

自旋 - 轨道耦合玻色 - 爱因斯坦凝聚势垒 散射特性的研究*

李志† 王建忠

(北京理工大学物理学院, 北京 100081)

(2012年11月15日收到; 2013年1月14日收到修改稿)

对自旋 - 轨道耦合玻色 - 爱因斯坦凝聚中的双势垒散射问题进行了研究, 得到了系统透射系数的解析表达式, 并对如何克服 Klein 隧穿以及如何束缚 Dirac 粒子进行了讨论并给出囚禁 Dirac 粒子的实验方案. 此外, 运用时间劈裂谱方法对 Dirac 粒子势垒散射问题进行了数值模拟. 分析了 Dirac 粒子分别在势垒 Klein 阻塞区域中心以及边缘的透射情况. 最后从排斥和吸引相互作用两方面研究了非线性相互作用对于 Dirac 粒子演化的影响, 结果表明弱非线性相互作用对散射特性的影响非常小, 而强非线性相互作用会彻底破坏波包的动量分布, 从而改变 Dirac 粒子的势垒散射效果.

关键词: 自旋 - 轨道耦合, Klein 隧穿, 势垒散射, 玻色 - 爱因斯坦凝聚

PACS: 03.75.Lm, 03.65.Nk, 67.85.Fg

DOI: 10.7498/aps.62.100306

1 引言

在提出 Dirac 方程之后不久, Klein 就对方程进行研究并发现了著名的 Klein 佯谬^[1], 而这种相对论现象在过去几十年中由于技术上的种种原因根本无法通过实验进行直接观测. 此外, 很多微观粒子相对论效应的研究也都停留在理论层面. 然而, 就在不久前由 NIST 小组完成的自旋 - 轨道耦合 (SOC) 玻色 - 爱因斯坦凝聚 (BEC) 的工作^[2], 给这个领域带来了一个新的机遇, 为相对论量子效应的研究提供了一个理想的实验平台.

众所周知, 自旋 - 轨道耦合相互作用是原子内部的固有特性, 它是产生自旋霍尔效应^[3,4] 以及拓扑绝缘体的根源^[5-7]. 在过去几十年中, 对于 SOC 的研究一直都是物理学研究中的重要问题. 近十几年, 随着对于 BEC 研究的日渐成熟, 以及对于 BEC 与人造规范势相互作用的深入研究, 人们发现将玻色凝聚体放入非阿贝尔的人造规范势中就可以产生 SOC BEC^[8-14]. 从 SOC BEC 的哈密顿量出发, 经过本征态的投影, 可以很容易得到等价的相对论

Dirac 方程. 因此, SOC BEC 的实现, 为我们观测微观粒子相对论效应提供了一个很好的实验平台, 这很大程度上激发了人们对于超冷原子相对论效应的研究热情. 近几年, 虽然国内外关于 BEC 非线性效应的研究层出不穷. 但直到目前为止, 运用 SOC BEC 来模拟 Dirac 粒子的非线性现象的工作却很少^[15]. 本文重点研究相对论 Dirac 粒子的势垒散射问题, 以及非线性相互作用在散射过程中对波包的影响.

本文分为四个部分, 第二部分给出本文所用的理论模型; 结果和讨论在文章的第三部分给出; 在文章的第四部分对全文进行了总结.

2 模型

2.1 理论模型

从含大失谐的 Λ 型两能级超冷 BEC 系统出发^[15], 可以利用自旋轨道耦合近似地得到准自旋 1/2 的费米子系统. 考虑原子质量为 m 的 N 玻色子自旋轨道耦合 BEC, 系统的有效哈密顿量为

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011 CB921503) 和国家自然科学基金 (批准号: 11075020, 91021021) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: 4419578@qq.com

$H = \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + v_y \sigma_y p_y + v_z \sigma_z p_z + \gamma_z \sigma_z + V_I + V_B$, 其中 $v_y = \frac{\hbar \kappa_y}{m}$, $v_z = \frac{\hbar \kappa_z \Omega^2}{2m\Delta^2}$, 分别是 y 和 z 方向的有效速度, $\gamma_z = \frac{\hbar^2 \Omega^2}{4m\Delta^2} \left[\kappa_y^2 - \left(1 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2}\right) \kappa_z^2 \right] + \frac{\hbar \Omega^2}{2\Delta}$ 是超冷原子的有效静质量, V_I, V_B 分别代表囚禁势和中心势垒的势能. $\kappa_y = \kappa \cos \varphi$, $\kappa_z = \kappa \sin \varphi$, 其中 κ 为激光的波数 φ 是激光与 y 轴的夹角. Ω, Δ 为三能级 Λ 结构中能级间耦合的拉比频率, 其中 Δ 为大失谐. 从这个哈密顿量出发, 考虑系统为非常稀薄的 BEC 气体, 我们可以忽略 p_y^2 项以及 v_z 项这些高阶小量. σ_y 和 σ_z 为泡利矩阵, 经过化简可以得到如下的沿 y 轴方向一维非线性 Dirac 方程 [15]:

$$i\hbar \partial_t \Psi = H_{\text{ND}} \Psi, \quad (1)$$

其中 $H_{\text{ND}} = -i\hbar v_y \sigma_y \partial_y + \gamma_z \sigma_z + g |\Psi|^2 + V_I + V_B$, g 是非线性系数. 在实验上 v_y, γ_z, g 都是可调参数. 方程中的变量可以通过对后面的这些系统的基本参量进行重新调整使其无量纲化: $t \sim \frac{\gamma_z}{\hbar} t, y \sim \frac{\gamma_z}{\hbar v_y} t$,

$\Psi \sim \sqrt{\frac{\hbar v_y}{N \gamma_z}} \Psi$. 于是, 得到了无量纲的一维非线性 Dirac 方程:

$$i\partial_t \Psi = (-i\sigma_y \partial_y + \sigma_z + g_0 |\Psi|^2 + V_T + V_B) \Psi, \quad (2)$$

这里 $V_T = V_I/\gamma_z, V_B = V_B/\gamma_z$ 分别是无量纲后的有效势阱与势垒的高度, $g_0 = \frac{N}{\hbar v_y} g$ 是系统的有效两体相互作用系数. 首先, 不考虑非线性相互作用的情况下, 对系统双势垒散射问题进行求解. 我们令 $g_0 = 0$. 势能空间分布如下:

$$V_B(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ V_1 & 0 \leq y < d, \\ 0 & d \leq y < d+L, \\ V_2 & d+L \leq y < 2d+L, \\ 0 & y \geq 2d+L, \end{cases} \quad (3)$$

这种情况下, 在各个区域满足方程 (2) 的波函数为 [1]

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} ik \\ E-m \end{pmatrix} e^{iky} + r_1 \begin{pmatrix} -ik \\ E-m \end{pmatrix} e^{-iky} \quad y < 0,$$

$$\Psi_2 = t_2 \begin{pmatrix} ik_1 \\ V_1-E-m \end{pmatrix} e^{ik_1 y} + r_2 \begin{pmatrix} -ik_1 \\ V_1-E-m \end{pmatrix} e^{-ik_1 y}$$

$$0 \leq y < d,$$

$$\Psi_3 = t_3 \begin{pmatrix} ik \\ E-m \end{pmatrix} e^{iky} + r_3 \begin{pmatrix} -ik \\ E-m \end{pmatrix} e^{-iky}$$

$$d \leq y < d+L,$$

$$\Psi_4 = t_4 \begin{pmatrix} ik_2 \\ V_2-E-m \end{pmatrix} e^{ik_2 y} + r_4 \begin{pmatrix} -ik_2 \\ V_2-E-m \end{pmatrix} e^{-ik_2 y}$$

$$d+L \leq y < 2d+L,$$

$$\Psi_5 = t_5 \begin{pmatrix} ik \\ E-m \end{pmatrix} e^{iky} \quad y \geq 2d+L, \quad (4)$$

此处取自然单位 $\hbar = c = 1$, d 代表势垒的宽度, 为便于计算, 研究中我们令所有势垒的宽度都相同; L 代表两个势垒之间的宽度; $\mathbf{k} = \sqrt{E^2 - \gamma_z^2}$ 代表自由粒子的波矢量, $\mathbf{k}_1 = \sqrt{(V_1 - E)^2 - \gamma_z^2}$ 和 $\mathbf{k}_2 = \sqrt{(V_2 - E)^2 - \gamma_z^2}$ 分别代表在第一个势垒中和第二个势垒中的波矢量. 为了研究双势垒隧穿特性, 运用各区域的波函数 (4) 在 $x = 0, d, d+L, 2d+L$ 处的连续性条件. 经计算, 得到如下透射系数表达式:

$$T = t_5^2, \quad (5)$$

$$t_5 = -16k^2 s^2 A_1 A_2 k_1 k_2 s_1 s_2 / \left\{ 2ks(1+A_1^2)k_1 s_1 A^2 \right.$$

$$\times [s^2(A_2^2 - 1)k_2^2 - 2ks(1+A^2)k_2 s_2 + k^2(A^2 - 1)s_2^2]$$

$$+ k^2(A_1^2 - 1)s_1^2 A^2 [-(1+B^2)s^2(A_2^2 - 1)k_2^2$$

$$+ 2ks(1+A_2^2)k_2 s_2 + (B^2 - 1)k^2(A_2^2 - 1)s_2^2]$$

$$+ s^2(A_1^2 - 1)k_1^2 A^2 [(B^2 - 1)s^2(A_2^2 - 1)k_2^2$$

$$+ 2ks(1+A_2^2)k_2 s_2$$

$$\left. - (1+B^2)k^2(A_2^2 - 1)s_2^2] \right\}, \quad (6)$$

其中 $A = e^{ikd}, A_1 = e^{ik_1 d}, A_2 = e^{ik_2 d}, B = e^{ikd}, s = E - \gamma_z, s_1 = V_1 - E - \gamma_z, s_2 = V_2 - E - \gamma_z$.

3 结果及讨论

从透射系数的解析表达式 (5) 出发, 可以很容易地得到当 $V_1 = V_2$ 时, 表达式 (5) 退化到文献 [16] 中相同的双势垒散射的情况. 进一步如果让 $L = 0$, 表达式则回到我们所熟知的 Dirac 粒子单势垒散射的透射系数表达式 [1]. 为了避免两个势垒之间的共振影响 [15], 我们首先考虑两个势垒紧靠在一起 ($L = 0$) 的情况.

图 1 所示为双势垒散射的透射系数随着 BEC 初始能量的变化关系, 其中势垒高度 $V_1 = 9$, 势垒宽度 $d = 10$. 图 1(a) 给出两个势垒高度差

$\Delta V = |V_1 - V_2| \leq 2\gamma_z$ 时的情况, 显然这种情况下, 前后两个势垒的 Klein 阻塞区域得到有效的叠加, 使得 Dirac 粒子不可穿透区域得到扩大. 如图 1(b) 所示, 我们将第二个势垒高度抬高一个很小的值, 这样就在两个势垒 Klein 阻塞区域中间露出一条可以通过的能量缝隙, 当入射能量满足这个特定值时粒子就可以透过势垒. 利用上述特性可以在实验上设计此类装置进行单能粒子的筛选. 同样利用 Klein 阻塞区域的这种叠加特性, 若让势垒高度差

$\Delta V \leq 2\gamma_z$ 的多个势垒依次放置在散射路径上并且令势垒高度最低的势垒 $V_1 \leq 2\gamma_z$, 这样各个势垒的 Klein 阻塞区就可以形成有效的弥补, 从而使能量在 $\gamma_z < E \leq V_{\max} + \gamma_z$ 范围内的所有 Dirac 粒子最终全部反射. 在空间特定区域左右各设置一个这样的势垒, 就可以把 Dirac 粒子囚禁在空间特定的区域.

利用时间劈裂谱方法^[17]数值模拟得到的 Dirac 粒子波函数随时间的演化情况, 如图 2 所示.

