

# 一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中 Gross-Pitaevskii 方程简化模型的精确行波解\*

徐园芬†

(浙江万里学院基础学院, 宁波 315101)

(2012年8月5日收到; 2012年12月24日收到修改稿)

利用动力系统方法研究一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中 Gross-Pitaevskii (GP) 方程简化模型的一些精确行波解以及这些精确行波解的动力学行为, 研究系统的参数对行波解的动力学行为的影响. 在不同的参数条件下, 获得了一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中 GP 方程简化模型的六个行波解的精确参数表达式.

关键词: 动力系统方法, 孤立波解, 周期波解, 扭波解

PACS: 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.62.100202

## 1 引言

对于一维 Tonks-Girardeau 原子气区域<sup>[1-4]</sup>, 很多学者<sup>[5-12]</sup> 已广泛研究了多年. 在平均场理论框架下, 用于描述一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程已被 Liu 等<sup>[13-16]</sup> 进行了研究, Jackson 等<sup>[17-19]</sup> 和 Khawaja 等<sup>[20,21]</sup> 发现 GP 方程分别具有暗孤子解和亮孤子解; 刘红等<sup>[22]</sup> 利用文献 [23] 中的球对称变换, 将 GP 方程转换成一个含五次方的一维非线性薛定谔方程, 通过解析的方法, 对这种相互作用势下的一维高阶非线性薛定谔方程进行求解, 得到了一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中的一个亮孤子解.

求解含五次方的一维非线性薛定谔方程是人们一直感兴趣的问题, 由于描述一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中 GP 方程简化模型所对应的行波系统的动力学行为至今尚未研究. 本文利用平面动力系统方法研究此行波系统的动力学分支<sup>[24-26]</sup>, 在不同的参数条件下, 获得一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中 GP 方程简化模型的六个行波解的精确参数表达式.

## 2 物理模型和行波方程

在平均场理论框架下, 描述一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中的著名的 GP 方程

$$i a \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, t) = \left[ -\frac{a^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(r) + g' |\Phi^2(r, t)| \right] \Phi(r, t), \quad (1)$$

刘红等<sup>[22]</sup> 利用文献 [23] 中的球对称变换, 将其转换成一个含高阶项的一维非线性薛定谔方程

$$i u_t + u_{xx} - a |u|^4 u = 0, \quad (2)$$

其中  $u(x, t)$  为波的复振幅,  $a$  为耦合常数, 并获得了方程 (2) 的一个亮孤子解.

本文研究方程 (2) 的行波解, 做变换

$$u(x, t) = \phi(\xi) e^{i\eta}, \quad \xi = x - ct, \quad \eta = mx + nt, \quad (3)$$

将 (3) 式代入方程 (2), 化简得如下的行波方程

$$\phi''(\xi) = \left( n + \frac{c^2}{4} \right) \phi(\xi) + a \phi^5(\xi), \quad (4)$$

记  $-\left( n + \frac{c^2}{4} \right) = b$ , 则 (4) 式变为

$$\phi''(\xi) = a \phi^5(\xi) - b \phi(\xi), \quad (5)$$

\* 浙江省自然科学基金 (批准号: LY12E05005) 和浙江省科学技术厅一般项目 (批准号: 2012C21084) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xuyuanfen93@126.com

行波方程 (5) 等价于如下的系统

$$\frac{d\phi}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = a\phi^5 - b\phi, \quad (6)$$

并有以下的首次积分

$$H(\phi, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{a}{6}\phi^6 + \frac{b}{2}\phi^2 = h. \quad (7)$$

下面的目标是首先通过定性分析, 得到系统 (6) 随参数改变的相图, 然后得到方程 (2) 的行波解的精确参数表达式.

### 3 系统 (6) 的所有相图

显然原点 (0, 0) 是系统 (6) 的平衡点, 并且仅当  $ab > 0$  时, 系统 (6) 有两个平衡点  $\phi_{1,2} = \pm \sqrt[4]{b/a}$ , 设  $E(\phi_e, 0)$  为系统 (6) 的任一平衡点,  $M(\phi_e, 0)$  是系统 (6) 的线性化系统在该平衡点处的系数矩阵, 有

$$\det M(0, 0) = b, \\ \det M(\phi_{1,2}, 0) = -4b,$$

记

$$h_0 = H(0, 0) = 0, \\ h_{1,2} = H(\phi_{1,2}, 0) = \frac{b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}},$$

通过定性分析可知, 随参数  $a, b$  的改变, 系统 (6) 有如图 1 所示的相图.

