -[i\Omega_2 \alpha + 3\beta(2A\bar{A} + 2A_1^2 + A_2^2)]A_2 \exp(i\Omega_2 T_0) \\ = & -\beta A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) \\ = & -\beta A_1^3 \exp(3i\Omega_1 T_0) - \beta A_2^3 \exp(3i\Omega_2 T_0) \\ = & -3\beta A^2 A_1 \exp[i(2\omega_0 + \Omega_1)T_0] \\ = & -3\beta A^2 A_2 \exp[i(2\omega_0 + \Omega_2)T_0] \\ = & -3\beta A^2 A_1 \exp[i(2\omega_0 - \Omega_1)T_0] \\ = & -3\beta A^2 A_2 \exp[i(2\omega_0 - \Omega_2)T_0] \\ = & -3\beta A A_1^2 \exp[i(\omega_0 + 2\Omega_1)T_0] \\ = & -3\beta A A_2^2 \exp[i(\omega_0 + 2\Omega_2)T_0] \\ = & -3\beta A A_1^2 \exp[i(\omega_0 - 2\Omega_1)T_0] \\ = & -3\beta A A_2^2 \exp[i(\omega_0 - 2\Omega_2)T_0] \\ = & -6\beta A A_1 A_2 \exp[i(\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2)T_0] \\ = & -6\beta A A_1 A_2 \exp[i(\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2)T_0] \\ = & -6\beta A A_1 A_2 \exp[i(\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2)T_0] \\ = & -6\beta A A_1 A_2 \exp[i(\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2)T_0] \\ = & -3\beta A_1^2 A_2 \exp[i(2\Omega_1 + \Omega_2)T_0] \\ = & -3\beta A_1^2 A_2 \exp[i(2\Omega_1 - \Omega_2)T_0] \\ = & -3\beta A_1 A_2^2 \exp[i(\Omega_1 + 2\Omega_2)T_0] \\ = & -3\beta A_1 A_2^2 \exp[i(-\Omega_1 + 2\Omega_2)T_0] + \text{c.c..} \end{aligned} \quad (17)$$

由(17)式可知, 相对转动系统可能发生多种谐波共振, 假定 $\Omega_2 > \Omega_1$, 可能存在的各次共振是

- 1) $\omega_0 \approx 3\Omega_1, 3\Omega_2$, 超谐共振;

- 2) $\omega_0 \approx \frac{1}{3}\Omega_1, \frac{1}{3}\Omega_2$, 次谐共振;
 3) $\omega_0 \approx \Omega_2 \pm 2\Omega_1, 2\Omega_1 - \Omega_2, 2\Omega_2 \pm \Omega_1, \frac{1}{2}(\Omega_2 \pm \Omega_1)$, 组合共振.

由此可见, 对于组合谐波激励, 相对转动系统可以同时存在多于一个的共振条件, 即可以同时存在超谐共振、次谐共振, 或者同时存在超谐共振和组合共振等等.

下面以 $\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\Omega_2 + \Omega_1)$ 为例, 研究相对转动系统组合共振响应.

引入调谐参数 σ , 令

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\Omega_2 + \Omega_1) - \varepsilon\sigma. \quad (18)$$

根据(17)式, 消除久期项, 得

$$\begin{aligned} & i\omega_0(2A' + \alpha A) + 3\beta(A^2\bar{A} + 2AA_1^2 + 2AA_2^2) \\ & + 6\beta\bar{A}A_1A_2 \exp(i\sigma T_1) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

令

$$A = \frac{1}{2}\rho \exp(i\gamma). \quad (20)$$

将(20)式代入(19)式, 分离实部和虚部, 得

$$\rho' = -\frac{1}{2}\alpha\rho - \beta\rho\Gamma_1 \sin\delta, \quad (21)$$

$$\rho\delta' = (2\sigma\varepsilon - 2\beta\Gamma_2)\rho - \frac{3}{4}\frac{\beta\rho^3}{\omega_0} - 2\beta\rho\Gamma_1 \cos\delta, \quad (22)$$