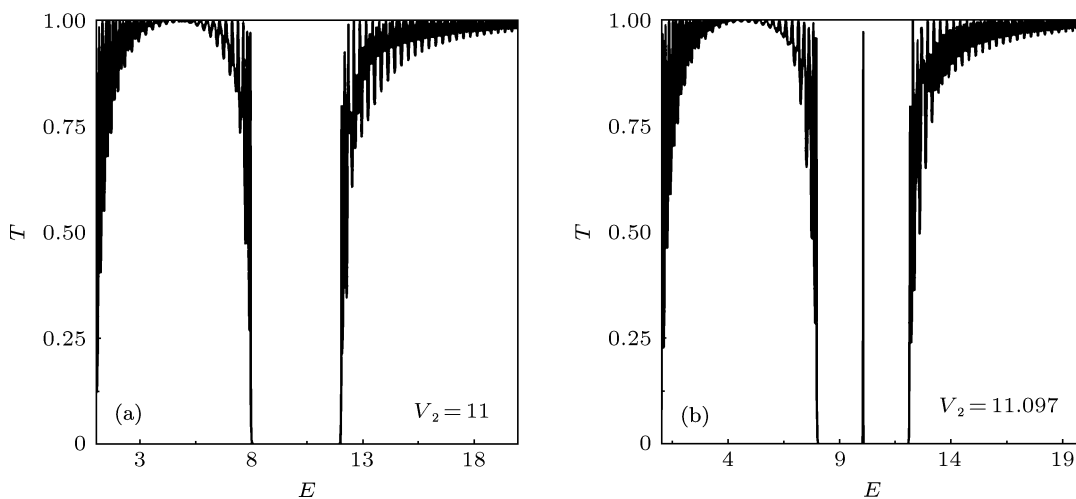


图 1 双势垒高度差等于和不等 $2\gamma_z$ 时的粒子透射系数

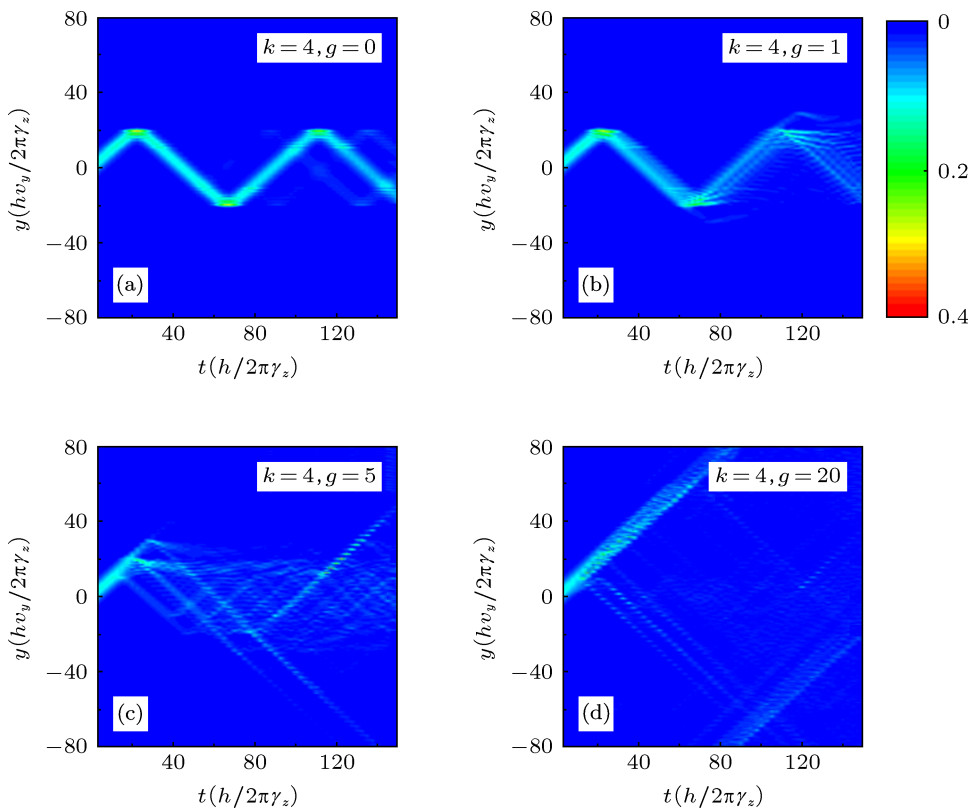


图 2 k 取在单个势垒 Klein 阻塞区域中心时, 波包随时间的演化

图 2 中在 $-60 < y \leq -10$ 和 $10 < y \leq 60$ 处放置 5 个依次紧靠的势垒. 每个向外侧的势垒都比内侧的势垒高 $\Delta V = 2$, 最靠近中心的势垒 $V_1 = 2$. 如图 2(a) 所示, 当不考虑粒子相互作用时, Dirac 粒子基本上被很好地束缚在 $-20 < y \leq 20$ (此处, 势垒 $V = 4$ 起主要作用) 的空间区域. 随着非线性的增强, 一部分粒子摆脱束缚跑到势垒范围之外, 如图 2(b) 和 (c) 所示. 当非线性很大时, 如图 2(d) 所示, 绝大多数粒子可以穿过势垒到达囚禁区域之外.

