有限空间中 Dirac 场的正则量子化*

王青[1)] 隆正文[2)†] 罗翠柏[2)]

1) (新疆大学物理科学与技术学院, 乌鲁木齐 830046)

2) (贵州大学物理系, 贵阳 550025)

(2012年11月27日收到; 2012年12月24日收到修改稿)

研究当存在边界的情形下 Dirac 场的正则量子化问题. 采用文献 [1] 的观点, 将边界条件当作 Dirac 初级约束. 与已有研究不同的是, 本文从离散的角度研究此问题. 将 Dirac 场的拉氏量和内在约束进行离散化, 并且将离散的边界条件当作初级 Dirac 约束. 因此, 从约束的起源来看, 这个模型中存在两种不同的约束: 一种是由于模型的奇异性而带来的约束, 即内在约束; 另一种是边界条件. 在对此模型进行正则量子化过程中提出一种能够平等地处理内在约束和边界条件的方法. 为了证明该方法能够平等地对待这两种起源不同的约束, 在计算 Dirac 括号时分别选取了两个不同的子集合来构造 "中间 Dirac 括号", 最后得到了相同的结果.

关键词: 边界条件, Dirac 约束, Dirac 括号

PACS: 03.70.+k, 04.60.Ds **DOI:** 10.7498/aps.62.100305

1 引 言

研究有限空间中的经典场理论, 不仅要关注其经典运动方程, 而且还要仔细考虑在空间边界上的行为, 即边界条件. 通常情况下, 边界条件以场变量和它们的正则共轭动量的代数组合形式出现, 在某些特殊的情况下, 还有可能包含它们的空间导数. 如果要对有限空间中的经典场进行量子化, 则边界条件的处理显得尤为重要. 因为一般而言, 场变量与其正则共轭动量的经典 Poisson 括号 (对于由奇异拉氏量描述的模型, 则为 Dirac 括号) 在边界上会与边界条件相矛盾.

文献 [1] 对这个问题最先展开了细究. 在此文中, 作者将边界条件作为初级 Dirac 约束, 研究了有限空间中的标量场的正则量子化问题. 作者仔细研究了当存在 Dirichlet 边界条件, Neumann 边界条件和混合边界条件的情形. 他们最后得到的结果表明, 将边界条件当作初级 Dirac 约束从而得到的最终的 Dirac 括号与边界条件是相容的. 但是他们所研究的模型比较简单, 因为模型本身不存在内在的约束 (即不是由奇异拉氏量描述的模型). 然而理论上感兴趣的模型, 大多数都是由奇异拉氏量来描述的, 因而含有内在的约束.

基于文献 [1] 的研究, 文献 [2] 将这个问题的研究向前推进了一步. 他们研究的模型较之文献 [1] 更为复杂, 也更为广义一些. 在文献 [2] 中所研究的模型既含有内在约束 (即模型是由奇异拉氏量所描述), 同时又因为局限在有限空间, 又存在着边界. 作者发现, 如果将边界条件当作 Dirac 初级约束, 那么 Dirac 括号不能通过直接的计算得到. 为了能够得到最终的 Dirac 括号, 作者将计算分成两步, 第一步先计算对应于内在约束的 "中间 Dirac 括号", 然后再计算对应于边界条件的最终的 Dirac 括号. 这样做的正确性是由文献 [3] 中的一个定理保证的. 然而有趣的是, 相反的步骤, 也就是先构造对应于边界条件的 "中间 Dirac 括号", 然后再构造对应于内在约束的最终的 Dirac 括号, 却得不到正确的结果. 这表明, 文献 [2] 中提供的计算 Dirac 括号的方法, 并没有平等地对待内在约束和边界条件. 一个很自然的问题是: 如果将边界条件当作 Dirac 初级约束, 能否找到一个计算 Dirac 括号的方法, 这个方

* 国家自然科学基金 (批准号: 10865003) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: sci.zwlong@gzu.edu.cn

法可以平等地处理内在约束和边界条件?

文献 [4] 在研究当存在反对称的 B 场, 附着在 D 膜上的开弦的端点的非对易性时 [5−7], 提出了一种新的方法. 该方法避开了关于约束的讨论, 直接着眼于模型的经典解, 在经典解空间中完成正则量子化. 随后, 该方法被应用于一些场论模型中 [8−10]. 研究表明, 该方法不仅对于有限空间中不存在内在约束的模型适用, 对于含有内在约束的模型同样适用 [11].

