非线性发展方程的 Riemann theta 函数等几种新解*

套格图桑[1)2)] 白玉梅[1)]

1) (内蒙古民族大学数学学院, 通辽 028043)

2) (内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(2012年8月16日收到; 2013年1月25日收到修改稿)

为了构造非线性发展方程的复合型无穷序列精确解, 获得了第二种椭圆方程的 Riemann theta 函数等几种新解. 在此基础上, 利用第二种椭圆方程与 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式, 借助符号计算系统 Mathematica, 以 mKdV 方程为应用实例, 构造了该方程的复合型无穷序列新精确解. 这里包括 Riemann theta 函数、Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数, 通过几种形式构成的复合型无穷序列新精确解.

关键词: 第二种椭圆方程, Riccati 方程, 非线性发展方程, Riemann theta 函数无穷序列解

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.62.100201

1 引 言

在孤立子理论中构造非线性发展方程的 Bäcklund 变换具有重要意义. 1976 年数学、物理学家缪拉建立了 KdV 方程 (1) 和 mKdV 方程 (2) 之间的拟 Bäcklund 变换 (3). 从缪拉变换可以看出, 获得 mKdV 方程的精确解, 对于获得 KdV 方程的精确解发挥着重要作用.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

$$w_t - 6w^2 w_x + w_{xxx} = 0. \tag{2}$$

$$u(x,t) = w^2(x,t) + w_x(x,t). \tag{3}$$

最近, 多种辅助方程法获得了非线性发展方程的各种新精确解 [1—46]. 本文通过分析研究辅助方程法获得的成果, 总结了辅助方程法的如下特点. 1) 获得了辅助方程的 Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数有限多个解; 2) 发挥了非线性发展方程形式解的选择性; 3) 发挥了符号计算系统的优越性; 4) 获得了非线性发展方程的有限多个单函数型精确解.

本文在辅助方程法的以上四种特点的基础上考虑构造非线性发展方程的无穷序列单函数和复合型新精确解的新问题. 因此, 在文献 [47—49] 获得的结论基础上, 给出了第二种椭圆方程的 Riemann theta 函数等几种新解. 这些新解结合与第二种椭圆方程与 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式, 在非线性发展方程的形式解和符号计算系统 Mathematica 的帮助下, 可以获得非线性发展方程的无穷序列新精确解. 这里用 mKdV 方程 [50—56] (4) 为应用实例, 构造了该方程的由 Riemann theta 函数、Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数单独构成的无穷序列新精确解和这些函数通过几种形式构成的复合型无穷序列新精确解.

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0. \tag{4}$$

当 $\alpha = -6, \beta = 1$ 时, 方程 (4) 与方程 (2) 是等价的. mKdV 方程描述非调和晶格中声波的传播等运动, 获得该方程的新解对于解释它的物理意义具有重要参考价值.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10862003)、内蒙古自治区高等学校科学研究基金 (批准号: NJZY12031) 和内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2010MS0111) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: tgts@imnu.edu.cn

2 第二种椭圆方程与 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式

2.1 第二种椭圆方程的 Bäcklund 变换

$$\left(\frac{\mathrm{d}y(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\left(y'(\xi)\right)^2$$

$$=ay(\xi)+by^2(\xi)+cy^3(\xi). \quad (5)$$

若 $y_{n-1}(\xi)$ 是第二种椭圆方程 (5) 的解, 则下列 $y_n(\xi)$ 也是方程 (5) 的解:

$$y_n(\xi)=\mp\frac{2a+(b\pm\sqrt{b^2-4ac})y_{n-1}(\xi)}{\pm b+\sqrt{b^2-4ac}\pm 2cy_{n-1}(\xi)} \quad (n=1,2,\cdots), \quad (6)$$

$$y_n(\xi)=\frac{a[-b+\sqrt{b^2-4ac}-2cy_{n-1}(\xi)]}{c[2a+(b-\sqrt{b^2-4ac})y_{n-1}(\xi)]} \quad (n=1,2,\cdots), \quad (7)$$

$$y_n(\xi)=\frac{-ab^2\pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)}-4abcy_{n-1}(\xi)+[-b^2c\mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]y_{n-1}^2(\xi)}{2abc+2b^2cy_{n-1}(\xi)+2bc^2y_{n-1}^2(\xi)} \quad (n=1,2,\cdots), \quad (8)$$

$$y_n(\xi)=\frac{a\left[-\sqrt{3A_1}\mp 9y'_{n-1}(\xi)\right]}{\sqrt{3A_1}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_1}cy_{n-1}(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})y'_{n-1}(\xi)} \quad (n=1,2,\cdots), \quad (9)$$

其中 $A_1=\sqrt{\frac{1}{c^2}[2b^3-9abc+2(b^2-3ac)^{\frac{3}{2}}]}$.