图 3 所示为当把粒子初始波数 k 取在前后两个势垒 Klein 阻塞区域交界处的情况. 在这种情况下, 在 $y = 20$ 处发生了部分透射. 一部分粒子在 $V = 4$ 势垒处反射, 而另一部分粒子可以透过这个势垒而进入该势垒所在的空间区域, 而当它们碰到下一个势垒 ($V = 6$) 时被反射回来, 当反射回来的这部分粒子再次遇到 $V = 4$ 的势垒后, 又发生部分透射. 如图 3 所示, 这样就在空间区域 $-20 < y \leq 20$ 之间形

成了明暗相间的干涉条纹, 并有一部分粒子被囚禁在 $-30 < y \leq -20$ 和 $20 < y \leq 30$ 这两块区域 (如图 3(a) 和 (b) 所示). 随着非线性系数 g 的增强, 粒子渐渐克服势阱壁的阻挡, 跑到束缚势阱之外, 此时干涉条纹也随之消失. 对比图 2 和图 3, 发现当原子间相互作用非常大的时候, 这种相互作用对系统影响开始起到主导作用, 使得大部分粒子能够透过势阱壁.

下面讨论当 $g < 0$ 的情况. 如图 4 所示, 吸引相互作用很小时 (如图 4(b)), 波包随着时间的演化逐渐由原先单个波包变为三个波包. 这种非线性相互作用与 Dirac 粒子散射现象叠加在一起形成了非常复杂的演化图样. 为了更好地研究非线性相互作用对于波包演化的影响, 我们直接令初始波包有效速度为零并撤掉势阱, 使其得以在空间内没有障碍地演化. 图 5 和图 6 分别是考虑排斥和吸引相互作用下的演化情况.

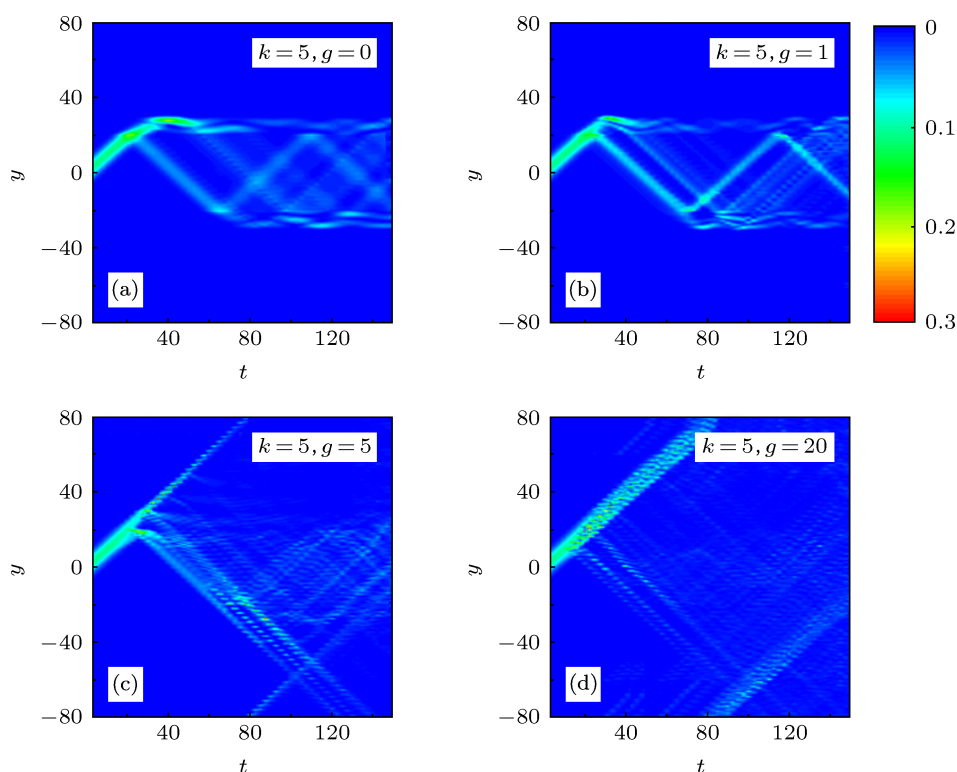


图 3 k 在 Klein 阻塞区域交界处时波包随时间的演化

图 5(a) 为 Dirac 粒子自由膨胀的情况, 图 5(b)—(d) 为考虑原子间相互作用的情况. 如图 5 所示, 当排斥相互作用不大时, 波包会缓慢地膨胀. 而当排斥相互作用非常大时, BEC 分裂为三个主要部分, 其中两部分以大小相等方向相反的速度向外飞行, 另一部分在质心附近缓慢扩展. 其