式中

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{3}{4\omega_0} \frac{f_1 f_2}{(\omega_0^2 - \Omega_1^2)(\omega_0^2 - \Omega_2^2)}, \\ \Gamma_2 &= \frac{3}{4\omega_0} \left[\frac{f_1^2}{(\omega_0^2 - \Omega_1^2)^2} + \frac{f_2^2}{(\omega_0^2 - \Omega_2^2)^2} \right], \\ \delta &= 2\sigma T_1 - 2\gamma. \end{aligned}$$

根据稳态条件 $\rho' = \delta' = 0$, 消去(21)式和(22)式中的 δ , 得到系统的分岔响应方程

$$\rho^4 + \eta^2 + \lambda_1\rho^2 + \lambda_2 = 0, \quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{8\omega_0}{3\beta}(\sigma\varepsilon - \beta\Gamma_2), \\ \lambda_1 &= -\frac{16}{3\beta}(\sigma\varepsilon - \beta\Gamma_2), \\ \lambda_2 &= \left(\frac{16}{9}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{64}{9}\Gamma_1^2\right)\omega_0^2. \end{aligned}$$

利用奇异性理论研究方程(23)的拓扑结构, 取芽 $g_0(\rho, \eta) = \rho^4 + \eta^2$, 可以得到一个余维数为 5 的普适开折^[32]

$$G(\rho, \eta, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$$\begin{aligned} &= \rho^4 + \eta^2 + \alpha_0\rho^2\eta + \alpha_1\rho\eta \\ &+ \alpha_2\rho^2 + \alpha_3\rho + \alpha_4, \end{aligned} \quad (24)$$

式中, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是开折参数.

结合(23)式, 这里只讨论 $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_3 = 0$ 的情况, 此时普适开折

$$G(\rho, \eta, \alpha_2, \alpha_4) = \rho^4 + \eta^2 + \alpha_2\rho^2 + \alpha_4. \quad (25)$$

根据转迁集的定义, 当 $G = G_\rho = G_\eta = 0$ 时, 系统存在分岔点集 $B_1 = \{\alpha_4 = 0\}$, $B_2 = \left\{\alpha_4 = \frac{1}{4}\alpha_2^2, \alpha_2 < 0\right\}$; 当 $G = G_\rho = G_{\rho\rho} = 0$ 时, 系统存在滞后点集 $H = \{\alpha_2 = 0, \alpha_4 \leqslant 0\}$; 系统的双极限点集 $D = \varphi(\text{空集})$; 转迁集为 $\Sigma = B_1 \cup B_2 \cup H$.

3.2 混沌预测

在(11)式中, 令 $\dot{x} = y$, 考虑小阻尼和外激励幅值较小的情况, 引入小参数 ς , 则(11)式可化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x - \beta x^3 + \varsigma(-\alpha y + f_1 \cos(\Omega_1 t) \\ &+ f_2 \cos(\Omega_2 t)). \end{aligned} \quad (26)$$

当 $\varsigma = 0$ 时, 系统为无扰系统, 即

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x - \beta x^3. \quad (27)$$

情形 1 当 $\beta > 0$ 时, 系统只有一个不动点, 即平衡点 $(0, 0)$, 此时无扰系统为稳定的周期运动, 不存在 Smale 马蹄意义上的混沌.

情形 2 当 $\beta < 0$ 时, 系统有三个不动点, 平衡点 $(0, 0)$ 和鞍点 $\left(\pm\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{\beta}}, 0\right)$

此时无扰系统为平面 Hamilton 系统, 有哈密顿量

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4. \quad (28)$$

通过鞍点 $\left(\pm\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{\beta}}, 0\right)$ 的轨道为异宿轨道, 它满足

$$\begin{aligned} H\left(\pm\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{\beta}}, 0\right) &= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4 \\ &= -\frac{1}{4}\frac{\omega_0^4}{\beta}. \end{aligned} \quad (29)$$