2.2 第二种椭圆方程的新解

2.2.1 Jacobi 椭圆函数、三角函数和指数函数新解

根据 Jacobi 椭圆函数的定义和周期性, 可以获得第二种椭圆方程的如下新解.

当 $a=4$, $b=-4(1+k^2)$, $c=4k^2$ 时, (10) 式是第二种椭圆方程 (5) 的解:

$$y(\xi)=\begin{cases} sn^2(\xi,k), & 2pK(k)\leqslant\xi\leqslant 2(1+p)K(k),\ p\in Z \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad (10)$$

当 $a=4(1-k^2)$, $b=4(2k^2-1)$, $c=-4k^2$ 时, 得到第二种椭圆方程 (5) 的如下解:

$$y(\xi)=\begin{cases} cn^2(\xi,k), & (2p-1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+1)K(k),\ p\in Z \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}, \quad (11)$$

其中

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\mathrm{d}x \quad (0\leqslant k\leqslant 1).$$

当 $c=0$ 时, 获得了第二种椭圆方程 (5) 的如下解:

$$y(\xi)=\begin{cases} -\frac{a}{2b}-\frac{a}{2b}\sin(\sqrt{-b}\xi)\ (b<0), & 2p\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\sqrt{-b}\xi\leqslant 2p\pi+\frac{3\pi}{2}\ (p\in Z), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (12)$$

$$y(\xi)=\begin{cases} -\frac{a}{2b}-\frac{a}{2b}\sin(\sqrt{-b}\xi)\ (b<0), & 2p\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\sqrt{-b}\xi\leqslant 2p\pi+\frac{5\pi}{2}\ (p\in Z), \\ -\frac{a}{b}, & \text{其他}, \end{cases} \quad (13)$$

$$y(\xi)=\begin{cases} -\frac{a}{2b}-\frac{a}{2b}\cos(\sqrt{-b}\xi)\ (b<0), & 2p\pi-\pi\leqslant\sqrt{-b}\xi\leqslant 2p\pi+\pi\ (p\in Z), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (14)$$

$$y(\xi)=\begin{cases} -\frac{a}{2b}-\frac{a}{2b}\cos(\sqrt{-b}\xi)\ (b<0), & 2p\pi\leqslant\sqrt{-b}\xi\leqslant 2p\pi+2\pi\ (p\in Z), \\ -\frac{a}{b}, & \text{其他}, \end{cases} \quad (15)$$

当 $b^2-4ac=0$ 时, 获得了第二种椭圆方程 (5) 的下列新类型解:

$$y(\xi)=\left[\frac{\sqrt{-b}\left[1+\exp\left(\frac{\sqrt{-2b}}{2}\mid\xi\mid\right)\right]}{\sqrt{2c}\left[1-\exp\left(\frac{\sqrt{-2b}}{2}|\xi|\right)\right]}\right]^2 \quad (c>0, b<0), \tag{16}$$

$$y(\xi)=\frac{b}{2c}\tan^2\left(\left|\frac{\sqrt{2b}}{4}\xi\right|\right) \quad (c>0,\ b>0). \tag{17}$$

2.2.2 Riemann theta 函数新解

在文献 [49] 中利用 Riemann theta 函数的定义[48] (18) 获得了第一种椭圆方程的 Riemann theta 函数. 本文利用第一种椭圆方程与第二种椭圆方程的关系, 获得了辅助方程 (5) 的 Riemann theta 函数解:

$$\theta\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^*\end{pmatrix}(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left[\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\pi\mathrm{i}\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)+2\left(z+\frac{\varepsilon^*}{2}\right)\right)\right], \tag{18}$$

这里 $\binom{\varepsilon}{\varepsilon^*}$ 是二维向量, n 为整数.

当 $-c=a=-4\theta_4^2(0)\theta_2^2(0)$, $b=4\left(\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0)\right)$ 时, 第二种椭圆方程 (5) 存在下列 Riemann theta 函数解:

$$y(\xi)=\left(\frac{\theta_3(\xi)}{\theta_1(\xi)}\right)^2. \tag{19}$$

当 $c=a=4\theta_3^2(0)\theta_2^2(0)$, $b=-4\left(\theta_2^4(0)+\theta_3^4(0)\right)$ 时, 第二种椭圆方程 (5) 存在下列 Riemann theta 函数解:

$$y(\xi)=\left(\frac{\theta_4(\xi)}{\theta_1(\xi)}\right)^2. \tag{20}$$

当 $c=a=4\theta_4^2(0)\theta_3^2(0)$, $b=4\left(\theta_3^4(0)+\theta_4^4(0)\right)$ 时, 第二种椭圆方程 (5) 存在下列 Riemann theta 函数解:

$$y(\xi)=\left(\frac{\theta_2(\xi)}{\theta_1(\xi)}\right)^2, \tag{21}$$

这里 $\theta_1(z)=\theta\binom{1}{1}(z;\tau)$, $\theta_2(z)=\theta\binom{1}{0}(z;\tau)$, $\theta_3(z)=\theta\binom{0}{0}(z;\tau)$, $\theta_4(z)=\theta\binom{0}{1}(z;\tau)$.

