

三维时变等离子体目标的电磁散射特性研究*

杨利霞^{1)†} 沈丹华¹⁾ 施卫东²⁾

1) (江苏大学计算机科学与通信工程学院通信工程系, 镇江 212013)

2) (江苏大学流体机械工程技术研究中心, 镇江 212013)

(2012年12月18日收到; 2013年1月15日收到修改稿)

基于电流密度拉普拉斯变换方法改进的时域有限差分 (LTJEC-FDTD) 算法, 研究时变等离子体目标的电磁散射特性. 由 Maxwell 方程和等离子体本构方程出发, 利用拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换, 推导出计算三维时变问题的时域有限差分 (FDTD) 算法的迭代式. 采用模式匹配方法验证了 FDTD 迭代式的正确性, 并通过计算等离子体球的雷达散射截面 (RCS) 验证了算法相关边界的正确性. 最后用 LTJEC-FDTD 算法分析了涂覆时变等离子体的战斧式巡航导弹的 RCS.

关键词: 时变等离子体, 雷达散射截面, 模式匹配方法, 时域有限差分方法

PACS: 41.20.Jb, 42.68.Mj

DOI: 10.7498/aps.62.104101

1 引言

等离子体作为物质的第四态具有很多独特的性质, 它在电磁隐身、微波通信和射频电路中都有广泛的应用. 在实际应用中, 等离子体的频率会随着时间和空间发生变化. 例如, 飞行体突防时所用的等离子体涂层往往是时(突)变、非均匀、色散且非线性的介质. 此外, 空间飞行体在进入大气层时因高速摩擦而产生的等离子体、火箭的喷焰(羽流)等都可以强烈干扰甚至中断飞行体与地面监控站(雷达)的联系, 这就威胁到飞行员的生命安全和国家财产. 因此, 无论在民用方面还是军事方面, 对等离子体的研究都具有重要的价值.

对于时变等离子体的电磁特性分析^[1-4], 实验上已经发现了许多电磁现象, 然而在理论层面还没得到很完美的解释. 事实上, 在理论上给时变等离子体做出一个全面精确的解析分析是很困难的. 为了突破这一难点, 许多学者借用数值方法来分析时变等离子体的电磁性质.

本文基于时域有限差分 (FDTD) 方法能较好解决复杂介质电磁散射的优点, 从数值计算的角度提出了适用于三维时变问题的 FDTD 方法. 该方法结合了文献 [5, 6] 的思想, 提出了基于电流密度拉普拉斯变换方法的改进算法 (LTJEC-FDTD), 并通过模匹配方法验证了该算法的正确性. 最后用该方法计算并分析了时变等离子体目标的电磁散射特性.

2 三维时变等离子体的 FDTD 算法推导

Maxwell 和等离子体本构方程基本关系如下:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \nu \mathbf{J} = \varepsilon_0 \omega_p^2(t) * \mathbf{E} + \omega_b \times \mathbf{J}, \quad (3)$$

其中, ν 为等离子体碰撞频率; $\omega_p(t)$ 是时变等离子体频率; $\omega_b = e\mathbf{B}_0/m_e$ 为电子回旋频率, \mathbf{B}_0 为外部静态磁场.

* 国家自然科学基金(批准号: 61072002)、教育部高等学校博士点科研基金(批准号: 20093227120018)、江苏省“六大人才高峰计划”和江苏省博士后基金(批准号: 1201001A)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lixiayang@yeah.net