根据(29)式, 求得异宿轨道方程为

$$x(t) = \pm \sqrt{-\frac{\omega_0^2}{\beta}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_0^2}{2}}t\right),$$

$$y(t) = \pm \frac{\omega_0^2}{\sqrt{-2\beta}} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{\omega_0^2}{2}} t \right). \quad (30)$$

根据Melnikov函数的定义, 利用留数定理, 求得异宿轨道的Melnikov函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) = & \frac{4\alpha\omega_0^3}{3\beta} \pm \sqrt{-\frac{2}{\beta}}\pi \left[f_1\Omega_1 \cos(\Omega_1 t_0) \right. \\ & \times \operatorname{csch} \left(\frac{\sqrt{2}\pi\Omega_1}{2\omega_0} \right) + f_2\Omega_2 \cos(\Omega_2 t_0) \\ & \left. \times \operatorname{csch} \left(\frac{\sqrt{2}\pi\Omega_2}{2\omega_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

仅考虑 $f_1 = f_2 = f$ 的情形, 根据Melnikov定理, 相对转动系统发生Smale马蹄意义下的混沌时满足

$$f > -\frac{4\alpha\omega_0^3}{3\beta} \left\{ \sqrt{-\frac{2}{\beta}}\pi \left[\Omega_1 \operatorname{csch} \left(\frac{\sqrt{2}\pi\Omega_1}{2\omega_0} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \Omega_2 \operatorname{csch} \left(\frac{\sqrt{2}\pi\Omega_2}{2\omega_0} \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (32)$$

4 分岔与混沌数值研究

本文采用分岔图, 最大Lyapunov指数, 相轨迹和Poincare截面图等多种数值方法研究非线性相对转动系统组合共振动力学特性. 选用四阶Runge-Kutta法对相对转动系统(26)式进行数值仿真, 取系统参数 $\omega_0 = 1$, $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = 2$.

4.1 外扰激励幅值对相对转动系统的影响

当 $\alpha = 2.5$, $\beta = -1$ 时, 通过改变外扰激励幅值的大小, 得到相对转动系统的全局分岔图和对应的Lyapunov指数图, 如图1和图2所示. 从图中可以看出, 随着外扰激励幅值的增加, 系统经历

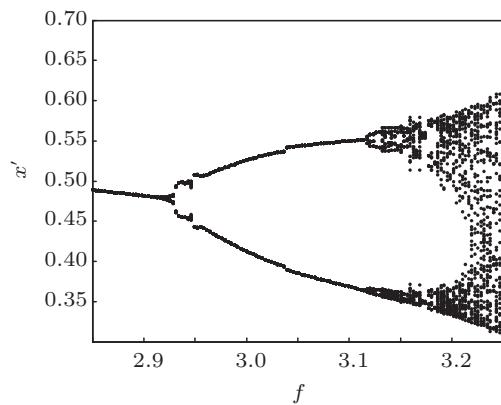


图1 外激励幅值变化的分岔图

倍周期分岔进入混沌运动. 将各参数代入(32)式, 由Melnikov方法得到混沌运动的理论阈值为2.81, 可知Melnikov方法得到的混沌阈值只是一阶近似理论解, 数值计算的混沌阈值略大于理论解.

4.2 阻尼对相对转动系统的影响

当 $\beta = -1$, $f = 3.25$ 时, 通过改变阻尼的大小, 得到相对转动系统的全局分岔图和对应的Lyapunov指数图, 如图3和图4所示. 从图中可以看出, 随着阻尼的减小, 系统经历倍周期分岔进入混沌运动. 同时可以看出阻尼越小, 相对转动系统发生混沌的可能性越大.

4.3 刚度对相对转动系统的影响

当 $\alpha = 2.5$, $f = 3.25$ 时, 通过改变刚度的大小, 得到相对转动系统的全局分岔图和对应的Lyapunov指数图, 如图5和图6所示. 从图中可以看出, 随着刚度的增加, 系统经历倍周期分岔进入混沌运动. 同时可以看出刚度越大, 相对转动系统发生混沌的可能性越大.