### 4 系统 (6) 周期波解、孤立波解、扭波解的参数表示

在这部分给出在不同的参数条件下, 系统 (6) 的由  $H(\phi, y) = h$  定义的轨道的参数表示.

从 (7) 式得到

$$y^2 = \frac{a}{3}\phi^6 - b\phi^2 + 2h, \quad (8)$$

利用变换  $\psi = \phi^2$ , 从 (6) 式的第 1 个方程和  $d\phi = \frac{1}{2\phi}d\psi$  得到

$$\int \frac{d\phi}{y} = \int \frac{d\psi}{2\sqrt{\psi}\sqrt{\frac{a}{3}\psi^3 - b\psi + 2h}} = \xi,$$

即

$$\int \frac{d\psi}{2\sqrt{\frac{a}{3}\psi^4 - b\psi^2 + 2h\psi}} = \xi. \quad (9)$$

#### 4.1 $a > 0, b > 0$ 情形 (见图 1(a))

当  $h \in (h_0, h_1)$  即  $h \in \left(0, \frac{b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$  时, 由  $H(\phi, y) = h$  定义的水平曲线有一族周期轨道, (9) 式可以写成

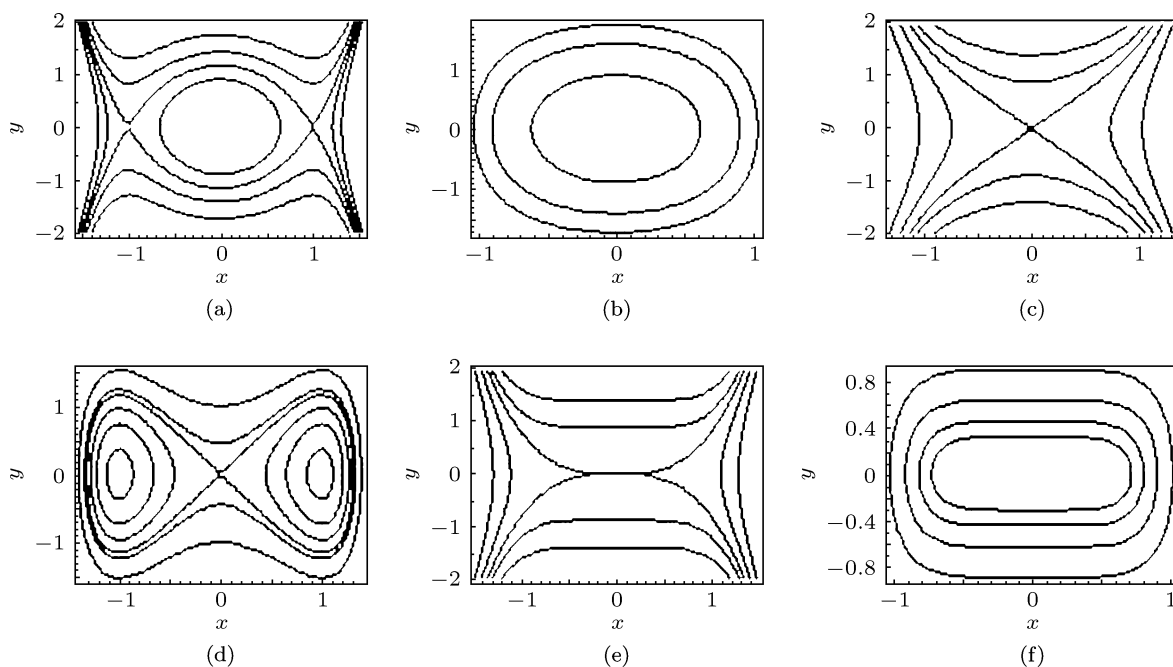


图 1 系统 (6) 的相图 (a)  $a > 0, b > 0$ ; (b)  $a < 0, b > 0$ ; (c)  $a > 0, b < 0$ ; (d)  $a < 0, b < 0$ ; (e)  $a > 0, b = 0$ ; (f)  $a < 0, b = 0$

$$\int \frac{d\psi}{2\sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt{(r_1-\psi)(r_2-\psi)\psi(\psi-r_3)}} = \xi,$$

从而得

$$\psi(\xi) = \frac{r_2 r_3 \operatorname{sn}^2(\omega \xi, k)}{r_2 \operatorname{sn}^2(\omega \xi, k) - (r_2 - r_3)},$$