本文从离散的角度, 研究有限空间中的经典 Dirac 场的正则量子化问题. 我们采用文献 [1] 的观点, 将边界条件作为初级 Dirac 约束. 因为 Dirac 场是由奇异拉氏量来描述, 因此在这个模型中, 从约束的起源来看, 存在两种约束: 即内在约束和边界条件. 并且, 在边界上, 这两种约束相互纠缠. 我们发现, 离散化之后直接计算 Dirac 括号的计算过程比较复杂, 因此本文借助于一个著名的定理 [3], 将计算分为两步. 为了表明本文的方案能够平等地处理这两种起源不同的约束, 我们选用不同的约束子集合, 从而得到了不同的 "中间 Dirac 括号". 从这两个不同的 "中间 Dirac 括号" 出发, 得到最终的 Dirac 括号是相同的. 本文的结构安排如下: 在第 2 节引入模型, 并指出先前研究中存在的一些缺点; 第 3 节从离散的角度研究量子化问题, 为了表明本文能够平等地处理两类起源不同的约束, 我们选用两组不同的约束子集合来构造 "中间 Dirac 括号", 并且证明所得到的最后的 Dirac 括号是相同的; 进一步的讨论和展望在第 4 节给出.

2 模型和已有的研究

本文的模型是有限空间中无质量的 Dirac 场, 并且为了简单起见只研究 $1+1$ 维的情形, 因为高维和包含质量的情形都是可以直接从这个模型中推广得到. 为方便计, 假定空间变量的取值范围是 $x\in[0,\pi]$. 模型的作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}tL =\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-\bar{\psi}\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}\psi\right), \quad (1)$$

这里, $\psi(x,t)$ 是两分量的旋量, γ^{μ} 是两维的 Dirac 矩阵, 满足代数关系:

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2g^{\mu\nu},\quad g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,+1),\quad \mu,\nu=0,1. \quad (2)$$

场变量 $\psi(x,t)$ 和 $\bar{\psi}(x,t)\left(=\psi^{\dagger}(x,t)\gamma^0\right)$ 的正则共轭动量由下式定义:

$$\Pi(x,t)=\frac{\delta S}{\delta\dot{\psi}}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0(x,t),\quad \bar{\Pi}(x,t)=\frac{\delta S}{\delta\dot{\bar{\psi}}}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\gamma^0\psi(x,t), \quad (3)$$

其中 "." 是对时间求导数. 场变量与其正则共轭动量之间满足基本的反对易关系式 [12]:

$$\left\{\psi(x,t),\Pi(x',t)\right\}_+=-\delta(x-x'),\quad \left\{\bar{\psi}(x,t),\bar{\Pi}\left(x',t\right)\right\}_+=-\delta(x-x'). \quad (4)$$

同时, 因为模型 (1) 是一阶的, 与作用量相对应的正则哈密度量可以直接读出 [13], 为

$$H_{\mathrm{C}}=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\bar{\psi}\gamma^1\partial_x\psi+\mathrm{H.c.}, \quad (5)$$

这里, H.c. 是厄米共轭的简写.

显然, (3) 式是关于场变量和正则共轭动量之间的代数关系式, 用 Dirac 的语言来说, 是初级约束 [14]. 因此, 我们得到了两个初级约束, 记为

$$\varphi_1=\Pi(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\psi}(x,t)\gamma^0\approx 0,\quad \varphi_2=\bar{\Pi}(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{i}\gamma^0\psi(x,t)\approx 0. \quad (6)$$

场变量及其正则共轭动量之间的 Dirac 括号, 可以采用 Dirac 理论计算来计算, 也可以根据 Faddeev-Jackiw 理论得到 [13]. 结果为

$$\begin{aligned}\left\{\psi(x,t),\bar{\psi}(x',t)\right\}_{\mathrm{IDB}}&=-\mathrm{i}\gamma^0\delta(x-x'),\\ \left\{\psi(x,t),\Pi(x',t)\right\}_{\mathrm{IDB}}&=-\frac{1}{2}\delta(x-x'),\\ \left\{\bar{\psi}(x,t),\bar{\Pi}\left(x',t\right)\right\}_{\mathrm{IDB}}&=-\frac{1}{2}\delta(x-x'),\end{aligned} \quad (7)$$

在这里, 我们采用文献 [2] 的标记方法, 将括号下方标记为 IDB 而不是 DB, 这样标记的原因以后会解释.

