

一类非线性方程类孤波的近似解法*

石兰芳^{1)†} 林万涛²⁾ 林一骅²⁾ 莫嘉琪³⁾

1) (南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

2) (中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

3) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2012年6月3日收到; 2012年7月29日收到修改稿)

采用了一个简单而有效的技巧, 研究了一类扰动发展方程. 首先引入求解一个相应典型方程的类孤波近似解, 然后利用泛函映射方法得到了原扰动发展方程的近似解, 指出了近似解级数的收敛性, 并用解析方法, 讨论了近似解的精度.

关键词: 类孤波, 发展方程, 渐近方法

PACS: 02.30.Lt

DOI: 10.7498/aps.62.010201

1 引言

孤波在非线性理论研究中是一个很重要的对象, 它具有广泛的应用背景^[1,2]. 近来, 研究非线性孤波解中有许多新的方法, 例如, Jacobi 椭圆函数法、Riccati 方程映射法、齐次平衡法、双曲正切函数法和辅助函数法等. 这些方法应用于激波、量子力学、散射光、神经网络和大气物理等^[3-8]. 孤波描述的对象是一类复杂的自然现象. 这些现象我们需要把它简化为基本模型并去求解它, 其中也采用了渐近的方法. 目前优化了许多近似方法, 例如匹配法、边界层法、平均法和多重尺度法等^[9-11]. 利用渐近方法, 文献[13—17]也研究了一类非线性问题. 本文是考虑在近代物理中一类非线性扰动发展方程, 并利用映射方法得到类孤波近似解.

2 扰动发展方程

考虑如下一个扰动发展方程^[6,7]:

$$u_t - u^2 u_x + \beta u_{xxx} = f(t, x, u), \quad (1)$$

其中 β 为常数; f 为扰动项, 它在各自的变量范围内为有界的解析函数. 非线性扰动 KdV 方程 (1) 在流体力学、理论物理、航天、航空、生态环境、应用化学等学科中都有许多应用. 并广泛地应用于原子物理、等离子体物理和固体物理中.

首先考虑如下典型的发展方程

$$u_t - u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (2)$$

方程 (2) 是可以用来描述非调和晶格中声波的传播和无碰撞等离子体的 Alfen 波的运动, 它有形如 $u = a \operatorname{sech}(x - a^2 t)$ 的精确解. 又由文献 [8] 知, 利用推广的 Riccati 方程待定系数方法, 可以得到如下方程

$$u_t + \alpha(t) u u_t + m(t) u^2 u_x + \beta(t) u_{xxx} = 0 \quad (*)$$

的一个新的类孤波精确解. 方程 (*) 当 $m(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 为常数时在等离子体物理、固体物理、原子物理、流体力学等物理当中被广泛应用的组合发展方程. 显然方程 (2) 是方程 (*) 的一个特例. 所以方程 (2) 利用推广的 Riccati 方程待定系数方法还

* 中国科学院战略性先导科技项目 (批准号: XDA01020304)、国家自然科学基金 (批准号: 11202106, 41275062, 41175058) 和安徽高校省级自然科学基金项目 (批准号: KJ2012A001, KJ2012Z245) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: shilf108@163.com

具有形如

$$\bar{u}(t, x) = \frac{\operatorname{sech}^2(x + 8\beta t)}{1 + \operatorname{sech}^2(x + 8\beta t)} \quad (3)$$

的另一个类孤波精确解. (3) 式当 $x = 0, \beta = 1$ 情形下的类孤波曲线如图 1 所示.

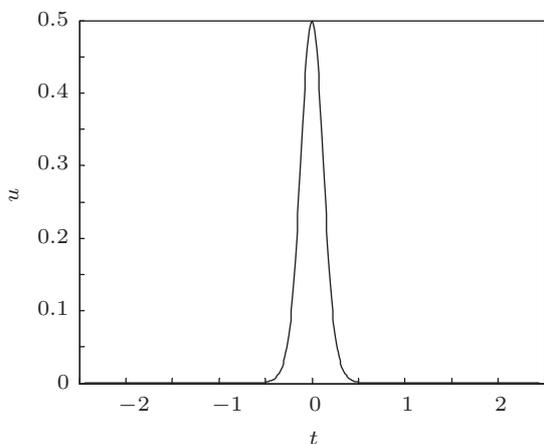


图 1 当 $x = 0, \beta = 1$ 情形下的类孤波曲线

由于方程 (1) 有扰动项 $f(t, x, u)$, 它一般不能用初等方法求出其精确解, 故我们从解 (3) 出发, 来求扰动发展方程 (1) 的近似解.