2.3 Riccati 方程的解与 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式

2.3.1 Riccati 方程的解

文献 [1—17] 利用 Riccati 方程 (22) 的五个解, 构造了许多非线性发展方程的精确解.

$$\frac{\mathrm{d}z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=R+z^2(\xi), \tag{22}$$

$$z(\xi)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi) \quad (R<0), \tag{23}$$

$$z(\xi)=-\sqrt{-R}\coth(\sqrt{-R}\xi) \quad (R<0), \tag{24}$$

$$z(\xi)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi) \quad (R>0), \tag{25}$$

$$z(\xi)=-\sqrt{R}\cot(\sqrt{R}\xi) \quad (R>0), \tag{26}$$

$$z(\xi)=-\frac{1}{\xi} \quad (R=0). \tag{27}$$

2.3.2 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式

经计算获得了 Riccati 方程的如下 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式.

情况 1 若 $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (22) 的解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (22) 的解:

$$\bar{z}(\xi)=\left[(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R+2(P-SR)z(\xi)+(Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z^2(\xi)\right]\times\{2[P+Qz(\xi)+Sz^2(\xi)]\}^{-1}. \tag{28}$$

情况 2 若 $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (22) 的解, 则下列 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (22) 的解.

$$\bar{z}(\xi)=\frac{-BR+Az(\xi)}{A+Bz(\xi)}, \tag{29}$$

其中 A, B, P, Q, S 是不全为零的任意常数.

情况 3 若 $z_1(\xi), z_2(\xi)$ 是 Riccati 方程 (22) 的解, 则下列 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (22) 的解:

$$\bar{z}(\xi)=\frac{\mathrm{i}R\left[\mathrm{i}m\sqrt{R}+\left(m+\mathrm{i}D\sqrt{R}+CR\right)z_2(\xi)+\left(-CR+Dz_2(\xi)\right)z_1(\xi)\right]}{-\sqrt{R^3}\left(D+Cz_2(\xi)\right)+\left(m\sqrt{R}+\mathrm{i}DR+C\sqrt{R^3}-\mathrm{i}mz_2(\xi)\right)z_1(\xi)} \quad (mD<0), \tag{30}$$

$$\bar{z}(\xi)=\frac{m+Dz_2(\xi)+\dfrac{1}{\sqrt{R}}\left[-\mathrm{i}CRz_1(\xi)+\mathrm{i}\left(m+CR+Dz_1(\xi)\right)z_2(\xi)\right]}{D+Cz_2(\xi)-\dfrac{1}{\sqrt{R^3}}\left(m\sqrt{R}-\mathrm{i}DR+C\sqrt{R^3}+\mathrm{i}mz_2(\xi)\right)z_1(\xi)} \quad (mD<0). \tag{31}$$

情况 4 若 $z_1(\xi), z_2(\xi), z_3(\xi)$ 是 Riccati 方程 (22) 的三个解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (22)

的解:

$$\bar{z}(\xi)=\frac{R\big[-rz_1(\xi)+(p+r)z_2(\xi)-pz_3(\xi)\big]}{-rz_2(\xi)z_3(\xi)+z_1(\xi)\big[-pz_2(\xi)+(p+r)z_3(\xi)\big]},\tag{32}$$

$$\bar{z}(\xi)=\frac{rz_2(\xi)z_3(\xi)-z_1(\xi)\big[qz_2(\xi)+(-q+r)z_3(\xi)\big]}{-rz_1(\xi)+(-q+r)z_2(\xi)+qz_3(\xi)},\tag{33}$$

$$\bar{z}(\xi)=-\frac{R\big[-Nz_3(\xi)+[-L+mz_3(\xi)]z_2(\xi)+[L+N+nz_2(\xi)-(m+n)z_3(\xi)]z_1(\xi)\big]}{nRz_3(\xi)+[mR+Nz_2(\xi)+Lz_3(\xi)]z_1(\xi)-\big[(m+n)R+(L+N)z_3(\xi)\big]z_2(\xi)},\tag{34}$$

这里 $C, D, p, q, r, m, n, N, L$ 都是不全为零的任意常数.