物理解为: 靠近中心的粒子受到来自大小基本相同而方向恰好相反的排斥力, 因此这种排斥力的大小对中心部分影响不大. 但是, 边缘上的粒子会受到非常大的排斥相互作用, 因此会脱离原先波包范围向外飞出去. 由于我们在 BEC 中考虑的相互作用为短程相互作用, 因此飞出去后的粒

子不再受中心 BEC 的控制, 因此呈现匀速的高密度的向两侧飞行的两束粒子. 显然, 非线性相互作用会破坏初始波函数的动量分布, 使得初始动量

为 0 的波函数变为具有 $\pm k$ 的两个组分. 这就是在考虑相互作用时, 原先囚禁 Dirac 粒子的势阱无法再束缚粒子的原因.

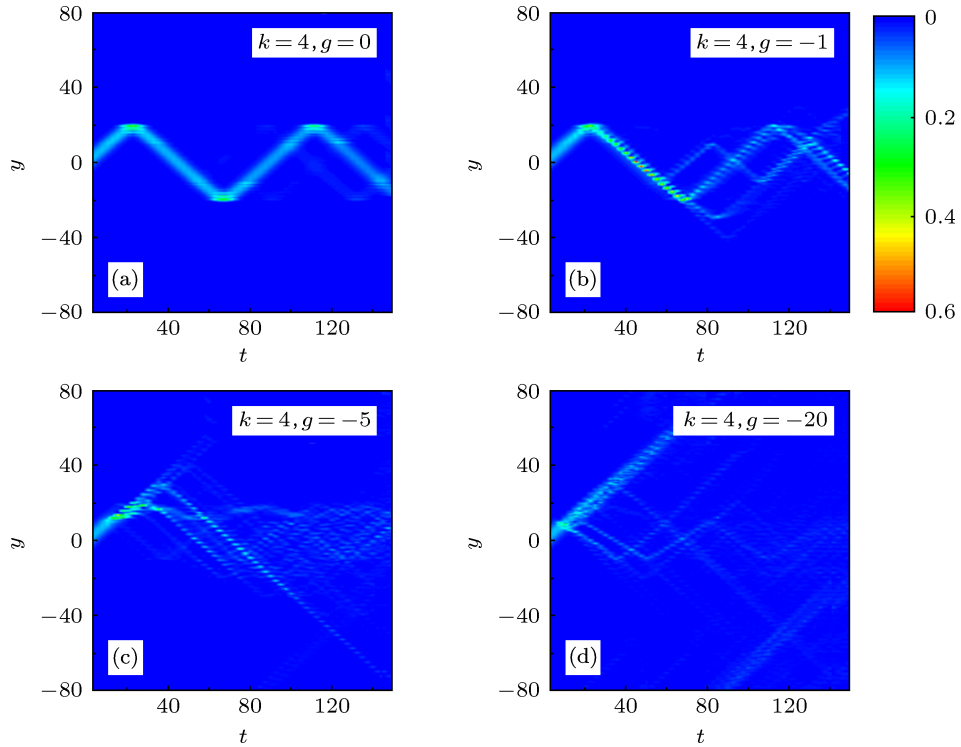


图 4 吸引相互作用下 Dirac 粒子波包随时间的演化

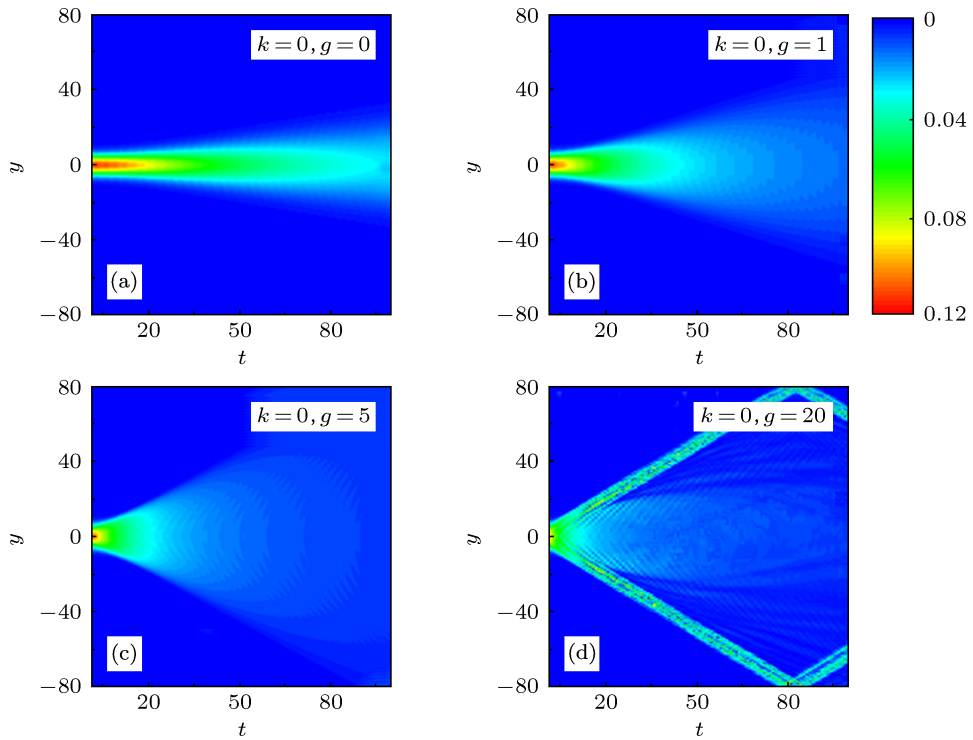


图 5 初速度为零情况下排斥相互作用对波包演化的影响

图 6 为吸引相互作用下的情况. 如图 6(b) 所示, 当相互作用很小时, 波包会呈现呼吸子状态, 这是由于吸引相互作用会首先将粒子拉向质心, 当粒子被挤压到一个很小的区域后, 粒子间出现强烈的排斥相互作用, 这使得波包向外膨胀恢复到原状. 随着相互作用的增强, 波包变得更加紧密, 这就会导致部分粒子受到的排斥力会超过粒子的吸引相

互作用, 从而脱离原先波包范围向外飞出, 而剩下的中心区域粒子依然保持呼吸子态演化, 如图 6(c) 所示. 随着吸引相互作用的继续增大, 波包的中心部分粒子越来越少并最终消失, 而两侧具有动量的粒子数不断增多, 如图 6(d) 所示. 从图 6 中很显然可以看到, 非线性相互作用越大, 两侧波包的初速度就越大.