为了进一步描述相对转动系统的混沌特性, 图7, 图8, 图9和图10分别用相轨迹图、Poincare截面图、时间历程图和Lyapunov指数图表示相对转动系统在 $\alpha = 2.5$, $\beta = -1$, $f = 3.25$ 参数下的混沌运动. 从图中可以看出, 相轨迹在有界区域内反复缠绕而不封闭, Poincare截面具有明显的分形结构, 时间历程图杂乱无章, 对应的Lyapunov指数 $E_L = (0.053367, 0, -0.55337)$, Lyapunov维数 $D_L = 2.0964$, 以上特征都说明相对转动系统已处于混沌状态.

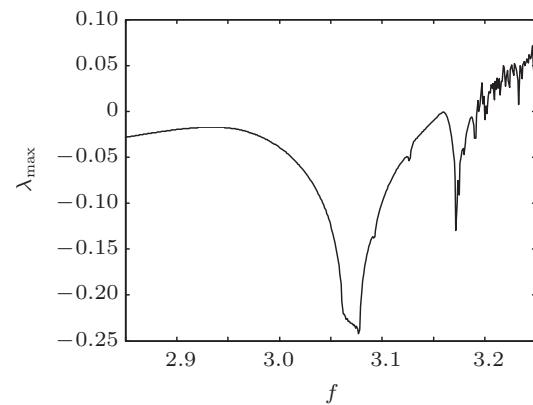


图2 外激励幅值变化的Lyapunov指数

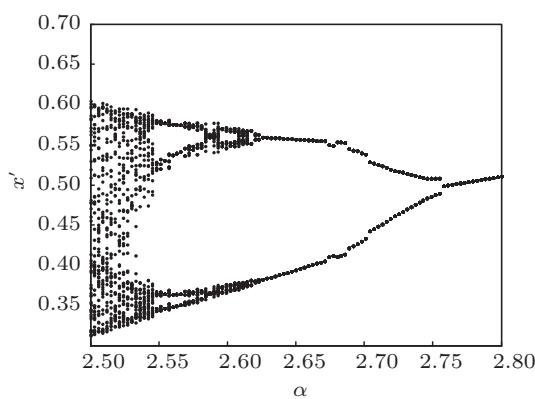


图3 阻尼变化的分岔图

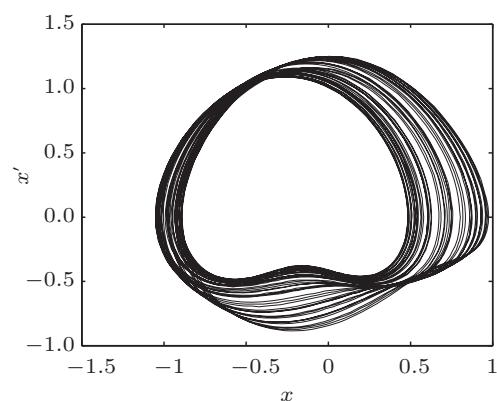


图7 相轨迹

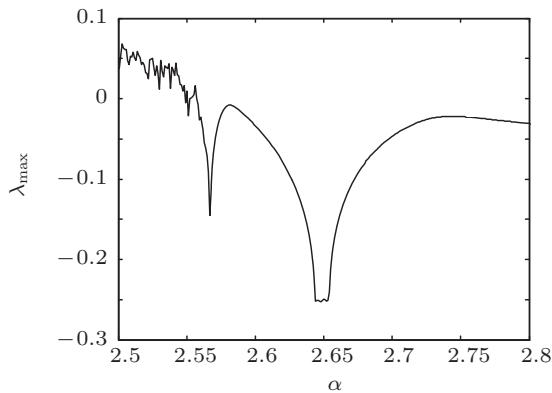