3 方法及其应用步骤

对于给定的非线性发展方程 (以 $1+1$ 维非线性发展方程为例)

$$H(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0,\tag{35}$$

进行行波变换 $u(x,t)=u(\xi), \xi=x+\omega t$ 后得到下列常微分方程

$$G(u,u_\xi,u_{\xi\xi},u_{\xi\xi\xi},\cdots)=0,\tag{36}$$

我们把方程 (36) 的解取为下列形式

$$u(x,t)=u(\xi)=F\big(z(\xi),y(\xi)\big),\tag{37}$$

这里 $F\big(z(\xi),y(\xi)\big)$ 表示 $y(\xi),z(\xi)$ 的多项式或有理分式. $y(\xi),z(\xi)$ 分别由辅助方程 (5) 和 (22) 来确定.

将 (5), (22), (37) 式一起代入 (36) 式, 令 $y^j(\xi)z^i(\xi)[y'(\xi)]^r$ $(r=0,1;\ i,j=0,1,2,\cdots)$ 的系数为零, 即可得到一个非线性代数方程组, 用符号计算系统 Mathematica 求出该代数方程组的解, 再把该代数方程组的每一组解分别同第二种椭圆方程 (5) 与 Riccati 方程 (22) 的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式来确定的解一起代入 (37) 式, 即可得到非线性发展方程 (35) 的由 Riemann theta 函数、Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数, 通过几种形式组合的复合型无穷序列新精确解.

如果把 (37) 式选择为只有 $z(\xi)$ 的多项式或有理分式, 而且与 Riccati 方程 (22) 结合后可获得非线性发展方程 (35) 的由双曲函数、三角函数和有理函数构成的单函数型无穷序列精确解.

如果把 (37) 式选择为只有 $y(\xi)$ 的多项式或有理分式, 而且与第二种椭圆方程 (5) 结合后可获得非线性发展方程 (35) 的由 Riemann theta 函数、Jacobi 椭圆函数、双曲函数和三角函数单独构成的无穷序列新精确解.

4 mKdV 方程的无穷序列复合型新精确解

利用以上给出的方法, 可以获得非线性发展方程的无穷序列新精确解. 下面给出一种形式解, 构造 mKdV 方程 (4) 的无穷序列复合型新精确解.

将 $u(x,t)=u(\xi), \xi=x+\omega t$ 代入方程 (4) 经对 ξ 积分一次后得到下列常微分方程

$$\omega u(\xi)+\frac{\alpha}{3}u^3(\xi)+\beta u''(\xi)=0.\tag{38}$$

我们把方程 (38) 的解取为下列表达式:

$$u(x,t)=u(\xi)=g_0+\frac{g_1y(\xi)+g_2z(\xi)}{h_1+h_2y(\xi)+h_3z(\xi)},\tag{39}$$

这里 $g_0, g_1, g_2, h_1, h_2, h_3$ 是待定的常数.

将 (5), (22), (39) 式一起代入 (38) 式, 令 $y^i(\xi)z^j(\xi)[y'(\xi)]^r$ $(r=0,1;\ i,j=0,1,2,3)$ 的系数为零后得到一个非线性代数方程组 (限于篇幅未列出), 用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解:

$$\omega=\frac{b\beta}{2},\quad h_1=0,\quad g_2=\mp\mathrm{i}\sqrt{\frac{3b\beta}{2\alpha}}h_3,$$
$$h_2=\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\alpha}{3b\beta}}g_1,\quad g_0=0\ \ (\alpha\beta<0),\tag{40}$$

$$\omega=\frac{b\beta}{2},\quad h_1=0,\quad g_2=\mp\mathrm{i}\sqrt{\frac{6b\beta}{\alpha}}h_3,$$
$$h_2=\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha}{6b\beta}}g_1,\ g_0=\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{3b\beta}{2\alpha}}\ \ (\alpha\beta<0).\tag{41}$$

将 (40), (41) 式分别代入 (39) 式后, 得到 mKdV 方程 (4) 的下列形式的精确解:

$u_{(1)}(x,t)$

$$=\frac{6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1y\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)\pm3\sqrt{6}b\beta h_3z\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)}{\mp2\sqrt{6}\alpha g_1y\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)+6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3z\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)},\tag{42}$$

$$u_{(2)}(x,t)=\frac{3\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1y\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)\pm3\sqrt{6}b\beta h_3z\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)}{\mp\sqrt{6}\alpha g_1y\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)+6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3z\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)},\tag{43}$$

这里 $y(\xi)=y\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right),z(\xi)=z\left(x+\frac{b\beta}{2}t\right)$ 分别由第二种椭圆方程 (5) 和 Riccati 方程 (22) 的解来确定.