为了得到扰动方程 (1) 的近似解, 我们引入如下映射 $H(u, s) : R \times I \rightarrow R$ [9]:

$$H(u, s) = Lu - L\tilde{u}_0 + s[L\tilde{u}_0 - u^2 u_x - f(t, x, u)], \quad (4)$$

其中 $R = (-\infty, +\infty), I = [0, 1], \tilde{u}_0$ 为 (1) 式的初始近似函数, 它将在下面决定, 而算子 L 为

$$Lu = u_t + \beta u_{xxx}.$$

显然, 由关系式 (4) 的表示式看出, $H(u, 1) = 0$ 与方程 (1) 相同. 故方程 (1) 的解 $u(t, x)$ 就是方程 $H(u, s) = 0$ 当 $s \rightarrow 1$ 时的解.

3 近似解及其收敛性态

设

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t, x) s^i. \quad (5)$$

由映射 (4) 式, 将 (5) 式代入 $H(u, s) = 0$, 按 s 展开其中非线性的项, 且令方程两边 s 的同次幂项的系数相等, 可依次得到 $u_n(\xi) (n = 0, 1, 2, \dots)$. 再将 $u_n(\xi)$ 代入 (5) 式, 这时我们便得到级数 (5).

由 s 的零次幂项系数为零, 有

$$L(u_0) = L(\tilde{u}_0). \quad (6)$$

选取初始近似 $\tilde{u}_0(t, x)$ 为方程 (2) 的类孤波解 $\bar{u}_0(t, x)$. 由 (3) 和 (6) 式, 这时有

$$u_0(t, x) = \frac{\operatorname{sech}^2(x + 8\beta t)}{1 + \operatorname{sech}^2(x + 8\beta t)}. \quad (7)$$

在 $H(u, s) = 0$ 中, 由 s 的一次幂, 得

$$L(u_1) = f(t, x, u_0). \quad (8)$$

利用 Fourier 变换法, 可得线性方程 (8) 的解

$$u_1(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\tau, \xi, u_0) \times [\cos(-\lambda^3 \beta(t - \tau) + \lambda(x - \xi))] d\xi d\lambda d\tau. \quad (9)$$

在 $H(u, s) = 0$ 中, 由 s 的二次幂, 得

$$L(u_2) = u_0(u_0 u_{1x} + 2u_{0x} u_1) + F(u_0, u_1), \quad (10)$$

其中 u_0 和 u_1 分别由 (7) 和 (9) 式表示, 且

$$F(u_0, u_1) = \left[\frac{\partial}{\partial s} f \left(t, x, \sum_{i=0}^{\infty} u_i s^i \right) \right]_{s=0}.$$

同样, 不难得到方程 (10) 的解为

$$u_2(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [-u_0(u_0 u_{1\xi} + 2u_{0\xi} u_1) + F(u_0, u_1)] [\cos(-\lambda^3 \beta(t - \tau) + \lambda(x - \xi))] d\xi d\lambda d\tau. \quad (11)$$

于是, 利用 (5), (7), (9) 和 (11) 式, 扰动 KdV 方程 (1) 的二次类孤波近似解 u_{hom} 为

$$u_{2\text{hom}}(t, x) = \frac{\operatorname{sech}^2(x + 8\beta t)}{1 + \operatorname{sech}^2(x + 8\beta t)} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [f(\tau, \xi, u_0) + u_0(u_0 u_{1\xi} + 2u_{0\xi} u_1) + F(u_0, u_1)] \times [\cos(-\lambda^3 \beta(t - \tau) + \lambda(x - \xi))] d\xi d\lambda d\tau, \quad (12)$$

其中 u_0 和 u_1 分别由 (7) 和 (9) 式表示.

利用映射 (4) 式, 我们还能够得到非线性扰动发展方程 (1) 的更高次近似的类孤波解.

在假设 $[H]$ 和选择初始近似 $u_0(t, x)$ 下, 可以证明非线性方程 (1) 的解在 $s \in [0, 1]$ 上为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x).$$

于是可进一步得知 $u_{\text{exa}}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x)$ 就是非线性扰动发展方程 (1) 的一个类孤波精确解.