图4 阻尼变化的Lyapunov指数

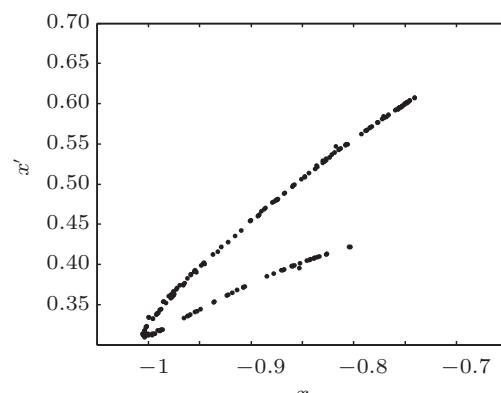


图8 Poincaré截面

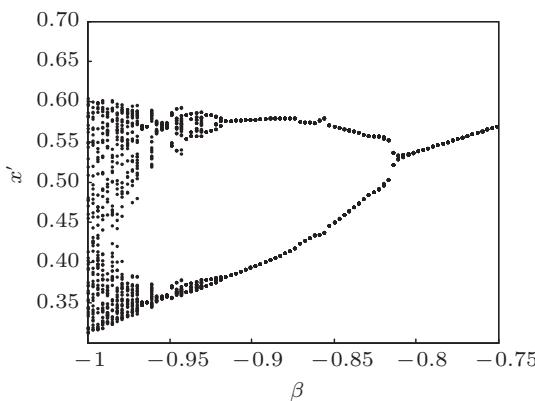


图5 刚度变化的分岔图

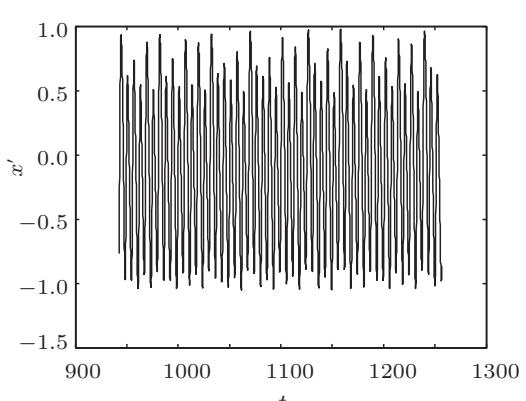


图9 时间历程

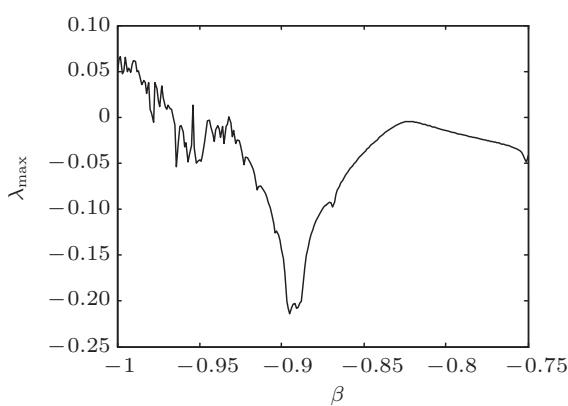


图6 刚度变化的Lyapunov指数

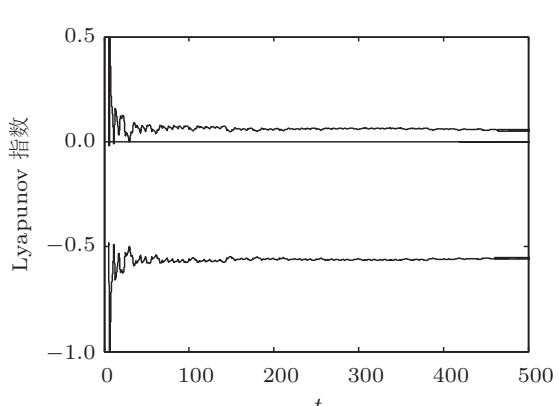


图10 Lyapunov指数

5 结 论

本文应用耗散系统的拉格朗日方程建立了一类组合谐波激励作用下两质量非线性相对转动系统的动力学方程。利用多尺度法分析了相对转动系统发生各种谐波共振的条件,推导了相对转动系统发生组合共振时的分岔响应方程,通过奇异性分析得到了系统的转迁集。应用 Melnikov 方法推导了相对转动系统在组合谐波激励下发生混沌的条件。