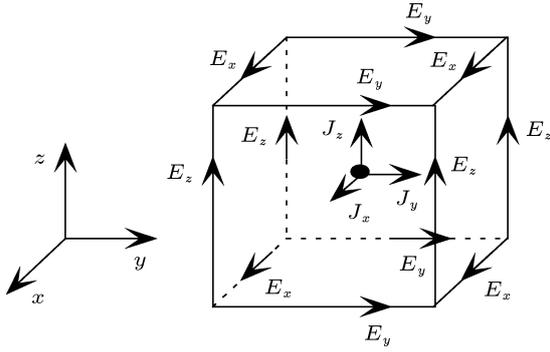


图1 Yee元胞中的电场、磁场和电流密度的空间分布

在直角坐标下, 设外磁场为任意方向, $\omega_b = \omega_{bx}e_x + \omega_{by}e_y + \omega_{bz}e_z$, 则(3)式可以化为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{dJ_x}{dt} \\ \frac{dJ_y}{dt} \\ \frac{dJ_z}{dt} \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \omega_p^2(t) * \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (sI - \Omega)^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \\ &= \frac{1}{(s+\nu)^3 + (s+\nu)\omega_b^2} \begin{bmatrix} (s+\nu)^2 + \omega_{bx}^2 & \omega_{bx}\omega_{by} - (s+\nu)\omega_{bz} & \omega_{bx}\omega_{bz} + (s+\nu)\omega_{by} \\ \omega_{bx}\omega_{by} + (s+\nu)\omega_{bz} & (s+\nu)^2 + \omega_{by}^2 & \omega_{by}\omega_{bz} - (s+\nu)\omega_{bx} \\ \omega_{bx}\omega_{bz} - (s+\nu)\omega_{by} & \omega_{by}\omega_{bz} + (s+\nu)\omega_{bx} & (s+\nu)^2 + \omega_{bz}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

对(6)式进行逆拉普拉斯变换得

$$J(t) = A(t)J_0 + \varepsilon_0 A(t) * M(t). \quad (8)$$

令

$$C(t) = A(t) * M(t), \quad (9)$$

即在离散时域

$$\begin{aligned} C(\Delta t) &= \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} A(n\Delta t - \tau) M(\tau) d\tau \\ &= \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} A(n\Delta t - \tau) \omega_p^2(\tau) * E(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

很短的 Δt 时间内, 可以将等离子体频率近似看成

$$\begin{bmatrix} J_x|_{i,j,k}^{n+(1/2)} \\ J_y|_{i,j,k}^{n+(1/2)} \\ J_z|_{i,j,k}^{n+(1/2)} \end{bmatrix} = A(\Delta t) \begin{bmatrix} J_x|_{i,j,k}^{n-(1/2)} \\ J_y|_{i,j,k}^{n-(1/2)} \\ J_z|_{i,j,k}^{n-(1/2)} \end{bmatrix} + \varepsilon_0 \omega_p^2 |^n K'(\Delta t)$$

其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\nu & -\omega_{bz} & \omega_{by} \\ \omega_{bz} & -\nu & -\omega_{bx} \\ -\omega_{by} & \omega_{bx} & -\nu \end{bmatrix}. \quad (5)$$

由(4)式可知, 电流密度 J 的三个分量相互耦合, 这在计算的时候是非常复杂的. 此外, 如果 J 在边界上, 那么涉及它的计算还会用到一些边界外的值, 而这对求解来说也是困难的. 因此, 我们采用将 J 的三个分量分布在空间的同一个点上, 如图1所示.

对于电流密度矢量 J 的迭代计算, 电场 E 和时变等离子体频率是随时间变化的函数. 为了分析方便, 令 $\omega_p^2(t) * E(t) = M(t)$. 对(3)式进行拉普拉斯变换, 由于时域和 s 域有变换对 $\frac{dJ}{dt} \Leftrightarrow sJ(s) - J_0$, $\varepsilon_0 \omega_p^2(t) * E(t) = \varepsilon_0 M(t) \Leftrightarrow \varepsilon_0 M(s)$, $\Omega J \Leftrightarrow \Omega J(s)$, 则(4)式可以写成

$$J(s) = (sI - \Omega)^{-1} J_0 + \varepsilon_0 (sI - \Omega)^{-1} M(s). \quad (6)$$

上式中 I 是单位矩阵. 为了分析的方便, 令

常量, 则

$$C(\Delta t) = \omega_p^2 |^n \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} A(n\Delta t - \tau) E(\tau) d\tau.$$

令

$$K(\Delta t) = \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} A(n\Delta t - \tau) E(\tau) d\tau, \quad (10)$$

对(10)式采取 JEC 方式^[5] 进行处理由此可得

$$K(\Delta t) = \Delta t \cdot A\left(\frac{1}{2}\Delta t\right) E\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta t\right], \quad (11)$$