4 近似解的精度比较

现仅考虑一个特殊的非线性微扰发展方程. 设微扰项为 $f(u) = \varepsilon \exp(-u^2)$, 其中 ε 为小的正参数. 这时非线性微扰发展方程 (1) 为

$$u_t - u^2 u_x + \beta u_{xxx} = \varepsilon \exp(-u^2), \quad (13)$$

由 (7) 式, 方程 (13) 的零次近似类孤波解 $u_{0\text{hom}}(t, x)$ 为

$$u_{0\text{hom}}(t, x) = \frac{\text{sech}^2(x + 8\beta t)}{1 + \text{sech}^2(x + 8\beta t)}. \quad (14)$$

再由 (9) 和 (14) 式, 非线性微扰发展方程 (13) 的一次近似类孤波解 $u_{1\text{hom}}$ 为

$$u_{1\text{hom}}(t, x) = \frac{\text{sech}^2(x + 8\beta t)}{1 + \text{sech}^2(x + 8\beta t)} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(-u_0^2) \times [\cos(-\lambda^3 \beta(t - \tau) + \lambda(x - \xi))] d\xi d\lambda d\tau. \quad (15)$$

由 (14), (15) 式, 我们能够得到非线性微扰发展方程 (13) 的二次近似解 $u_{2\text{hom}}$ 为

$$u_{2\text{hom}}(t, x) = \frac{\text{sech}^2(x + 8\beta t)}{1 + \text{sech}^2(x + 8\beta t)} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\exp\left(-\left(\frac{\text{sech}^2(\xi + 8\beta \tau)}{1 + \text{sech}^2(\xi + 8\beta \tau)}\right)^2\right) + 48\beta \left(\frac{\text{sech}^2(\xi + 8\beta \tau)}{1 + \text{sech}^2(\xi + 8\beta \tau)}\right)^2 \times \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\tau \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\left(\frac{\text{sech}^2(\xi_1 + 8\beta \tau_1)}{1 + \text{sech}^2(\xi_1 + 8\beta \tau_1)}\right)^2\right) [\cos(-\lambda_1^3 \beta(\tau - \tau_1) + \lambda_1(\xi - \xi_1))] d\lambda_1 d\xi_1 d\tau_1\right)_\xi \right. \\ \left. + \left[96\beta \left(\frac{\text{sech}^2(\xi + 8\beta \tau)}{1 + \text{sech}^2(\xi + 8\beta \tau)}\right)_\xi + \exp\left(-\frac{\text{sech}^2(\xi + 8\beta \tau)}{1 + \text{sech}^2(\xi + 8\beta \tau)}\right) \times \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\tau \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\left(\frac{\text{sech}^2(\xi_1 + 8\beta \tau_1)}{1 + \text{sech}^2(\xi_1 + 8\beta \tau_1)}\right)^2\right) [\cos(-\lambda_1^3 \beta(\tau - \tau_1) + \lambda_1(\xi - \xi_1))] d\xi_1 d\lambda_1 d\tau_1 \right] \right. \\ \left. \times [\cos(-\lambda^3 \beta(t - \tau) + \lambda(x - \xi))] d\xi d\lambda d\tau. \quad (16)$$

设 $u_{\text{exa}}(t, x) = \sum_{i=0}^\infty u_i(t, x)$ 为方程 (13) 由上述渐近方法得到的一个精确解, 现估计误差 $u_{\text{exa}} - u_{2\text{hom}}$. 首先估计得

$$L(u_{\text{exa}} - u_{2\text{hom}}) = \frac{\partial(u_{\text{exa}} - u_{2\text{hom}})}{\partial t} + \beta(u_{\text{exa}} - u_{2\text{hom}})_{xxx} \\ = -\left(\sum_{n=0}^\infty u_n\right)^2 \left(\sum_{n=0}^\infty u_n\right)_x + \varepsilon \sum_{j=2}^\infty \exp\left(-\left(\sum_{n=0}^\infty u_n\right)^2\right) \\ - [u_0^2 u_{0x} + \varepsilon \exp(-u_0^2)] + [-u_0(u_0 u_{1x} + 2u_{0x} u_1) + 2\varepsilon u_0 u_1 \exp(-u_0^2)] \\ = O(\varepsilon^2), 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (17)$$

其次选择任意常数使得 $u_{\text{exp}}(0) = u_{2\text{hom}}(0)$, 这时由不动点定理 [21], 我们有

$$u_{\text{exa}} - u_{2\text{hom}} = O(\varepsilon^2), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

因此, 由上面的结果可知, 利用渐近方法得到的近似类孤波解 $u_{2\text{hom}}(t, x)$ 具有较好的精度.

5 微扰类孤波近似解的性态的讨论

现以一个特殊的非线性微扰发展方程 (16) 为例, 来简单讨论用本文得到的类孤波近似解的性态.

由第 3 节的证明知, 采用本文的映射方法, 得到的近似解 $\sum_{n=0}^\infty u_n(t, x)$ 是一个在 $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ 上的收敛的级数. 而且收敛函数就是扰动方程 (13) 的一个类孤波精确解. 因此其各次近似解 $u_{n\text{hom}} = \sum_{n=0}^n u_n(t, x)$ 均是一致有效的, 在 (x, t) 全平面上, 包括无穷远处, 都不存在形如长期项的项.