根据下面列出的第二种椭圆方程 (5) 和 Riccati 方程 (22) 解的非线性叠加公式 (这里只列出几种公式), 构造 mKdV 方程 (4) 的无穷序列复合型新精确解.

情况 1 无穷序列复合型光滑形式新精确解.

1) Riemann theta 函数与双曲函数复合的无穷序列新精确解

$$\begin{cases}u_n(x,t)=\dfrac{6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1y_n(\xi)\pm3\sqrt{6}b\beta h_3z_j(\xi)}{\mp2\sqrt{6}\alpha g_1y_n(\xi)+6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3z_j(\xi)},\\ y_n(\xi)=\dfrac{-ab^2\pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)}-4abcy_{n-1}(\xi)+[-b^2c\mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]y_{n-1}^2(\xi)}{2abc+2b^2cy_{n-1}(\xi)+2bc^2y_{n-1}^2(\xi)},\\ y_0(\xi)=\left(\dfrac{\theta_3(\xi)}{\theta_1(\xi)}\right)^2,\ -c=a=-4\theta_4^2(0)\theta_2^2(0),\ b=4\big(\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0)\big),\\ z_j(\xi)=\dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R+2(P-SR)z_{j-1}(\xi)+(Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]},\\ z_0(\xi)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)\ \ (R<0,\ n,j=1,2,\cdots).\end{cases}\tag{44}$$

2) Riemann theta 函数与三角函数复合的无穷序列新精确解

$$\begin{cases}u_n(x,t)=\dfrac{6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1y_n(\xi)\pm3\sqrt{6}b\beta h_3z_j(\xi)}{\mp2\sqrt{6}\alpha g_1y_n(\xi)+6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3z_j(\xi)},\\ y_n(\xi)=\dfrac{-ab^2\pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)}-4abcy_{n-1}(\xi)+[-b^2c\mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]y_{n-1}^2(\xi)}{2abc+2b^2cy_{n-1}(\xi)+2bc^2y_{n-1}^2(\xi)},\\ y_0(\xi)=\left(\dfrac{\theta_3(\xi)}{\theta_1(\xi)}\right)^2,\ -c=a=-4\theta_4^2(0)\theta_2^2(0),\ b=4\big(\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0)\big),\\ z_j(\xi)=\dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R+2(P-SR)z_{j-1}(\xi)+(Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]},\\ z_0(\xi)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi)\ \ (R>0,\ \ n,j=1,2,\cdots).\end{cases}\tag{45}$$

3) Riemann theta 函数与有理函数复合的无穷序列新精确解

$$\begin{cases}u_n(x,t)=\dfrac{6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1y_n(\xi)\pm3\sqrt{6}b\beta h_3z_j(\xi)}{\mp2\sqrt{6}\alpha g_1y_n(\xi)+6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3z_j(\xi)},\\ y_n(\xi)=\dfrac{-ab^2\pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)}-4abcy_{n-1}(\xi)+[-b^2c\mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]y_{n-1}^2(\xi)}{2abc+2b^2cy_{n-1}(\xi)+2bc^2y_{n-1}^2(\xi)},\\ y_0(\xi)=\left(\dfrac{\theta_3(\xi)}{\theta_1(\xi)}\right)^2,-c=a=-4\theta_4^2(0)\theta_2^2(0),\ b=4\big(\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0)\big),\\ z_j(\xi)=\dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R+2(P-SR)z_{j-1}(\xi)+(Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]},\\ z_0(\xi)=-\dfrac{1}{\xi}\ \ (R=0,\ n,j=1,2,\cdots).\end{cases}\tag{46}$$

利用第二种椭圆方程 (5) 的 Jacobi 椭圆函数解和 Riccati 方程 (22) 的解, 可以获得 mKdV 方程 (4) 的其他形式的无穷序列复合型新精确解 (这里未列出).

情况 2 紧孤立子与光滑孤立子复合的无穷序列新精确解.

根据第二种椭圆方程 (5) 的特殊情况和 Jacobi 椭圆函数的性质, 获得了该辅助方程的三角函数型紧孤立子解与 Jacobi 椭圆函数型紧孤立子解. 利用这种解可以获得非线性发展方程的新精确解.