其中

$$k^2 = \frac{r_2(r_1 - r_3)}{r_1(r_2 - r_3)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{ar_1(r_2 - r_3)}{3}}.$$

在图 1(a) 中, 对应于相平面中的一族周期轨道, 系统 (6) 有如下形式的一族周期波解:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \sqrt{\psi(\xi)} \\ &= \left( \frac{r_2 r_3 \operatorname{sn}^2(\omega \xi, k)}{r_2 \operatorname{sn}^2(\omega \xi, k) - (r_2 - r_3)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

当  $h = h_1 = \frac{b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}$  时, 由  $H(\phi, y) = h$  定义的水平曲线是连接两鞍点  $(\phi_1, 0)$  和  $(\phi_2, 0)$  的两条异宿轨道, 在图 1(a) 中, 对应于相平面中上面的一条异宿轨道, 系统 (6) 有如下形式的扭波解

$$\phi(\xi) = \left( \frac{2\sqrt{\frac{b}{a}} \tanh^2\left(\frac{b}{a}\sqrt{3a}\xi\right)}{3 - \tanh^2\left(\frac{b}{a}\sqrt{3a}\xi\right)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

#### 4.2 $a < 0, b > 0$ 情形 (见图 1(b))

当  $h \in (0, +\infty)$  时, 由  $H(\phi, y) = h$  定义的水平曲线是一族周期轨道, (9) 式可以写成

$$\int \frac{d\psi}{2\sqrt{\frac{|a|}{3}}\sqrt{(r_1-\psi)\psi[(\psi-b_1)^2+a_1^2]}} = \xi.$$

系统 (6) 有如下形式的一族周期波解:

$$\phi(\xi) = \left( \frac{r_1 B - r_1 B \operatorname{cn}(\omega \xi, k)}{A + B + (A - B) \operatorname{cn}(\omega \xi, k)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

其中  $A^2 = (r_1 - b_1)^2 + a_1^2$ ,  $B^2 = b_1^2 + a_1^2$ ,  $k^2 = \frac{r_1^2 - (A - B)^2}{4AB}$ ,  $\omega = 2\sqrt{\frac{|a|AB}{3}}$ .

#### 4.3 $a < 0, b < 0$ 情形 (见图 1(d))

当  $h \in (-\infty, 0)$  时, 由  $H(\phi, y) = h$  定义的水平曲线是两族周期轨道, 在图 1(d) 中, 对应于右相平面中的一族周期轨道, (9) 式可以写成

$$\int \frac{d\psi}{2\sqrt{\frac{|a|}{3}}\sqrt{(r_1-\psi)(\psi-r_2)\psi(\psi-r_3)}} = \xi.$$

系统 (6) 有如下形式的一族周期波解

$$\phi(\xi) = \left( \frac{r_1 r_2}{r_1 - (r_1 - r_2) \operatorname{sn}^2(\omega \xi, k)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

其中  $k^2 = \frac{r_3(r_2 - r_1)}{r_1(r_2 - r_3)}$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{|a|r_1(r_2 - r_3)}{3}}$ .

当  $h = 0$  时, 由  $H(\phi, y) = 0$  定义的水平曲线是两条同宿轨道, 在图 1(d) 中, 对应于右相平面中的一条同宿轨道, 系统 (6) 有如下形式的孤立波解:

$$\phi(\xi) = \left( \frac{\sqrt{\frac{3b}{a}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{b}{a}\sqrt{3|a|}\xi\right)}{2 - \operatorname{sech}^2\left(\frac{b}{a}\sqrt{3|a|}\xi\right)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

当  $h \in (0, +\infty)$  时, 由  $H(\phi, y) = h$  定义的水平曲线是一族周期轨道, 系统 (6) 一族周期波解的表达式同 (12).

#### 4.4 $a < 0, b = 0$ 情形 (见图 1(f))

当  $h \in (0, +\infty)$  时, 由  $H(\phi, y) = h$  定义的水平曲线是一族周期轨道, 系统 (6) 有如下形式的一族周期波解

$$\phi(\xi) = \left( \frac{\sqrt[3]{\frac{6h}{a}} \operatorname{cn}(\omega \xi, k) - 1}{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{cn}(\omega \xi, k)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

其中,  $k^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ ,  $\omega = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{6h}{a}} \sqrt{\frac{\sqrt{3}|a|}{3}}$ .