对作用量 (1) 式变分, 得到:

$$\begin{aligned}\delta S=&\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\delta\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi+\mathrm{H.c.}\\ &+\frac{1}{2}\mathrm{i}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\left[\bar{\psi}\gamma^0\delta\psi+\mathrm{H.c.}\right]_{t_1}^{t_2}\\ &+\frac{1}{2}\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\bar{\psi}\gamma^1\delta\psi+\mathrm{H.c.}\right]_0^{\pi}.\end{aligned} \quad (8)$$

作用量的变分为零要求以上三项同时为零. 第一项为零给出了经典 Dirac 方程及其共轭方程:

$$\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi=0,\quad \mathrm{i}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}=0, \quad (9)$$

第二项为零则给出了初始条件, 第三项为零给出边界条件

$$\psi(x,t)_{x=0,\pi}=0,\quad \bar{\psi}(x,t)_{x=0,\pi}=0. \tag{10}$$

采用文献 [1] 的观点, 将边界条件当作初级 Dirac 约束, 并且应用 Dirac δ- 函数的性质, 将边界条件扩展到边界的领域上, 记为

$$\begin{aligned}\varphi_3&=\int_0^\pi \mathrm{d}x\,\delta(x-B)\,\psi(x,t)\approx 0,\\ \varphi_4&=\int_0^\pi \mathrm{d}x\,\delta(x-B)\,\bar{\psi}(x,t)\approx 0,\end{aligned} \tag{11}$$

这里, $B=0,\pi$ 代表边界. 根据 Dirac 理论, 系统的演化, 由总哈密顿量 $H_{\mathrm{T}}=H_{\mathrm{C}}+\int \mathrm{d}x\lambda_i\varphi_i$ 来决定. 我们应该进一步检验是否还存在次级约束. 可以直接验证, 模型 (1) 除了初级约束 $\varphi_i\approx 0$ $(i=1,2,3,4)$ 之外, 不存在次级约束, 而且 $\varphi_i\approx 0$ $(i=1,2,3,4)$ 是第二类的.

为了实现正则量子化, 必须计算正则变量之间的 Dirac 括号. 但是, 对于此模型, 直接计算 Dirac 括号是很困难的, 原因在于约束 $\varphi_i\approx 0$ $(i=1,2,3,4)$ 之间的 Poisson 括号构成矩阵为

$$\{\varphi_i,\varphi_j\}=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\gamma^0\delta(x-x') & -\delta(x-B) & 0\\ -\mathrm{i}\gamma^0\delta(x-x') & 0 & 0 & -\delta(x-B)\\ -\delta(x-B) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\delta(x-B) & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

这个矩阵的逆矩阵, 即 $\{\psi_i,\psi_j\}^{-1}$ 很难直接算出. 因此, 直接计算 Dirac 括号是很困难的. 鉴于此, 文献 [2] 提出了一个计算方法, 该方法建议将计算 Dirac 括号的步骤分为两步: 第一步, 先计算内在约束 $\varphi_1\approx 0$, $\varphi_2\approx 0$ 所对应的 “中间 Dirac 括号”, 然后再计算最终的 Dirac 括号. 作者证明, 这样计算得到的结果与边界条件自洽. 但是很有意思的是, 相反的步骤, 即先计算边界条件 $\varphi_3\approx 0$, $\varphi_4\approx 0$ 所对应的 “中间 Dirac 括号”, 然后再计算最终的 Dirac 括号, 却行不通. 这表明, 虽然将边界条件当作了 Dirac 初级约束, 但是这个方法却没有平等地处理这两类起源不同的约束. 下节将从离散的角度研究这个模型, 平等地处理这两类约束, 并且给出与边界条件相容的结果.