1) Jacobi 椭圆函数与双曲函数复合的无穷序列新精确解

$$\begin{cases} u_n(x,t)=\dfrac{6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1y_n(\xi)\pm3\sqrt{6}b\beta h_3z_j(\xi)}{\mp2\sqrt{6}\alpha g_1y_n(\xi)+6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3z_j(\xi)},\\ y_n(\xi)=\dfrac{-ab^2\pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)}-4abcy_{n-1}(\xi)+[-b^2c\mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]y_{n-1}^2(\xi)}{2abc+2b^2cy_{n-1}(\xi)+2bc^2y_{n-1}^2(\xi)},\\ y_0(\xi)=\begin{cases} sn^2(\xi,k), & 2pK(k)\leqslant\xi\leqslant2(1+p)K(k),\ p\in Z,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}\quad a=4,\ b=-4(1+k^2),\ c=4k^2,\\ z_j(\xi)=\dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R+2(P-SR)z_{j-1}(\xi)+(Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]},\\ z_0(\xi)=-\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi)\ \ (R<0,\ \ n,j=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{47}$$

2) Jacobi 椭圆函数与三角函数复合的无穷序列新精确解

$$\begin{cases} u_n(x,t)=\dfrac{3\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1y_n(\xi)\pm3\sqrt{6}b\beta h_3z_j(\xi)}{\mp\sqrt{6}\alpha g_1y_n(\xi)+6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3z_j(\xi)},\\ y_n(\xi)=\dfrac{-ab^2\pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)}-4abcy_{n-1}(\xi)+[-b^2c\mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]y_{n-1}^2(\xi)}{2abc+2b^2cy_{n-1}(\xi)+2bc^2y_{n-1}^2(\xi)},\\ y_0(\xi)=\begin{cases} sn^2(\xi,k), & 2pK(k)\leqslant\xi\leqslant2(1+p)K(k),\ p\in Z,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}\quad a=4,\ \ b=-4(1+k^2),\ \ c=4k^2,\\ z_j(\xi)=\dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R+2(P-SR)z_{j-1}(\xi)+(Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]},\\ z_0(\xi)=\sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi)\ \ (R>0,\ \ n,j=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{48}$$

3) Jacobi 椭圆函数与有理函数复合的无穷序列新精确解

$$\begin{cases} u_n(x,t)=\dfrac{3\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1y_n(\xi)\pm3\sqrt{6}b\beta h_3z_j(\xi)}{\mp\sqrt{6}\alpha g_1y_n(\xi)+6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3z_j(\xi)},\\ y_n(\xi)=\dfrac{-ab^2\pm a\sqrt{b^2(b^2-4ac)}-4abcy_{n-1}(\xi)+[-b^2c\mp c\sqrt{b^2(b^2-4ac)}]y_{n-1}^2(\xi)}{2abc+2b^2cy_{n-1}(\xi)+2bc^2y_{n-1}^2(\xi)},\\ y_0(\xi)=\begin{cases} sn^2(\xi,k), & 2pK(k)\leqslant\xi\leqslant2(1+p)K(k),\ p\in Z,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}\quad a=4,\ \ b=-4(1+k^2),\ \ c=4k^2,\\ z_j(\xi)=\dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R+2(P-SR)z_{j-1}(\xi)+(Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]},\\ z_0(\xi)=-\dfrac{1}{\xi}\ \ (R=0,\ \ n,j=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{49}$$

情况 3 尖峰孤立子与光滑孤立子复合的无穷序列新精确解.

根据辅助方程法的构造性, 获得了第二种椭圆方程 (5) 的尖峰形式解. 因此, 利用下面的几种公式来构造 mKdV 方程 (4) 的尖峰孤立子与光滑孤立子复合的无穷序列新精确解.

1) 指数函数与三角函数复合的无穷序列新精确解

$$\begin{cases} u_n(x,t) = \dfrac{3\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1 y_n(\xi) \pm 3\sqrt{6}b\beta h_3 z_j(\xi)}{\mp\sqrt{6}\alpha g_1 y_n(\xi) + 6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3 z_j(\xi)}, \\ y_n(\xi) = \dfrac{-ab^2 - 4abcy_{n-1}(\xi) - b^2cy_{n-1}^2(\xi)}{2abc + 2b^2cy_{n-1}(\xi) + 2bc^2y_{n-1}^2(\xi)}, \\ y_0(\xi) = \left[\dfrac{\sqrt{-b}\left[1+\exp\left(\dfrac{\sqrt{-2b}}{2}\mid\xi\mid\right)\right]}{\sqrt{2c}\left[1-\exp\left(\dfrac{\sqrt{-2b}}{2}|\xi|\right)\right]}\right]^2 \quad (c>0,\ b<0), \\ z_j(\xi) = \dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R + 2(P-SR)z_{j-1}(\xi) + (Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]}, \\ z_0(\xi) = \sqrt{R}\tan(\sqrt{R}\xi) \ \ (R>0,\ \ n,j=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{50}$$

2) 指数函数与双曲函数复合的无穷序列新精确解.