### 5 结论

综上所述, 本文应用平面动力系统方法, 研究了其他文献至今尚未研究的一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中 GP 方程简化模型所对应的行波系统的动力学行为, 通过定性分析, 得到系统 (6) 随参数改变的相图, 在不同的参数条件下, 得到了系统 (6) 的六个解的精确参数表达 (10)—(15) 式, 根据文中第二部分, 把 (10)—(15) 式中的  $\phi(\xi)$  分别代入  $u(x, t) = \phi(\xi)e^{i\eta}$  中, 其中  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = mx + nt$ , 可获得一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中 GP 方程简化模型的六个精确行波解, 获得的这六个精确行波解对从实验上观测超冷原子气体的波动现象具有指导作用.

- [1] Girardeau M 1960 *J. Math. Phys.* **1** 516  
 [2] Girardeau M 1965 *Phys. Rev. B* **139** 500  
 [3] Tonks L 1936 *Phys. Rev.* **50** 955  
 [4] Lieb E H, Liniger W 1963 *Phys. Rev.* **130** 1605  
 [5] Olshanii M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 938  
 [6] Dunjko V, Lorent V, Olshanii M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5413  
 [7] Paredes B, Widera A, Murg V 2004 *Nature* **429** 227  
 [8] Kinoshita T, Wenger T, Weiss D 2004 *Science* **305** 1125  
 [9] Kinoshita T, Wenger T, Weiss D 2006 *Nature* **440** 900  
 [10] Pollet L, Rombouts S M, Denteneer P J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 210401  
 [11] Rojo A, Cohen J L, Berman P R 1999 *Phys. Rev. A* **60** 1482  
 [12] Girardeau M D, Wright E M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5239  
 [13] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404  
 [14] Liu J, Zhang C, Mark G, Niu Q 2003 *Phys. Rev. A* **73** 13601  
 [15] Carr L D, Brand J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 40401  
 [16] Eiermann B, Anker T, Albiez M, Taglieber M, Treutlein P, Marzlin K P, Oberthaler M K 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 230401  
 [17] Jackson B, Proukakis N P, Barenghi C F 2007 *Phys. Rev. A* **75** 51601  
 [18] Burger S, Bongs K, Dettmer S, Ertmer W, Sengstock K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198  
 [19] Ei G A, Gammal A, Kamchatnov A M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 180405  
 [20] Khawaja U A, Stoof H T C, Hulet R G, Strecker K E, Partridge G B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **89** 200404  
 [21] Prez-Garca V M, Michinel H, Herrero H 1998 *Phys. Rev. A* **57** 3837  
 [22] Liu H, Wei J Y, Lou S Y, He X T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1343 (in Chinese) [刘红, 魏佳羽, 楼森岳, 贺贤士 2008 物理学报 **57** 1343]  
 [23] Lee T D, Huang K, Yang C N 1957 *Phys. Rev.* **106** 1135  
 [24] Li J B, Dai H H 2007 *On the Study of Singular Nonlinear Traveling Wave Equations: Dynamical System Approach* (Beijing: Science Press) p19  
 [25] Li J B 2008 *Appl. Math. Mech.* **29** 1261 (in Chinese) [李继彬 2008 应用数学和力学 **29** 1261]  
 [26] Li J B, Liu Z R 2000 *Appl. Math. Model.* **25** 41

# Exact traveling wave solutions for simplified model of Gross-Pitaevskii equation in the 1D-Tonks-Girardeau gas\*

Xu Yuan-Fen<sup>†</sup>

(Junior College, Zhejiang Wanli University, Ningbo 315101, China)

(Received 5 August 2012; revised manuscript received 24 December 2012)

## Abstract

By using a dynamical system method, in this paper studied are some exact traveling wave solutions and dynamic behaviors of these traveling wave solutions for simplified model of Gross-Pitaevskii (GP) equation in the 1D-Tonks-Girardeau gas. The effects of the behaviors on the parameters of the systems are also studied. Under different parametric conditions, six exact explicit parametric representations of the traveling wave solutions for simplified model of GP equation in the 1D-Tonks-Girardeau gas are given.

**Keywords:** dynamical systems method, solitary wave solution, periodic wave solution, kink wave solution

**PACS:** 02.30.Jr

**DOI:** 10.7498/aps.62.100202

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China (Grant No. LY12E05005), and the General Project of Science and Technology Department of Zhejiang Province, China (Grant No. 2012C21084).

† Corresponding author. E-mail: xuyuanfen93@126.com