3 离散化

将模型 (1) 的空间变量 x 进行等步长离散化, 步长记为 $\varepsilon=\pi/N$. 每个空间点上的场变量则为 $\psi_i,\bar{\psi}_i,(i=0,1,\cdots,N)$. 当 $\varepsilon\to 0$ 或者 $N\to\infty$ 时, 就会得到连续的理论. 将作用量 (1) 式离散化, 得到:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}tL, \tag{13}$$

其中, L 是离散的拉氏量, 为

$$\begin{aligned}L=&\sum_{i=0}^{N}\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon\left(\bar{\psi}_i\gamma^0\dot{\psi}_i-\dot{\bar{\psi}}_i\gamma^0\psi_i\right)\\ &+\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\bar{\psi}_i\gamma^1(\psi_i-\psi_{i-1})-(\bar{\psi}_i-\bar{\psi}_{i-1})\gamma^1\psi_i\right].\end{aligned} \tag{14}$$

对每一场变量 $(\psi_i,\bar{\psi}_i\,(i=0,1,\cdots,N))$ 引入相应的正则共轭变量 $(\Pi_i,\bar{\Pi}_i)$,

$$\begin{aligned}\Pi_i&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_i}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon\bar{\psi}_i\gamma^0,\\ \bar{\Pi}_i&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar{\psi}}_i}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon\gamma^0\psi_i.\end{aligned} \tag{15}$$

离散的正则变量之间反对易关系为

$$\begin{aligned}\{\psi_i,\Pi_j\}_+&=-\delta_{ij},\\ \{\bar{\psi}_i,\bar{\Pi}_j\}_+&=-\delta_{ij}.\end{aligned} \tag{16}$$

显然, 正则动量的定义 (15) 式给出了正则变量之间的关系. 因此, 此模型具有初级约束. 记为

$$\varphi_i=\Pi_i+\frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon\bar{\psi}_i\gamma^0\approx 0,$$

$$\bar{\varphi}_i=\bar{\Pi}_i+\frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon\gamma^0\psi_i\approx 0\quad i=0,1,\cdots,N. \tag{17}$$

统一将以上约束记为 $\boldsymbol{\Phi}_I=(\varphi_i,\bar{\varphi}_i)$, $I=0,1,\cdots,2(N+1)$. 根据 Dirac 理论, 体系的演化由总哈密顿量 $H_{\mathrm{T}}=H_{\mathrm{C}}+\lambda_I\boldsymbol{\Phi}_I$, $I=0,1,\cdots,2(N+1)$ (其中 λ_I 为拉氏乘子) 决定. 应该进一步由约束的自洽性条件 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}_I=\{\boldsymbol{\Phi}_I,H_{\mathrm{T}}\}_+$ 来检验是否还会存在次级约束. 直接可以验证不存在次级约束, 并且所有的约束 (17) 都是第二类的.

因为约束条件 (17) 的存在, 离散的正则变量之间的反对易关系 (16) 式需要由 Dirac 括号来代替. 约束 $\boldsymbol{\Phi}_I=(\varphi_i,\bar{\varphi}_i)$, $I=0,1,\cdots,2(N+1)$ 之间的反对易括号构成的矩阵及其逆矩阵分别为

$$\{\boldsymbol{\Phi}_I,\boldsymbol{\Phi}_J\}_+=-\mathrm{i}\varepsilon\gamma^0\otimes\left(\underbrace{\sigma_1\oplus\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_1}_{N+1}\right),\quad(18)$$

和

$$\{\boldsymbol{\Phi}_I,\boldsymbol{\Phi}_J\}_+^{-1}=-\mathrm{i}\frac{1}{\varepsilon}\gamma^0\otimes\left(\underbrace{\sigma_1\oplus\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_1}_{N+1}\right).\quad(19)$$

这里, $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Dirac 括号的定义为

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}_{\mathrm{IDB}}\\&=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}_+-\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{\Phi}_I\}_+\{\boldsymbol{\Phi}_I,\boldsymbol{\Phi}_J\}_+^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}_J,\boldsymbol{B}\}_+.\end{aligned}\quad(20)$$

经过直接计算得到

$$\{\psi_i,\bar{\psi}_j\}_{\mathrm{IDE}}=-\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\gamma^0\delta_{ij}\quad i=0,1,\cdots,N.\quad(21)$$

ψ_i, $\bar{\psi}_i$ 与其正则共轭动量 Π_i, $\bar{\Pi}_i$ 的对易关系可将 (17) 式带入上式得到. 事实上, 以上的 Dirac 括号正是 (7) 式的离散形式.