所以, (4)式向前移半个时间步的 FDTD 差分迭代式可表示为

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} E_x|_{i+(1/2),j,k}^n + E_x|_{i+(1/2),j,k-1}^n + E_x|_{i+(1/2),j-1,k}^n + E_x|_{i+(1/2),j-1,k-1}^n \\ E_y|_{i,j+(1/2),k}^n + E_y|_{i,j+(1/2),k-1}^n + E_y|_{i-1,j+(1/2),k}^n + E_y|_{i-1,j+(1/2),k-1}^n \\ E_z|_{i,j,k+(1/2)}^n + E_z|_{i-1,j,k+(1/2)}^n + E_z|_{i,j-1,k+(1/2)}^n + E_z|_{i-1,j-1,k+(1/2)}^n \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{K}'(\Delta t) = \Delta t \cdot \mathbf{A} \left(\frac{1}{2} \Delta t \right). \quad (13)$$

因此, 可利用 (12) 式和 Maxwell 方程组, 推导出计算时变等离子体的 FDTD 迭代式.

3 算法验证与分析

3.1 数值验证

在金属矩形谐振腔中, 采用模式匹配方法, 得到谐振腔中瞬变等离子体后的模式匹配方程 [7] 为

$$[\partial_t^2 + \omega_l^2(t)] a_l = - \sum_{l' \neq l} C_{ll'}(t) a_{l'}, \quad (14)$$

其中, $C_{ll'}(t) = \int_V \omega_p^2(t) \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{l'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ 为模式匹配系数, $l = (m, n, p)$ 为矩形腔的电磁场模式; $a_l(t)$ 表达了各模式电场随时间的变化情况; $\omega_l^2(t) = k_l^2 c^2 + C_{ll}(t) = \omega^2 + C_{ll}(t)$, 其中 ω_l 为时变频率, k_l 为模波数, ω 为谐振腔的谐振频率, c 为波速.

由于时变等离子体频率只是时间的函数, 则

$$C_{ll'}(t) = \omega_p^2(t) \int_V \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{l'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

在矩形谐振腔中有

$$\int_V \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{l'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{ll'},$$

因此

$$C_{ll'}(t) = \omega_p^2(t) \delta_{ll'},$$

代入模式匹配方程 (14), 则方程 (14) 可写为

$$[\partial_t^2 + \omega_l^2(t)] a_l = 0. \quad (15)$$

为了方便验证, 当矩形谐振腔中只存在主模 TE_{101} 模时, 模式匹配方程 (15) 式就可写为

$$\frac{\partial^2 a_{(101)}}{\partial t^2} + [\omega_{(101)}^2 + C_{(101)(101)}(t)] \cdot a_{(101)} = 0, \quad (16)$$

(16) 式中 $a_{(101)}$ 为电场值, 可以用本文提出的 LTJEC-FDTD 算法计算出来, 并对 $a_{(101)}(t)$ 求二阶差分

$$a_{(101)}''(n) = \frac{1}{\Delta t^2} [a_{(101)}(n+1) - 2a_{(101)}(n) - a_{(101)}(n-1)], \quad (17)$$

令

$$A = a_{(101)}''(n),$$

$$B = - [\omega_{(101)}^2 + C_{(101)(101)}(t)] \cdot a_{(101)},$$

对比结果如图 2 所示.

从图 2 可以看出, A 和 B 符合得很好, 即表明 (16) 式是成立的, 也表明了本文提出的 LTJEC-FDTD 算法能满足模式匹配方程, 证明该算法是正确的. 在此基础上, 可以用该方法分析比较复杂的物理问题.