$$\begin{cases} u_n(x,t) = \dfrac{3\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1 y_n(\xi) \pm 3\sqrt{6}b\beta h_3 z_j(\xi)}{\mp\sqrt{6}\alpha g_1 y_n(\xi) + 6\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}h_3 z_j(\xi)}, \\ y_n(\xi) = \dfrac{-ab^2 - 4abcy_{n-1}(\xi) - b^2cy_{n-1}^2(\xi)}{2abc + 2b^2cy_{n-1}(\xi) + 2bc^2y_{n-1}^2(\xi)}, \\ y_0(\xi) = \left[\dfrac{\sqrt{-b}\left[1+\exp\left(\frac{\sqrt{-2b}}{2}\mid\xi\mid\right)\right]}{\sqrt{2c}\left[1-\exp\left(\dfrac{\sqrt{-2b}}{2}|\xi|\right)\right]}\right]^2 \quad (c>0,b<0), \\ z_j(\xi) = \dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R + 2(P-SR)z_{j-1}(\xi) + (Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]}, \\ z_0(\xi) = -\sqrt{-R}\tanh(\sqrt{-R}\xi) \quad (R<0,n,j=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{51}$$

3) 指数函数与有理函数复合的无穷序列新精确解

$$\begin{cases} u_n(x,t) = \dfrac{3\mathrm{i}\sqrt{b\alpha\beta}g_1 y_n(\xi) \pm 3\sqrt{6}b\beta h_3 z_j(\xi)}{\mp\sqrt{6}\alpha g_1 y_n(\xi) + 6i\sqrt{b\alpha\beta}h_3 z_j(\xi)}, \\ y_n(\xi) = \dfrac{-ab^2 - 4abcy_{n-1}(\xi) - b^2cy_{n-1}^2(\xi)}{2abc + 2b^2cy_{n-1}(\xi) + 2bc^2y_{n-1}^2(\xi)}, \\ y_0(\xi) = \left[\dfrac{\sqrt{-b}\left[1+\exp\left(\dfrac{\sqrt{-2b}}{2}\mid\xi\mid\right)\right]}{\sqrt{2c}\left[1-\exp\left(\dfrac{\sqrt{-2b}}{2}|\xi|\right)\right]}\right]^2 \quad (c>0,\ \ b<0), \\ z_j(\xi) = \dfrac{(-Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})R + 2(P-SR)z_{j-1}(\xi) + (Q\mp\sqrt{Q^2-4PS})z_{j-1}^2(\xi)}{2[P+Qz_{j-1}(\xi)+Sz_{j-1}^2(\xi)]}, \\ z_0(\xi) = -\dfrac{1}{\xi} \ \ (R=0,\ \ n,j=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{52}$$

在以上 (44)—(52) 式中 $\xi = x + \dfrac{b\beta}{2}t$, P, Q, S 是不全为零的任意常数.

5 结 论

辅助方程法有关的诸多文献 (比如: 文献[1—51]) 获得了如下成果: 1) 获得了非线性发展方程的有限多个新精确解; 2) 获得了非线性发展方程的单函数型精确解, 即 Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数单独构成的精确解; 3) 获得了非线性发展方程的光滑孤立子解、紧孤立

子解和尖峰孤立子解, 未能获得这三种解复合的精确解.

本文对辅助方程法有关的文献 [1—51] 进行比较分析, 总结了这些成果的共同特点, 即构造性和机械化性特点. 在此基础上, 深刻领会构造性和机械化性特点的内涵, 获得了如下新结论: 1) 获得了第二种椭圆方程的 Riemann theta 函数等新解以及相应的 Bäcklund 变换; 2) 为了获得非线性发展方程的复合型无穷序列新精确解, 给出非线性发展方程的一种形式解; 3) 结合与 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式, 在符号计算系统 Mathematica 的帮助下, 构造了 mKdV 方程 (4) 的无穷序列复合型新精确解 (见本文中给出的 (44)—(52) 式).

利用辅助方程法的构造性和机械化性特点, 可以获得第二种椭圆方程的 Riemann theta 函数等广义函数解. 在此基础上, 根据第二种椭圆方程的 Bäcklund 变换, 选择非线性发展方程的形式解, 比较简便地获得非线性发展方程的新解.