以上的结论对应于没有边界时的情况. 但是, 由于存在边界, 必须考虑 Dirac 括号 (21) 式是否能与边界条件相容. 边界条件 (10) 式的离散形式为

$$\psi_0=0,\ \bar{\psi}_0=0,\ \psi_N=0,\ \bar{\psi}_N=0.\quad(22)$$

容易看出, Dirac 括号 (21) 式与边界条件 (22) 式不相容, 例如, 将 (21) 式中的 i,j 同时取为 0 或者 N 时, 会直接导致矛盾. 因此, Dirac 括号需要进一步修改, 使得新的 Dirac 括号能够与边界条件相容.

我们采用文献 [1] 的观点, 将离散的边界条件 (22) 式当作 Dirac 初级约束, 标记为

$$\begin{aligned}&\Theta_1=\psi_0\approx0,\quad\Theta_2=\bar{\psi}_0\approx0,\\&\Theta_3=\psi_N\approx0,\quad\Theta_4=\bar{\psi}_N\approx0.\end{aligned}\quad(23)$$

因此, 一共有 $2(N+3)$ 个初级约束. 我们将这些初级约束统一标记为 $\Xi_\alpha=(\boldsymbol{\Phi}_I,\boldsymbol{\Theta}_i)$, $\alpha=1,2,\cdots,2(N+3)$. 我们必须验证, 这些初级约束是否还会导致次级约束. 这可由初级约束 Ξ_α 的自洽性条件 $\dot{\Xi}_\alpha=\{\Xi_\alpha,H_{\mathrm{T}}\}$ 得到, 其中, $H_{\mathrm{T}}=H_{\mathrm{C}}+\lambda_\alpha\Xi_\alpha$, $\alpha=1,2,\cdots,2(N+3)$ 为总哈密顿量, λ_α 是拉氏乘子. 可以直接验证, 初级约束的自洽性条件只能确定总哈密顿量中的拉氏乘子, 不给出任何次级约束. 因此约束集合 $\{\Xi_\alpha\}$ 穷尽了所有的约束. 并且还可以进一步验证, 所有的约束 Ξ_α 都是第二类的, 因此, 这些约束条件可以作为 “强等”[14].

为了计算 Dirac 括号, 必须计算由约束 Ξ_α 的泊松括号构成的 $2(N+3)\times2(N+3)$ 维矩阵 $\{\Xi_\alpha,\Xi_\beta\}$ 及其逆矩阵 $\{\Xi_\alpha,\Xi_\beta\}^{-1}$. 直接计算的运算量会较大, 而且也不易显示出内在约束和边界条件能够被同等地对待. 因此, 我们将总的约束 $\{\Xi_\alpha\approx0\}$ 分为两个子集合 $\{\boldsymbol{\Phi}_I\approx0\}$ 和 $\{\boldsymbol{\Theta}_i\approx0\}$, 计算分为两步进行. 先计算对应于内在约束 $\{\boldsymbol{\Phi}_I\approx0\}$ 的 “中间 Dirac 括号”, 然后再计算最后的 Dirac 括号. 这样做的方便之处在于由约束子集合 $\{\boldsymbol{\Phi}_I\}$ 的泊松括号构成的矩阵及其子矩阵已经得到, 即 (18) 和 (19) 式, 这对我们的计算带来了很大的便利, 这也正是我们标记 (16) 式为 IDB 而不是 DB 的原因.

约束子集合 $\{\boldsymbol{\Theta}_i\approx0\}$ 之间的 “中间”Dirac 括号构成的矩阵及其逆矩阵为

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{\Theta}_i,\boldsymbol{\Theta}_j\}_{\mathrm{IDB}}=-\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\gamma^0\otimes(\sigma_1\oplus\sigma_1),\\&\{\boldsymbol{\Theta}_i,\boldsymbol{\Theta}_j\}_{\mathrm{IDB}}^{-1}=-\mathrm{i}\varepsilon\gamma^0\otimes(\sigma_1\oplus\sigma_1),\end{aligned}\quad(24)$$

最后的 Dirac 括号由定义式

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}_{\mathrm{D}}\\&=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}_{\mathrm{IDB}}-\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{\Theta}_i\}_{\mathrm{IDB}}\{\boldsymbol{\Theta}_i,\boldsymbol{\Theta}_j\}_{\mathrm{IDB}}^{-1}\{\boldsymbol{\Theta}_j,\boldsymbol{B}\}_{\mathrm{IDB}}\end{aligned}\quad(25)$$