又由第 4 节的计算来看, 得到的一次、二次微扰近似解 $u_{1\text{hom}}, u_{2\text{hom}}$ (包括任意次微扰近似解) 与对应的精确解, 相对于小参数而言, 具有不同量级的精度. 同时由 (15), (16) 式, 不难看出, 所涉及的积分都在 $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ 上收敛而一致有界. 因此除了它们的第一项外, 其余各项都含有小参数 ε . 所以这些项均为第一项典型的类孤波解 (14) 式的微小校正, 并随时间的变化, 也是对类孤波波形的微小修正.

事实上, 利用 Matlab 软件, 例如取 $x = 0, \beta = 1,$

$\varepsilon = 0.1$ 时, 在 $t \in [-10, 10]$ 上典型的类孤波解 u_0 及一次微扰孤波解及 $u_{1\text{hom}} = u_0 + u_1$ 的模拟曲线模拟曲线重叠图形如图 2 所示.

再如取 $t = 0, \beta = 1, \varepsilon = 0.1$ 时, 在 $x \in [-10, 10]$ 上典型的类孤波解 u_0 及一次微扰孤波解及 $u_{1\text{hom}} = u_0 + u_1$ 的模拟曲线重叠图形如图 3 所示.

又如取 $t = 10, \beta = 1, \varepsilon = 0.1$ 时, 在 $x \in [-110, -50]$ 和取 $t = 20, \beta = 1, \varepsilon = 0.1$ 时, 在 $x \in [-200, -120]$ 上典型的类孤波解 u_0 及一次微扰孤波解及 $u_{1\text{hom}} = u_0 + u_1$ 的模拟曲线重叠图形如图 4 和图 5 所示.

由此从图 2—5 也可看出非线性微扰发展方程 (13) 关于小参数 ε 的一次近似解 (15) 式与其典型的微扰类孤波解 (14) 式是对类孤波波形的微小修正.

6 类孤波近似解和物理意义和结束语

本文所用的方法不同于一般用数值方法而得到的模拟解. 用本渐近方法得到的近似解析解, 还可以继续进行解析运算. 因此由 (12) 式还可继续进行微分、积分等解析运算, 进一步得到类孤波解相关物理量的定性、定量的方面的结果. 以达到能对相应物理问题进入深入研究的目的.

非线性孤波理论的研究出自于复杂的自然现象. 为了了解非线性孤波, 对于较复杂的模型, 我们有时需要用近似方法去求解它. 本文所用的映射方法就是一个简单而有效的方法. 同时, 在本文中我们选取初始近似为对应典型方程的类孤波解. 这将能较快地得到精度较高的类孤波近似解.

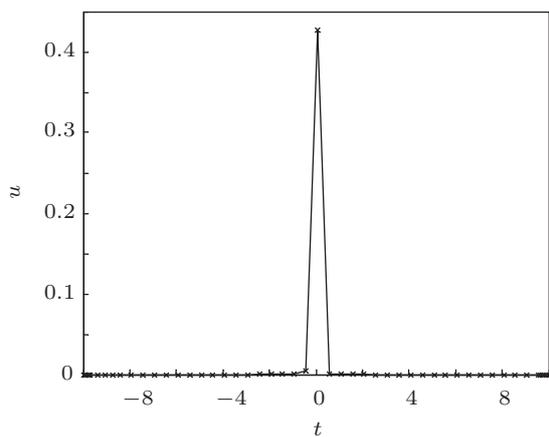


图 2 u_0 (实线) 和 $u_{1\text{hom}}$ (叉线) 在 $x = 0, \beta = 1, \varepsilon = 0.1$ 的曲线重叠图 ($t \in [-10, 10]$)

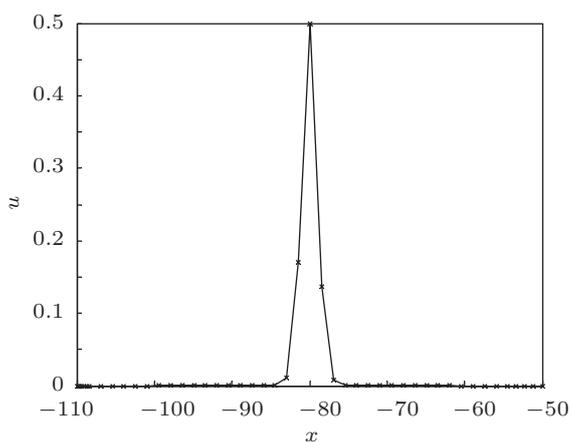


图 4 u_0 (实线) 和 $u_{1\text{hom}}$ (叉线) 在 $t = 10$ 的曲线重叠图 ($x \in [-110, -50]$)