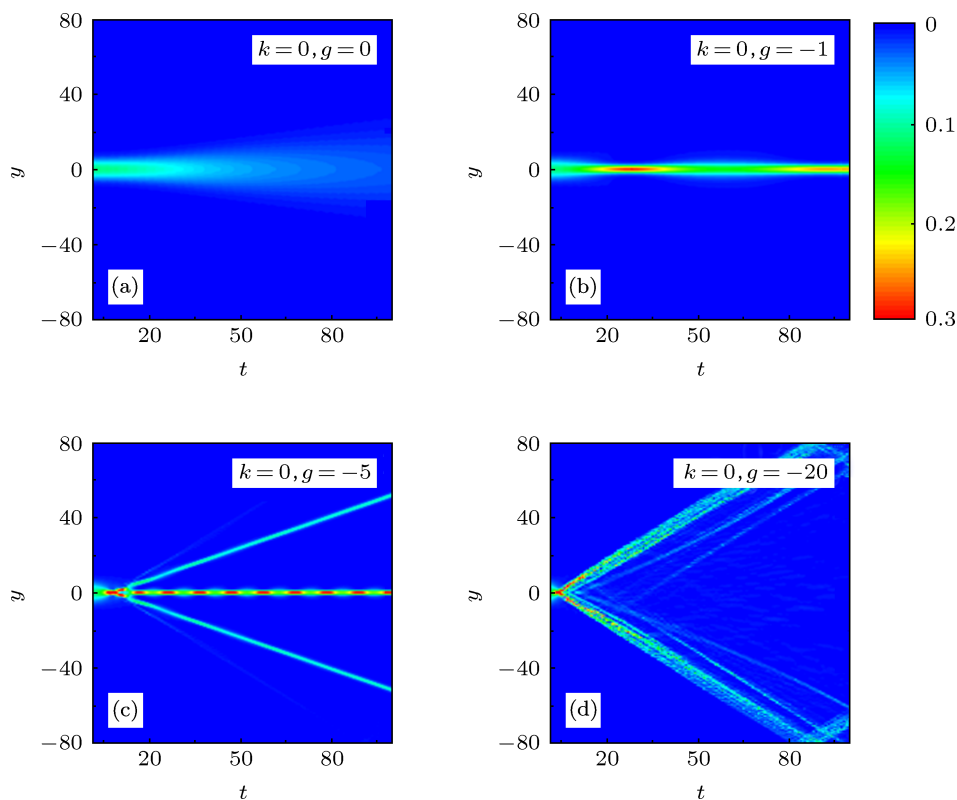


图 6 初速度为零情况下吸引相互作用对波包演化的影响

4 结论

本文在 Dirac 粒子势垒散射的研究中, 发现 Klein 阻塞区域的中心与边缘对于 Dirac 粒子的散射现象有着很大的不同. 当入射能量在势垒 Klein 阻塞边缘时会发生部分透射, 最终导致产生干涉条纹. 而当能量在 Klein 阻塞中心时, 基本可以达到全反射的效果. 这说明理论上的 Klein 阻塞区域并不能完全阻挡 Dirac 粒子, 而真正能使 Dirac 粒子全反射的区域应当比理论给出的区域小. 当囚禁 Dirac 粒子时应当选取势垒高度差小于两倍有效质量的

势垒, 从而尽量减少 Klein 阻塞边缘处的这种影响. 除此之外, 本文分别从排斥和吸引的角度, 研究了非线性相互作用对于散射过程的影响. 当非线性相互作用增大时, 会使原先可以囚禁住的粒子部分透射出囚禁区域. 当非线性很大时, 粒子基本全部透射. 最后, 我们令波包初始速度为 0, 研究非线性项对于波包演化过程的影响. 发现两种非线性相互作用都会导致波包分裂, 得到碎裂的 BEC. 而中心部分 BEC 在排斥和吸引相互作用下分别表现为扩展和呼吸子状态.

- [1] Dombey N, Calogeracos A 1999 *Phys. Rep.* **315** 41
 [2] Lin Y J, Jimenez-Garcia K, Spielman I B 2010 *Nature* **471** 83
 [3] Kato Y K, Myers R C, Gossard A C, Awschalom D D 2004 *Science* **306** 1910
 [4] Koning M, Wiedmann S, Bruene C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
 [5] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
 [6] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
 [7] Hsieh D, Qian D, Xia Y, Hor Y S, Cava R J, Hasan M Z 2008 *Nature* **452** 970
 [8] Ruseckas J, Juzeliunas G, Ohberg P, Fleischhauer M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010404
 [9] Osterloh K, Baig M, Santos L, Zoller P, Lewenstein M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010403
 [10] Satija I I, Dakin D C, Clark C W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 216401
 [11] Zhu S L, Fu H, Wu C J, Zhang S C, Duan L M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 240401
 [12] Liu X J, Liu X, Kwek C C 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 026602
 [13] Stanescu T D, Zhang C, Galitski V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 110403
 [14] Juzeliunas G, Ruseckas J, Dalibard J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 053403
 [15] Zhang D W, Xue Z Y, Yan H, Wang Z D, Zhu S L 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013628
 [16] Li Z, Wang J Z, Fu L B 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 010301