计算得到. 非零的 Dirac 括号为

$$\begin{aligned}&\{\psi_0,\bar{\psi}_0\}_{\mathrm{D}}=0,\quad\{\psi_N,\bar{\psi}_N\}_{\mathrm{D}}=0,\\&\{\psi_i,\bar{\psi}_j\}_{\mathrm{D}}=-\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\gamma^0\delta_{ij}\quad i,j=1,2,\cdots,N-1.\end{aligned}\quad(26)$$

其余的可以通过将 (17) 式带入上式得到. 可以很明显地看出, 相对于没有边界时的 Dirac 括号 (21) 式, 考虑了边界之后的 Dirac 括号仅仅在边界上有所修正, 而这些修正与离散的边界条件 (22) 式相容.

为了显示我们所采取的离散化的方案能够平等地对待内在约束和边界条件, 我们重新选取约束集合 $\{\Xi_\alpha\}$ 的子集合, 计算由这个子集合中的约束构成的 “中间 Dirac 括号” (此子集合中包含边界条件 (23)), 然后再计算最后的 Dirac 括号. 为此, 选择子集合 $\boldsymbol{\Gamma_I}=(\varphi_0,\bar{\varphi}_0,\Theta_1,\Theta_2,\varphi_N,\bar{\varphi}_N,\Theta_3,\Theta_4)$ 来构造 “中间 Dirac 括号” 子集合 $\boldsymbol{\Gamma_I}$, $\boldsymbol{I}=1,2,\cdots,8$ 的基本反对易括号构成的矩阵及其逆矩阵分别为

$$\{\boldsymbol{\Gamma}_I,\boldsymbol{\Gamma}_J\}_+=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_{2\times2}\quad(27)$$

和

$$\{\boldsymbol{\Gamma}_I, \boldsymbol{\Gamma}_J\}_+^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_{2\times 2}, \tag{28}$$

这里, $\boldsymbol{A}$ 和它的逆矩阵的显式分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\varepsilon\gamma^0 & -\boldsymbol{I}_{2\times 2} & 0 \\ -\mathrm{i}\varepsilon\gamma^0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{I}_{2\times 2} \\ -\boldsymbol{I}_{2\times 2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{I}_{2\times 2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

和

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\boldsymbol{I}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{2\times 2} \\ -\boldsymbol{I}_{2\times 2} & 0 & 0 & \mathrm{i}\varepsilon\gamma^0 \\ 0 & -\boldsymbol{I}_{2\times 2} & \mathrm{i}\varepsilon\gamma^0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

正则变量之间的 “中间 Dirac 括号” 可直接计算得到, 非零的 “中间 Dirac 括号” 为

$$\{\psi_i, \Pi_j\}_{\mathrm{IDB}} = -\delta_{ij},\ \{\bar{\psi}_i, \bar{\Pi}_j\}_{\mathrm{IDB}} = -\delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{31}$$

剩余的约束 (记为 $\boldsymbol{\Omega}_i \approx 0$) 之间的 “中间 Dirac 括号” 构成的矩阵及其逆矩阵分别为

$$\{\boldsymbol{\Omega}_i, \boldsymbol{\Omega}_j\}_{\mathrm{IDB}} = -\mathrm{i}\varepsilon\gamma^0 \otimes \Big(\underbrace{\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_1}_{N-1}\Big), \tag{32}$$

和

$$\{\boldsymbol{\Omega}_i, \boldsymbol{\Omega}_j\}_{\mathrm{IDB}}^{-1} = -\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\gamma^0 \otimes \Big(\underbrace{\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_1}_{N-1}\Big). \tag{33}$$

基于以上的 “中间 Dirac 括号”, 可以计算最终的 Dirac 括号, 结果正是 (26) 式. 这一方面说明, 最终的结果与选取用于构造 “中间 Dirac 括号” 的子集合无关; 另一方面, 也说明了在我们的方法中, 平等地处理了内在约束和边界条件.