最后,通过数值模拟发现,外扰激励、系统阻尼和刚度的变化都可以导致系统经倍周期分岔进入混沌运动,外激励幅值越大,阻尼越小,刚度越大,相对转动系统越容易发生混沌运动,因此适当的降低外激励幅值,增大阻尼,减小刚度,有利于抑制混沌运动的发生,这对减少工程中广泛存在的相对转动系统的振动现象具有重要的理论意义,同时对进一步研究更复杂的大型旋转机械提供理论依据。

- [1] Huang Z W, Zhou J Z, He H, Zhang X Y, Wang C Q 2011 *Journal of Mechanical Engineering* **47** 59 (in Chinese) [黄志伟, 周建中, 贺徽, 张孝远, 王常青 2011 机械工程学报 **47** 59]
- [2] Wang X Y, Wang M J 2008 *Physica A* **387** 3751
- [3] Zhang L S, Cai L, Feng C W 2010 *Acta Electronica Sinica* **38** 1 (in Chinese) [张立森, 蔡理, 冯朝文 2010 电子学报 **38** 1]
- [4] Tang Y, Fang B, Zhang Y W, Li Q F 2011 *Journal of Vibration and Shock* **30** 269 (in Chinese) [唐治, 方勃, 张业伟, 李庆芬 2011 振动与冲击 **30** 269]
- [5] Ma C, Wang X Y 2012 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **17** 721
- [6] Wu G, Cai L 2010 *Chinese Journal of Scientific Instrument* **31** 454 (in Chinese) [吴刚, 蔡理 2010 仪器仪表学报 **31** 454]
- [7] Huang L L, Yin Q T 2009 *Journal of Electronics & Information Technology* **31** 2402 (in Chinese) [黄丽莲, 尹启天 2009 电子与信息学报 **31** 2402]
- [8] Bao H M, Zhu Y S 2009 *Acta Electronica Sinica* **37** 1222 (in Chinese) [包浩明, 朱义胜 2009 电子学报 **37** 1222]
- [9] Wang X Y, Wang L L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050509
- [10] Zheng H Z, Hu J F, Xu W, Liu L D, He Z X 2011 *Journal of Electronics & Information Technology* **33** 844 (in Chinese) [郑皓洲, 胡进峰, 徐威, 刘立东, 何子述 2011 电子与信息学报 **33** 844]
- [11] Gong M J, Qu S C, Wang X Y 2009 *Journal of Electronics & Information Technology* **31** 1442 (in Chinese) [龚美静, 瞿少成, 王晓燕 2009 电子与信息学报 **31** 1442]
- [12] Wang X Y, Liang Q Y, Meng J 2008 *International Journal of Modern Physics C* **19** 1389
- [13] Chen J S, Zeng Y C, Chen S B, Li J B 2011 *Chinese Journal of Scientific Instrument* **32** 1710 (in Chinese) [陈家胜, 曾以成, 陈仕必, 李家标 2011 仪器仪表学报 **32** 1710]
- [14] Fang H, Zhou L X, Yin Z K, Wang J Y 2009 *Journal of the China Railway Society* **31** 56 (in Chinese) [方辉, 周黎霞, 尹忠科, 王建英 2009 铁道学报 **31** 56]
- [15] Wang X Y, Liang Q Y 2008 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **13** 913
- [16] Zhang J Z, Li P, Zhang Y Y, Chen S S, Wang Y C 2011 *Journal of Shenzhen University Science and Engineering* **28** 316 (in Chinese) [张建忠, 李璞, 张英英, 陈莎莎, 王云才 2011 深圳大学学报理工版 **28** 316]
- [17] Li B, Li Y B 2011 *Journal of Tianjin University* **44** 701 (in Chinese) [李彬, 李贻斌 2011 天津大学学报 **44** 701]
- [18] Wang X Y, Luo C, Meng J 2009 *Applied Mathematics and Computation* **207** 63
- [19] Luo C W, Wang C C, Wei J J 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **39** 1831
- [20] Huang G, Zhang D G, Meng J J, Zhu X Y 2011 *Neurocomputing* **74** 1026
- [21] Luo Z Z, Li Y F, Meng M, Sun Y 2011 *Chinese Journal of Scientific Instrument* **32** 33 (in Chinese) [罗志增, 李亚飞, 孟明, 孙曜 2011 仪器仪表学报 **32** 33]
- [22] Li C S, Wang H 2009 *Chinese Journal of Scientific Instrument* **30** 477 (in Chinese) [李春胜, 王宏 2009 仪器仪表学报 **30** 477]
- [23] Wang X Y, Luo C 2006 *Applied Mathematics and Computation* **183** 30
- [24] Liu S, Liu H R, Wen Y, Liu B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5223 (in Chinese) [刘爽, 刘浩然, 闻岩, 刘彬 2010 物理学报 **59** 5223]
- [25] Liu S, Liu B, Zhang Y K, Wen Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 38 (in Chinese) [刘爽, 刘彬, 张业宽, 闻岩 2010 物理学报 **59** 38]
- [26] Liu S, Liu B, Shi P M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4383 (in Chinese) [刘爽, 刘彬, 时培明 2009 物理学报 **58** 4383]
- [27] Ma S J, Xu W, Li W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4013 (in Chinese) [马少娟, 徐伟, 李伟 2006 物理学报 **55** 4013]
- [28] Xue C X, Zhang S Y, Shu X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6599 (in Chinese) [薛春霞, 张善元, 树学锋 2010 物理学报 **59** 6599]
- [29] Luo S Y, Shao M Z, Luo X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2685 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠, 罗晓华 2010 物理学报 **59** 2685]
- [30] Han Z J, Wang J J, Cui Y, Lu G Y, Zhang S Y 2011 *Journal of Vibration and Shock* **30** 135 (in Chinese) [韩志军, 王建军, 崔艳, 路国运, 张善元 2011 振动与冲击 **30** 135]
- [31] Yong E M, Tang G J 2005 *Journal of Astronautics* **26** 535 (in Chinese) [雍恩米, 唐国金 2005 宇航学报 **26** 535]
- [32] Chen F Q, Wu Z Q, Chen Y S 2001 *Acta Mechanical Sinica* **33** 661 (in Chinese) [陈芳启, 吴志强, 陈予恕 2001 力学学报 **33** 661]