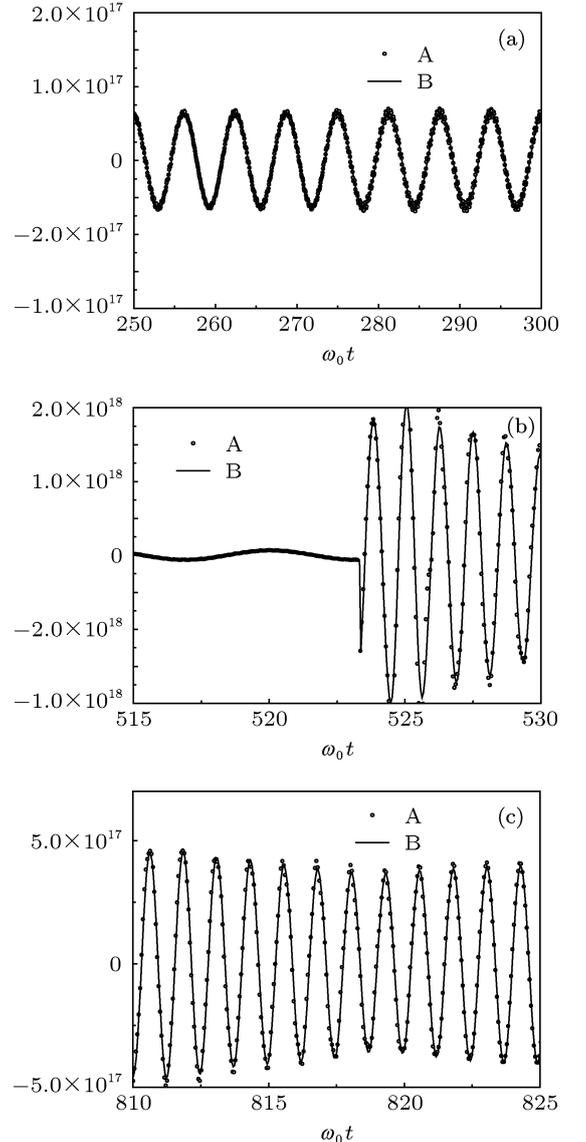


图 2 数值解与解析解的对比

3.2 算例验证

计算仿真了非磁化等离子球的雷达散射截面(RCS). 等离子体球半径 $r = 3.75 \text{ mm}$, 等离子体回旋频率 $\omega_b = 0$, 等离子体碰撞频率 $\nu = 20 \text{ GHz}$, 等离子体角频率 $\omega_p = 2\pi \times 28.7 \times 10^9 \text{ rad/s}$. 高斯脉冲入射, 沿 Z 轴入射, $\tau = 60\Delta t$. 结果如图 3 所示, 图中圆圈表示由 Mie 级数所得的准确结果, 三角形表示文献 [8, 9] 中的 RC-FDTD 方法计算结果, 实线表示本文算法得出的计算结果. 由图可以看出三者符合得比较好, 从而验证了算法相关边界的正确性.

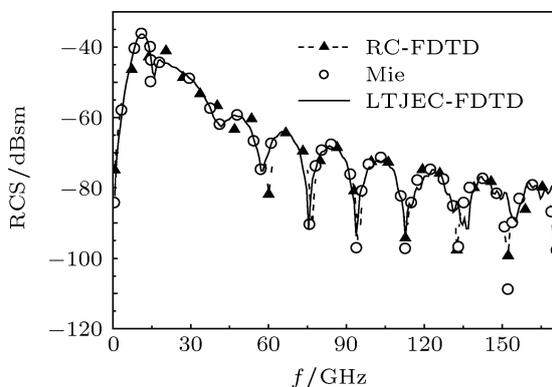


图 3 非磁化等离子体的后向同极化 RCS

4 时变等离子体目标的散射特性分析

时变等离子体是指等离子体频率随时间变化而变化, 其变化包括瞬变、缓变、复杂变化等.

瞬变等离子体是指等离子体频率在时间域上从无到有瞬间产生的一种时变情况, 它的函数形式可以表示如下:

$$\omega_p(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \omega_{p_max} & t \geq t_0 \end{cases}, \quad (18)$$

其中, ω_{p_max} 为等离子体频率的最大值, 如图 4.

缓变是指随着时间变化, 等离子体频率较慢的发生变化, 例如满足如下函数关系:

$$\omega_p^2(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \omega_{p_max}^2 \left[1 - \exp\left(\frac{-Kt}{T}\right) \right] & t \geq t_0 \end{cases}, \quad (19)$$

其中 T 是谐振腔固有频率的倒数, 为一固定的值; K 的大小能够表示等离子体产生速度的大小, 值越大, 等离子体产生的速度越快, 如图 5.