基于最后所得到的 Dirac 括号, 量子化的过程是直接的. 我们只需做如下的代换即可完成:

$$\psi_i \to \hat{\psi}_i, \quad \Pi_i \to \hat{\Pi}, \quad \{\ ,\ \}_{\mathrm{D}} \to \frac{1}{\mathrm{i}}[\ ,\ ]. \tag{34}$$

4 结语和展望

本文以 $1+1$ 维的 Dirac 场为模型, 研究了有限空间中的经典场的正则量子化问题. 因为经典的 Dirac 场是由奇异拉氏量描述的, 因此, 模型本身具有内在的约束. 同时, 因为被局限在有限空间, 所以还存在边界条件. 已有此方面的研究工作大多集中在模型本身不含有内在约束, 或者即使含有内在约束, 但是在处理过程中不能平等地处理这两种起源不同的约束. 我们在此提出了一种平等地处理这两种约束的方法, 即构造对应于不同的约束子集合的 “中间 Dirac 括号”, 然后得到了最终的 Dirac 括号. 首先, 我们选取所有的内在约束作为构造 “中间 Dirac 括号” 的子集合, 然后计算出了最终的 Dirac 括号; 然后, 选取包含边界条件的一个约束子集合, 计算 “中间 Dirac 括号”, 然后得到最终的 Dirac 括号. 结果表明, 这两种方案得到的结果相同. 因此, 正则量子化可以顺利地实现.

在我们的模型中, 内在约束是第二类的. 一个很自然的问题是: 如何对处于有限空间中的含有规范自由度的模型 (比如, 有限空间中的电磁场) 进行正则量子化. 这类模型的特殊之处在于, 由于存在规范自由度, 内在约束是第一类的, 但是内在约束在边界上往往会和边界条件纠缠在一起, 在边界上变成第二类的. 也就是说, 内在约束在有限空间的内部是第一类的, 但是在边界上却变成了第二类的. 这种情形下该如何处理边界条件, 如何进行正则量子化, 都是值得研究的问题.

[1] Sheikh-Jabbari M M, Shirzad A 2001 *Eur. Phys. J.* C **19** 383
[2] Jing J 2005 *Phys. Rev.* D **71** 025023
[3] Gitman D M, Tyutin I V 1990 *Quantization of Fields with Constraints* (1st Ed.) (New York: Springer) p276
[4] Jing J, Long Z W 2005 *Phys. Rev.* D **72** 126002
[5] Chu C S, Ho P M 1999 *Nucl. Phys.* B **550** 151
[6] Chu C S, Ho P M 2000 *Nucl. Phys.* B **568** 447
[7] Ardalan F, Arfaei H, Sheikh-Jabbari M M 2000 *Nucl. Phys.* B **576** 578
[8] Long Z W, Chen L 2007 *High Energy Phys. and Nucl. Phys.* **31** 14 (in Chinese) [隆正文, 陈琳 2007 高能物理与核物理 **31** 14]
[9] Long Z W, Liu B, Li Z P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2094 (in Chinese) [隆正文, 刘波, 李子平 2004 物理学报 **53** 2094]
[10] Long Z W, Liu B, Li Z P 2003 *High Energy Phys. and Nucl. Phys.* **27** 866 (in Chinese) [隆正文, 刘波, 李子平 2003 高能物理与核物理 **27** 866]
[11] Jing J 2006 *Phys. Rev.* D **73** 086001

[12] Henneaux M, Teitelboim C 1992 *Quantization of Gauge Systems* (1st Ed.) (Princeton: Princeton University Press) p134

[13] Faddeev L D, Jackiw R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1692

[14] Dirac P A M 1964 *Lecture Notes on Quantum Mechanics* (1st Ed.) (New York: Yeshiva University) p8

Canonical quantization of dirac field in a finite volume*

Wang Qing[1)] Long Zheng-Wen[2)†] Luo Cui-Bai[2)]

1) (*School of Physics Science and Technology, Xinjiang University, Xinjiang* 830046, *China*)

2) (*Department of Physics, Guizhou University, Guiyang* 550025, *China*)

(Received 27 November 2012; revised manuscript received 24 December 2012)

Abstract

The canonical quantization of Dirac field in a finite volume is studied. Following the idea of taking the boundary conditions as primary Dirac constraints, we propose a method to treat both the intrinsic constraints and boundary conditions equally. We shall work in the discrete version and quantize the model canonically. In order to verify our method to treat the intrinsic constraints and boundary conditions on the same footing, we obtain the same results by choosing two different subsets of constraints to construct the intermediate Dirac brackets.

Keywords: boundary conditions, Dirac constraints, Dirac brackets

PACS: 03.70.+k, 04.60.Ds **DOI:** 10.7498/aps.62.100305

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10865003).

† Corresponding author. E-mail: sci.zwlong@gzu.edu.cn