 [17] Cheng Y S, Adhikari S K 2010 *Phys. Rev. A* **81** 023620

Barrier scattering properties in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate*

Li Zhi^{1)2)†} Wang Jian-Zhong¹⁾

¹⁾ (Department of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

²⁾ (National Laboratory of Science and Technology on Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

(Received 15 November 2012; revised manuscript received 14 January 2013)

Abstract

In this paper, the phenomenon of double barrier scattering in spin-orbit coupling Bose-Einstein condensate is studied and the analytical expression of transmission coefficient of the system is therefore obtained. On the basis of the above study, how to deal with Klein tunneling and bound Dirac particles is also discussed to devise an experimental scheme of trapping Dirac particles in captivity. Besides, numerical simulation of the barrier scattering pattern of Dirac particles is performed in this paper by the time splitting spectral method. Through the analysis of transmission situation of Dirac particles directing at the Klein barrier in both the center and margin part of blocked area and the study of the influence of non-linear interaction on the evolution of Dirac particles from both repelling and attracting effect, the conclusion can be drawn that although the influence of non-linear interaction on scattering property of particles is negligible to some extent, the strong non-linear interaction will completely destroy the momentum distribution of wave packets so that the result of barrier scattering of Dirac particles can be dramatically changed.

Keywords: spin-orbit coupled, Klein tunneling, barrier scattering, Bose-Einstein condensate

PACS: 03.75.Lm, 03.65.Nk, 67.85.Fg

DOI: 10.7498/aps.62.100306

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB921503) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11075020, 91021021).

† Corresponding author. E-mail: 4419578@qq.com