根据网上资料, 战斧式巡航导弹外形如图 6 所示 [10], 长约 6.79 m, 最大翼展为 2.62 m, 弹体

直径为 0.52 m. FDTD 计算中取离散网格尺寸 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta = 0.02 \text{ m}$.

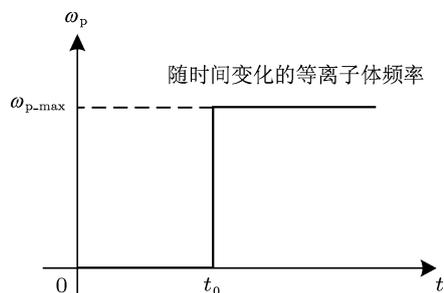


图 4 瞬变等离子体频率随时间的变化

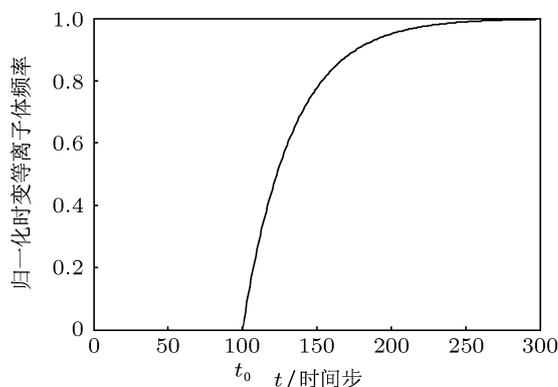


图 5 归一化缓变等离子体频率随时间的变化

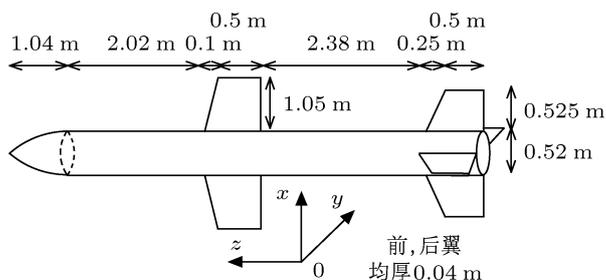


图 6 导弹外形几何参数

计算仿真了前弹翼涂覆磁化等离子层的战斧式巡航导弹的 RCS. 其中等离子体角频率的产生分为三种情况: 非时变、瞬变和缓变. 等离子体角频率的最大值 $\omega_{p_max} = 2\pi \times 20 \times 10^9 \text{ rad/s}$. 入射波为高斯脉冲 $E(t) = \exp(-4\pi(t - T_0)^2/\tau^2)$, $\tau = 30\Delta t$, $\Delta t = \delta/2c$, 及 $T_0 = 0.8\tau$. 脉冲迎头入射, 后向接收. 在前侧机翼外围涂覆 10 个网格的等离子体层, 前翼上下厚度均为 5 网格的等离子体层. 等离子体碰撞频率 $\nu = 300 \text{ GHz}$. 其中磁化情况下, $\omega_b = 30 \text{ GHz}$; 缓变情况下 $K = 13$. 图 7 和图 8 分别

为涂覆磁化等离子体层的战斧式巡航导弹的同极化 RCS 和交叉极化 RCS.

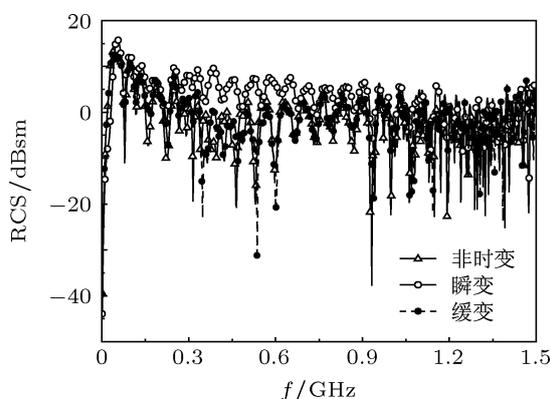


图 7 涂覆磁化等离子体层的战斧式巡航导弹的同极化 RCS

从图 7 可以看出,在低频部分,非时变情况下 RCS 略小,其次是缓变情况,RCS 最大的是瞬变情况;在高频部分,等离子体频率随时间变化对 RCS 影响较大;而从交叉极化 RCS 图 8 可以明显看出:缓变情况下,导弹的 RCS 最大,其次是非时变情况下,瞬变情况下的导弹 RCS 最小.