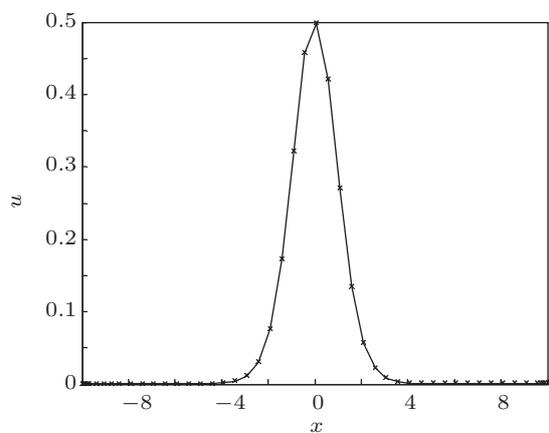


图 3 u_0 (实线) 和 $u_{1\text{hom}}$ (叉线) 在 $t = 0, \beta = 1, \varepsilon = 0.1$ 的曲线重叠图 ($x \in [-10, 10]$)

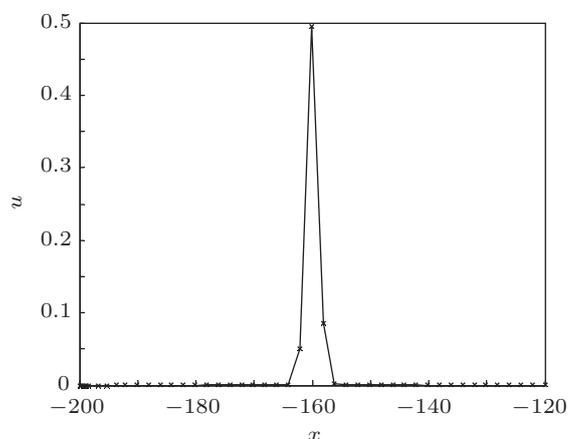


图 5 u_0 (实线) 和 $u_{1\text{hom}}$ (叉线) 在 $t = 20$ 的曲线重叠图 ($x \in [-200, -120]$)

- [1] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Commu. Theor. Phys.* **48** 662
- [2] Parkes E J 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **38** 154
- [3] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527
- [4] Yang X D, Ruan H Y, Lou S Y 2007 *Commu. Theor. Phys.* **48** 961
- [5] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4337
- [6] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese)
[潘留仙, 左伟明, 颜家壬 2005 物理学报 **54** 1]
- [7] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617 (in Chinese)
[卢殿臣, 洪宝剑, 田立新 2006 物理学报 **55** 5617]
- [8] Taogetusang, Sirendaorji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese)
[套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
- [9] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press)
- [10] Jean-Philippe B 2006 *Asymptotic Anal.* **46** 325
- [11] Libre J, da Silva, P R, Teixeira M A 2007 *J. Dyn. Differ. Equations* **19** 309
- [12] Shi L F, Mo J Q 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050203
- [13] Shi L F, Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8123 (in Chinese) [石兰芳, 莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 8123]
- [14] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204
- [15] Mo J Q 2009 *Sci. China G* **39** 568
- [16] Mo J Q, Lin Y H, Lin W 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030202
- [17] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205

Approximate method of solving solitary-like wave for a class of nonlinear equation*

Shi Lan-Fang^{1)†} Lin Wan-Tao²⁾ Lin Yi-Hua²⁾ Mo Jia-Qi³⁾

1) (College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

2) (State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamic, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

3) (Department of Mathematics Anhui Normal University, Wuhu 241003, China)

(Received 3 June 2012; revised manuscript received 29 July 2012)

Abstract

The approximate solitary-like wave solution for a class of disturbed evolution equation is considered using a simple and valid technique. First, an approximate solution of a corresponding typical differential equation is introduced, and then the approximate solution for an original disturbed evolution equation is obtained using the functional mapping method. It is pointed out that the series of approximate solution is convergent. The accuracy of the approximate solution is also discussed using the analytic method.

Keywords: solitary-like evolution equation, asymptotic method

PACS: 02.30.Lt

DOI: 10.7498/aps.62.010201

* Project supported by the Strategic Priority Research of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDA01020304), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11202106, 41275062, 141175058), and the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant Nos. KJ2012A001, KJ2012Z245).

† Corresponding author. E-mail: shilf108@163.com