[1] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212
[2] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940
[3] Chen Y, Yan Z Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 1
[4] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 137
[5] Li D S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 143
[6] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984
[7] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377
[8] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 497
[9] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 585
[10] Xie F D, Yuan Z T 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 39
[11] Zhen X D, Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 647
[12] Lü Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 405
[13] Xie F D, Gao X S 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 353
[14] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 1
[15] Ma S H, Fang J P, Zhu H P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4319 (in Chinese) [马松华, 方建平, 朱海平 2007 物理学报 **56** 4319]
[16] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华, 吴小红, 方建平, 郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]
[17] Pan J T, Gong L X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 399
[18] Jiao X Y, Wang J H, Zhang H Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **44** 407
[19] Liu Y P, Li Z B 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 317
[20] Xu G Q, Li Z B 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 39
[21] Li Z L 2009 *Chin. Phys.* B **18** 4074
[22] Wang Z, Li D S, Lu H F, Zhang H Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 2158
[23] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377
[24] Lu B, Zhang H Q 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3974
[25] Wang Z, Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2210
[26] Zhang J L, Ren D F, Wang M L, Wang Y M, Fang Z D 2003 *Chin. Phys.* **12** 825
[27] Zhang L, Zhang L F, Li C Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 403
[28] Zhao X Q, Zhi H Y, Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2202
[29] Li J B 2007 *Sci. Chin. Math.* A **50** 153
[30] Li H M 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 395
[31] Li H M 2005 *Chin. Phys.* **14** 251
[32] Li H M 2002 *Chin. Phys.* **11** 1111
[33] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Chin. Phys.* **15** 2809
[34] Liu C S 2005 *Chin. Phys.* **14** 1710
[35] Zhu J M, Zheng C L, Ma Z Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 2008
[36] Fu Z T, Liu S D, Liu S K 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 531
[37] Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 343
[38] Taogetusang, Sirendaoerji 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1295 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2008 物理学报 **57** 1295]
[39] Sirendaoerji, Sun J 2003 *Phys. Lett.* A **309** 387
[40] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3246 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 3246]
[41] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Chin. Phys.* **15** 1143
[42] Taogetusang, Sirendaoerji 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 627 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2007 物理学报 **56** 627]
[43] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 13 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]
[44] Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 27
[45] Yu J, Ke Y Q, Zhang W J 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 493
[46] Sirendaoerji, Sun J 2002 *Phys. Lett.* A **298** 133
[47] Taogetusang, Sirendaoerji,Wang Q P 2009 *Acta Sci. J. Nat. Univ. Neimongol.* **38** 387 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉, 王庆鹏 2009 内蒙古师范大学学报 **38** 387]
[48] Wang J M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080201 (in Chinese) [王军民 2012 物理学报 **61** 080201]
[49] Lawden D F 1989 *Elliptic Functions and Applications* (Berlin: Springer-Verlag) p496
[50] Li D S, Zhang H Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1565 (in Chinese) [李德生, 张鸿庆 2006 物理学报 **55** 1565]
[51] Wu H Y, Zhang L, Tan Y K, Zhou X T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3312 (in Chinese) [吴海燕, 张亮, 谭言科, 周小滔 2008 物理学报 **57** 3312]
[52] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适, 付遵涛, 刘式达, 赵强 2002 物理学报 **51** 10]
[53] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2069 (in Chinese) [刘式适, 付遵涛, 刘式达, 赵强 2001 物理学报 **50** 2069]
[54] Liu S K, Fu Z T, Wang Z G, Liu S D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1838 (in Chinese) [刘式适, 付遵涛, 王彰贵, 刘式达 2003 物理学报 **52** 1838]
[55] Liu S K, Chen H, Fu Z T, Liu S D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1843 (in Chinese) [刘式适, 陈华, 付遵涛, 刘式达 2003 物理学报 **52** 1843]
[56] Shi Y R, Guo P, Lü K P, Duan W S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3265 (in Chinese) [石玉仁, 郭鹏, 吕克璞, 段文山 2004 物理学报 **53** 3265]
[57] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2011 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **55** 949

Riemann theta function and other several kinds of new solutions of nonlinear evolution equations*

Taogetusang[1)2)†] Bai Yu Mei[1)]

1) (*The College of Mathematical, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao* 028043, *China*)

2) (*The College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot* 010022, *China*)

(Received 16 August 2012; revised manuscript received 25 January 2013)

Abstract

Riemann theta function and other several kinds of new solutions to the second kind of elliptic equation are obtained to construct the infinite sequence complexiton solutions of nonlinear evolution equations. Based on this, applying Bäcklund transformation and nonlinear superposition formula of the solutions to the second kind of elliptic equation and Riccati equation, mKdV equation is chosen as an example to seek infinite sequence new complexiton solutions with the help of symbolic computation system Mathematica, which are composed of Riemann theta function, Jacobi elliptic function, hyperbolic function, triangular function and rational function in several forms.

Keywords: the second kind of elliptic equation, Riccati equation, nonlinear evolution equation, Riemann theta function infinite sequence solution

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.62.100201

* Project supported by the Natural Natural Science Foundation of China (Grant No. 10862003), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZY12031) and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2010MS0111).

† Corresponding author. E-mail: tgts@imnu.edu.cn