Combination resonance bifurcations and chaos of some nonlinear relative rotation system*

Li Hai-Bin¹⁾ Wang Bo-Hua^{1)†} Zhang Zhi-Qiang²⁾
Liu Shuang¹⁾ Li Yan-Shu¹⁾

1) (*Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

2) (*M.D. Department of Diagnostic Radiology, The Military General Hospital of Beijing PLA, Beijing 100700, China*)

(Received 30 October 2011; revised manuscript received 6 December 2011)

Abstract

The bifurcation and chaotic motion of some nonlinear relative rotation system with heteroclinic orbit is studied. By using dissipative system Lagrange equation, the dynamics equation of nonlinear relative rotation system under combination harmonic excitations is established. Firstly, the bifurcation response equation of relative rotation system under combination resonance is deduced with the method of multiple scales. Singularity analysis is employed to obtain the transition set of steady motion. Secondly, the Melnikov function of heteroclinic orbit is solved according to heteroclinic orbit parameter equation of relative rotation system. The critical condition of chaos about Smale commutation is given. Finally, numerical method is employed to analyze the influences of different system parameters on chaotic motion by bifurcation diagram, the maximum Lyapunov, phase trajectory and Poincare map.

Keywords: relatively rotation, combination resonance, bifurcations, chaos

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104040), and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. E2012203090).

† E-mail: bohua1208@126.com