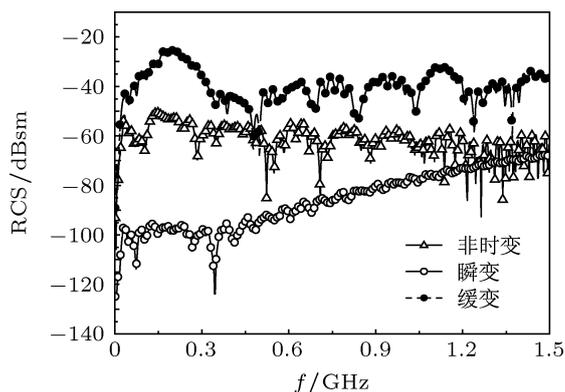


图 8 涂覆磁化等离子体层的战斧式巡航导弹的交叉极化 RCS

5 结论

本文用模式匹配的理论,验证了用改进的 LTJEC-FDTD 方法来计算时变等离子体的可行性,并在此基础上计算了涂覆等离子体层的战斧式巡航导弹的 RCS,得出了等离子体频率随时间变化对 RCS 的影响.

- [1] Joshi C J, Clayton C E, Marsh K 1990 *Plasma Sci.* **18** 814
- [2] Wilks S C, Dawaon J M, Mori W B 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 337
- [3] Kuo S P, Ren A 1993 *Plasma Sci.* **21** 53
- [4] Kalluri D K, Goteti V, Sessler A M 1993 *Plasma Sci.* **21** 77
- [5] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 783 (in Chinese) [刘少斌, 莫锦军, 袁乃昌 2004 物理学报 **53** 783]
- [6] Yang L X, Wang Y J, Wang G 2009 *Acta Electron. Sin.* **12** 2711 (in Chinese) [杨利霞, 王祎君, 王刚 2009 电子学报 **12** 2711]
- [7] Mendonca J T, Oliveira E, Silva L 1996 *Plasma Sci.* **24** 147
- [8] Yang L X, Ge D B, Wei B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4509 (in Chinese) [杨利霞, 葛德彪, 魏兵 2007 物理学报 **56** 4509]
- [9] Ge D B, Yan Y B 2011 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Wave* (3rd Ed.) (Xi'an: Xidian University Press) (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2011 电磁波时域有限差分方法 (第三版) (西安: 西安电子科技大学出版社)]
- [10] Zheng K S, Ge D B, Wei B 2004 *Syst. Engineer. Electron.* **26** 896 (in Chinese) [郑奎松, 葛德彪, 魏兵 2004 系统工程与电子技术 **26** 896]

Analyses of electromagnetic scattering characteristics for 3D time-varying plasma medium*

Yang Li-Xia¹⁾ Shen Dan-Hua¹⁾ Shi Wei-Dong²⁾

1) (*Department of Communication Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

2) (*Research Center of Fluid Machinery Engineering and Technology, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

(Received 18 December 2012; revised manuscript received 15 January 2013)

Abstract

To analyze the time-varying plasma, a modified finite-difference time-domain (LTJEC-FDTD) algorithm is derived. By using Laplace transform and inverse Laplace transform, we can deduce the FDTD iteration expression for calculating 3D time-varying problem from Maxwell equation and plasma constitutive equation. The iteration expression is proven to be correct by mode-coupling theory, while the correctness of the relevant boundary is tested by calculating the radar cross-section (RCS) of plasma sphere. So, the method is suitable to the calculation of time-varying plasma. Then, the RCS of complex time-varying plasma object is also analyzed.

Keywords: time-varying plasma, radar cross-section, mode-coupling theory, finite difference time domain method

PACS: 41.20.Jb, 42.68.Mj

DOI: 10.7498/aps.62.104101

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61072002), the Ph. D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 20093227120018), Elitist of Liu-Da Summit Project in Jiangsu Province at 2011, and Postdoctoral Science Foundation in Jiangsu, China (Grant No. 1201001A).

† Corresponding author. E-mail: lixiayang@yeah.net